OCTAVA EDICIÓN

Diseño de CONCRETO REFORZADO

JACK C. McCORMAC - RUSSELL H. BROWN



Alfaomega

Diseño de
Concreto reforzado

Diseño de Concreto reforzado

Octava edición

Edición 318-08 del Código ACI

Jack C. McCormac
Clemson University

Russell H. Brown
Clemson University



Traducción:
Dr. Raúl Arrioja Juárez, UNAM

Al cuidado de la edición:
Luz Ángeles Lomelí Díaz
lalomeli@alfaomega.com.mx

Gerente editorial:
Marcelo Grillo Giannetto
mgrillo@alfaomega.com.mx

Datos catalográficos

Mc Cormac, Jack y Brown, Russell
Diseño de Concreto Reforzado
Octava Edición con el Código ACI 318-08

Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México

ISBN: 978-607-707-231-7

Formato: 20 x 25.5 cm   Páginas: 724

Diseño de Concreto Reforzado
Jack C. Mc Cormac y Russell H. Brown
ISBN: 978-0-470-27927-4 edición original en inglés "Design of Reinforced Concrete", 8th Edition, ACI-318-08 Code edition, publicada por John Wiley & Sons, Inc. New Jersey, USA.

Octava edición con el Código ACI 318-08, Alfaomega Grupo Editor, México, julio 2011

Pitágoras 1139, Col. Del Valle, 03100, México D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro No. 2317

Pág. Web: **http://www.alfaomega.com.mx**
E-mail: **atencionalcliente@alfaomega.com.mx**

ISBN: 978-607-707-231-7

Impreso en México. Printed in Mexico.

Empresas del grupo:

México: Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. – Pitágoras 1139, Col. Del Valle, México, D.F. – C.P. 03100.
Tel.: (52-55) 5575-5022 – Fax: (52-55) 5575-2420 / 2490. Sin costo: 01-800-020-4396
E-mail: atencionalcliente@alfaomega.com.mx

Colombia: Alfaomega Colombiana S.A. – Carrera 15 No. 64 A 29, Bogotá, Colombia,
Tel.: (57-1) 2100122 – Fax: (57-1) 6068648 – E-mail: cliente@alfaomega.com.co

Chile: Alfaomega Grupo Editor, S.A. – Dr. La Sierra 1437, Providencia, Santiago, Chile
Tel.: (56-2) 235-4248 – Fax: (56-2) 235-5786 – E-mail: agechile@alfaomega.cl

Argentina: Alfaomega Grupo Editor Argentino, S.A. – Paraguay 1307 P.B. Of. 11, C.P. 1057, Buenos Aires,
Argentina, – Tel./Fax: (54-11) 4811-0887, 4811 7183 y 4811 0887 – E-mail: ventas@alfaomegaeditor.com.ar

Prefacio

Este libro de texto presenta una introducción al diseño de concreto reforzado. Nosotros los autores esperamos que el material esté escrito de tal modo que interese a los estudiantes en el tema y los aliente a continuar su estudio en los años venideros. El texto se preparó como un curso introductorio de tres créditos, pero se incluye suficiente material para un curso adicional de tres créditos.

NUEVO EN ESTA EDICIÓN

Reglamento actualizado

Con la octava edición de este texto el contenido se ha actualizado conforme al Reglamento de Construcciones 2008 del American Concrete Institute (ACI 318-08). Los cambios de esta edición del Reglamento incluyen:

- Numerosos cambios en notaciones y números de sección.
- Un cambio en el tratamiento del diseño del concreto con agregados ligeros a todo lo largo del reglamento.
- Se incrementó el factor de reducción de resistencia para columnas en espiral y se introdujeron las barras deformadas con anclaje interno como una alternativa a los ganchos para suministrar la longitud de desarrollo.
- Aclaraciones para la longitud de desarrollo de barras galvanizadas, de acero inoxidable y en racimo.
- Se introdujo el uso de cilindros de concreto pequeños, permitiendo cilindros de 4×8 en lugar de 6×12.
- Los requisitos del diseño sismo resistente están ahora relacionados con la Categoría de Diseño Sísmico (SDC) que sea consistente con otros documentos que prescriben cargas de diseño.

Material actualizado

La mayor parte de los capítulos han sido modificados reflejando los puntos de vista del nuevo coautor, con la cooperación del autor original.

- El estudio del factor ϕ variable en los capítulos 3, 4 y 10 ha sido revisado y expandido. Ahora incluye una ecuación generalizada para el factor ϕ para cualquier límite elástico.
- Una gráfica que muestra el efecto del factor ϕ en la resistencia del momento de diseño se ha añadido al capítulo 3 para demostrar el impacto del factor ϕ variable en el diseño.
- Las longitudes de desarrollo de las barras en manojo han sido aclaradas por el nuevo reglamento y consecuentemente se han cambiado en el capítulo 7.
- Se ha añadido al capítulo 10 un diagrama de interacción que muestra el efecto del factor ϕ variable.
- La redistribución inelástica de la sección de momento ha sido revisada y actualizada en el capítulo 14.
- Se han agregado las ecuaciones para la distribución de momentos a las franjas de columna y central como un suplemento de las tablas en el capítulo 16.
- Se ha ampliado el diseño de muros con carga fuera del plano y se ha añadido en el capítulo 18 un ejemplo del diseño racional de un muro de cimiento.

Hojas de cálculo de Excel

Las nuevas hojas de cálculo incluidas con el texto se crearon para proveer al estudiante y al profesor con herramientas para analizar y diseñar elementos de concreto reforzado rápidamente para comparar soluciones alternativas. Se dan ejemplos al final de los capítulos para ilustrar cómo usar el software en ejemplos previamente elaborados.

Diseño sísmico

Se agregó un nuevo capítulo 21 en diseño sísmico. Este capítulo está pensado sólo como una introducción al tema. Podría escribirse un libro de texto completo solamente sobre este tema. Sin embargo, familiariza al estudiante con aspectos relacionados con el diseño de estructuras de concreto reforzado para resistir terremotos. El capítulo 21 incluye dos problemas nuevos de ejemplo que ilustran algunos de los requisitos nuevos del reglamento.

Diseño de muros de cortante

La sección sobre el diseño de muros de cortante en el capítulo 18 ha sido ampliada. El material nuevo da detalles y ejemplos sobre cómo diseñar muros de cortante para una combinación de carga axial y momento flexionante. Los diagramas de interacción desarrollados para columnas en el capítulo 10 se aplican al diseño de muros de cortante.

RECURSOS DEL PROFESOR Y DEL ESTUDIANTE

El sitio web para el libro está localizado en http://virtual.alfaomega.com.mx/ y contiene los siguientes recursos.

Para profesores

Manual de soluciones. Está disponible un Manual, el cual contiene soluciones completas para todos los problemas de tarea en el texto.

- Exámenes de muestra
- Programas de estudio de los cursos

Visite nuestra página web ubicada en http://virtual.alfaomega.com.mx/ para registrarse. Estos recursos están disponibles para profesores que hayan adoptado el libro para su curso.

Para estudiantes y profesores

Se proporcionan hojas de cálculo de Excel para la mayoría de capítulos del texto. El uso de las hojas de cálculo es autoexplicativo. Muchas de las celdas contienen comentarios para ayudar al usuario nuevo. Las hojas de cálculo pueden ser modificadas por el estudiante o el profesor para satisfacer sus necesidades más específicas. En la mayoría de los casos, los cálculos contenidos dentro de las hojas de cálculo son un reflejo de aquellos mostrados en los problemas de ejemplo en el texto.

Los diversos usos de estas hojas de cálculo se ilustran a todo lo largo del texto. Al final de la mayoría de los capítulos hay problemas de ejemplo que muestran el uso de la hoja de cálculo para ese capítulo específico. El espacio no permite ejemplos para todas las capacidades de la hoja de cálculo. Los ejemplos escogidos fueron considerados por los autores como los más pertinentes. Visite nuestra página en http://virtual.alfaomega.com.mx/ para descargar este software.

RECONOCIMIENTOS

Deseamos agradecer a las siguientes personas que revisaron esta edición:
Roger H. L. Chen (West Virginia University), Hector Estrada (University of the Pacific), y Wael Zatar (Marshall University). También queremos agradecer a Richard Bennett (University of Tennessee) Max Porter (Iowa State University), y Mark McGinley (University of Lousiville) por su revisión y sus útiles comentarios sobre el capítulo 21. Un agradecimiento especial para Richard Klingner (University of Texas at Austin) por la extensa revisión y el comentario del capítulo 21.

Finalmente, estamos también agradecidos a los revisores y los usuarios de las ediciones previas de este libro por sus sugerencias, correcciones y críticas. Siempre estamos agradecidos con cualquier persona que se tome el tiempo de contactarnos con respecto a cualquier parte del libro.

Jack C. McCormac
Russell H. Brown

Contenido

6. Estado límite de servicio 150

7. Adherencia, longitudes de desarrollo y empalmes 180

8. Cortante y tensión diagonal 219

9. Introducción al estudio de columnas 257

10. Diseño de columnas cortas sometidas a carga axial y flexión 275

1

Introducción

1.1 CONCRETO Y CONCRETO REFORZADO

El *concreto* es una mezcla de arena, grava, roca triturada, u otros agregados unidos en una masa rocosa por medio de una pasta de cemento y agua. En ocasiones, uno o más aditivos se agregan para cambiar ciertas características del concreto, tales como la ductilidad, durabilidad y tiempo de fraguado.

Al igual que la mayoría de los materiales pétreos, el concreto tiene una alta resistencia a la compresión y una muy baja resistencia a la tensión. El *concreto reforzado* es una combinación de concreto y acero en la que el refuerzo de acero proporciona la resistencia a la tensión de que carece el concreto. El acero de refuerzo es también capaz de resistir fuerzas de compresión y se usa en columnas, así como en otros miembros estructurales y en situaciones que se describirán más adelante.

1.2 VENTAJAS DEL CONCRETO REFORZADO COMO MATERIAL ESTRUCTURAL

El concreto reforzado es probablemente el material disponible más importante para la construcción. Puede usarse en una u otra forma para casi todas las estructuras, grandes o pequeñas —en edificios, puentes, pavimentos, presas, muros de retención, túneles, instalaciones de drenaje e irrigación, tanques, etcétera.

El gran éxito de este material universal en la construcción puede entenderse fácilmente si se consideran sus numerosas ventajas. Algunas de éstas son las siguientes:

1. Tiene una resistencia considerable a la compresión por unidad de costo en comparación con muchos otros materiales.
2. El concreto reforzado tiene gran resistencia a las acciones del fuego y el agua y, de hecho, es el mejor material estructural que existe para los casos en que el agua esté presente. Durante incendios de intensidad media, los miembros con un recubrimiento adecuado de concreto sobre las varillas de refuerzo sufren sólo daño superficial sin fallar.
3. Las estructuras de concreto reforzado son muy rígidas.
4. Requiere de poco mantenimiento.
5. Comparado con otros materiales, tiene una larga vida de servicio. Bajo condiciones apropiadas, las estructuras de concreto reforzado pueden usarse indefinidamente sin reducción en sus capacidades de carga. Esto puede explicarse por el hecho de que la resistencia del concreto no disminuye con el tiempo, sino que en realidad aumenta con los años, debido al largo proceso de solidificación de la pasta de cemento.
6. Es prácticamente el único material económico disponible para zapatas, losas de piso, muros de sótano, pilares y construcciones similares.



Torre NCNB en Charlotte, N.C., terminada en 1991. (Cortesía de Portland Cement Association.)

7. Una característica especial del concreto es la posibilidad de colarlo en una variedad extraordinaria de formas que van desde simples losas, vigas y columnas, hasta grandes arcos y cascarones.
8. En muchas regiones, el concreto aprovecha para su elaboración la existencia de materiales locales baratos (arena, grava y agua) y requiere cantidades relativamente pequeñas de cemento y acero de refuerzo, las cuales puede ser necesario conseguir en otras regiones del país.
9. Se requiere mano de obra de baja calificación para su montaje, en comparación con otros materiales, como el acero estructural.

1.3 DESVENTAJAS DEL CONCRETO REFORZADO COMO MATERIAL ESTRUCTURAL

Para usar con éxito el concreto, el proyectista debe estar completamente familiarizado con sus puntos débiles, así como con sus puntos fuertes. Algunas de sus desventajas son las siguientes:

1. El concreto tiene una resistencia muy baja a la tensión, por lo que requiere el uso de un refuerzo de tensión.
2. Se requieren cimbras para mantener el concreto en posición hasta que se endurezca lo suficiente. Además, pueden requerirse obras falsas o apuntalamiento para apoyar la cimbra de techos,



La Pyramid Sports Arena de 320 pies de alto, Memphis, Tennessee.
(Cortesía de EFCO Corp.)

muros, pisos y estructuras similares hasta que los miembros de concreto adquieren suficiente resistencia para soportarse por sí mismos. La obra falsa es muy cara. Su costo (en EUA) es de uno a dos tercios del costo total de una estructura de concreto reforzado, con un valor promedio aproximado de 50%. *Debe ser claro que cuando se trata de mejorar el costo de las estructuras de concreto reforzado, el factor principal reside en la reducción del costo de la cimbra.*

3. La baja resistencia por unidad de peso de concreto conduce a miembros pesados. Esto se vuelve muy importante en estructuras de gran claro, en donde el gran peso muerto del concreto tiene un fuerte efecto en los momentos flexionantes. Pueden usarse agregados ligeros para reducir el peso del concreto, pero el costo del concreto aumenta.
4. Similarmente, la baja resistencia por unidad de volumen del concreto implica que los miembros serán relativamente grandes, lo que es de una considerable importancia en edificios altos y en estructuras de grandes claros.
5. Las propiedades del concreto varían ampliamente debido a las modificaciones en su proporción y mezclado. Además, el colado y curado del concreto no son tan cuidadosamente controlados como la producción de otros materiales; por ejemplo, el acero estructural y la madera laminada.

Otras dos características que pueden causar problemas son la contracción y la fluencia plástica del concreto. Estas características se estudian en la sección 1.11 de este capítulo.

1.4 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

La mayoría de la gente piensa que el concreto se ha estado usando durante muchos siglos, pero no es así. Los romanos utilizaron una especie de cemento, llamado *puzolana*, antes del nacimiento de Cristo. Encontraron grandes depósitos de ceniza volcánica arenosa cerca del Monte Vesubio y en otros lugares en Italia. Cuando mezclaron este material con cal viva y agua, además de arena y grava, dejando endurecer la mezcla, se produjo una sustancia rocosa que utilizaron como material de construcción. Se podría pensar que resultaría una especie de concreto relativamente pobre, en comparación con las normas actuales, pero algunas estructuras de concreto romanas siguen de pie hoy en día. Un ejemplo es el Panteón (un edificio dedicado a todos los dioses) que se encuentra en Roma y se terminó en el año 126 de nuestra era.

El arte de hacer concreto puzolánico se perdió durante la Edad Media y fue resucitado hasta los siglos XVIII y XIX. En Inglaterra se descubrió en 1796 un depósito de piedra de cemento natural que fue vendida como "cemento romano". Se descubrieron otros depósitos de cemento natural tanto en Europa como en América, que fueron explotados durante varias décadas.

El verdadero gran adelanto para el concreto ocurrió en 1824 cuando un albañil inglés llamado Joseph Aspdin, después de largos y laboriosos experimentos, obtuvo una patente para un cemento que él llamó cemento portland, debido a que su color era muy similar al de la piedra de una cantera en la isla de Portland, en la costa inglesa. Él hizo su cemento con ciertas cantidades de arcilla y piedra caliza que pulverizó y quemó en la estufa de su cocina, moliendo después la escoria resultante para obtener un polvo fino. En los primeros años tras su invención, ese cemento se usó principalmente en estucos.[1] Este extraordinario producto fue adoptado poco a poco por la industria de la construcción y ni siquiera fue introducido en Estados Unidos sino hasta 1868; el primer cemento portland no se fabricó en Estados Unidos sino hasta la década de 1870.

Los primeros usos del concreto no son bien conocidos. Muchos de los trabajos iniciales fueron hechos por los franceses François Le Brun, Joseph Lambot y Joseph Monier. En 1832 Le Brun construyó una casa de concreto y siguió después la construcción de una escuela y una iglesia con el mismo material. Alrededor de 1850, Lambot construyó una embarcación de concreto reforzado con una red de alambres o varillas paralelas. Sin embargo, se le acredita a Monier la invención del concreto reforzado. En 1867 él recibió una patente para la construcción de tinas o receptáculos y depósitos de concreto, reforzados con una malla de alambre de hierro. Su meta reconocida al trabajar con este material era obtener un bajo peso sin tener que sacrificar resistencia.[2]

De 1867 a 1881 Monier recibió patentes para la fabricación de durmientes, losas de piso, arcos, puentes peatonales, edificios y otros elementos de concreto reforzado en Francia y Alemania. Otro francés, François Coignet, construyó estructuras simples de concreto reforzado y desarrolló métodos básicos de diseño. En 1861 publicó un libro en el que presentaba un buen número de aplicaciones. Fue la primera persona en darse cuenta que la adición de demasiada agua a la mezcla reducía considerablemente la resistencia del concreto. Otros europeos que experimentaron con el concreto reforzado en sus etapas iniciales fueron los ingleses William Fairbairn y William B. Wilkinson, el alemán G.A. Wayss y otro francés, François Hennebique.[3, 4]

William E. Ward construyó el primer edificio de concreto reforzado en Estados Unidos en Port Chester, Nueva York, en 1875. En 1883 presentó un artículo ante la American Society of Mechanical Engineers donde afirmaba haber obtenido la idea del concreto reforzado al observar a trabajadores ingleses en 1867 intentando limpiar el cemento endurecido de sus herramientas de hierro.[5]

Thaddeus Hyatt, un estadounidense, fue probablemente la primera persona en analizar correctamente los esfuerzos en una viga de concreto reforzado y en 1877 publicó un libro de 28 páginas titulado *An Account of Some Experiments with Portland Cement Concrete, Combined with Iron as a Building Material*. En este libro elogió el uso del concreto reforzado y dijo que "las vigas laminadas (acero) tienen que aceptarse con base en un acto de fe". Hyatt puso mucho énfasis en la alta resistencia del concreto al fuego.[6]

---

[1]Kirby, R.S. y Laurson, P.G., 1932, *The Early Years of Modern Civil Engineering* (New Haven: Yale University Press), pág. 266.
[2] Kirby y Laurson, *The Early Years of Modern Civil Engineering*, págs. 273-275.
[3]Straub, H., 1964, *A History of Civil Engineering* (Cambridge: MIT Press), págs. 205-215. Traducido del alemán *Die Geschichte der Bauingenieurkunst* (Basel: Verlag Birkhauser), 1949.
[4]Kirby, R.S. y Laurson, P.G., 1932, *The Early Years of Modern Civil Engineering* (New Haven: Yale University Press), págs. 273-275.
[5]Ward, W. E., 1883, "Béton in Combination with Iron as a Building Material", *Transactions ASME*, 4, págs. 388-403.
[6]Kirby, R.S. y Laurson, P.G., 1932, *The Early Years of Modern Civil Engineering* (New Haven: Yale University Press), pág. 275.



Remolque de dos cilindros huecos de concreto reforzado, cada uno de 65 pies de diámetro y 185 pies de altura, en el Mar del Norte, como parte de una plataforma perforadora de petróleo. (Cortesía de United Nations, J. Moss.)

E.L. Ransome, de San Francisco, supuestamente usó concreto reforzado en los primeros años de la década de 1870 y fue el inventor de las varillas corrugadas (o retorcidas), para las que obtuvo una patente en 1884. Estas varillas, que eran de sección transversal cuadrada, se torcían en frío con una vuelta completa en una longitud de no más de 12 veces el diámetro de la varilla.[7] (El propósito de torcerlas era proporcionar mejor adherencia entre el concreto y el acero.) En 1890, en San Francisco, Ransome construyó el museo Leland Stanford Jr. Se trata de un edificio de concreto reforzado de 312 pies de largo y 2 niveles de altura en el que se usó como refuerzo de tensión el alambre de los cables de desecho de un sistema de transporte funicular. Este edificio sufrió pocos daños en el sismo de 1906 y el incendio que resultó. El limitado daño a este edificio y otras estructuras de concreto que resistieron el gran incendio de 1906 condujo a una amplia aceptación de esta forma de construcción en la costa occidental de Estados Unidos. Desde 1900-1910, el desarrollo y uso del concreto reforzado en Estados Unidos ha sido muy rápido.[8, 9]

1.5 COMPARACIÓN DEL CONCRETO REFORZADO CON EL ACERO ESTRUCTURAL PARA EDIFICIOS Y PUENTES

Cuando está bajo consideración un tipo particular de estructura, puede ser que el estudiante perplejo se pregunte: ¿debe usarse concreto reforzado o acero estructural? Hay mucha discusión sobre esta cuestión, pues mientras los partidarios del concreto reforzado muestran al acero como un material que se corroe, los que favorecen dicho metal señalan que el concreto es un material que tiende a retornar a su estado natural (es decir, arena y grava) bajo esfuerzos de tensión demasiado grandes.

---

[7]American Society for Testing Materials, 1911, *Proceedings*, 11, págs. 66-68.
[8]Wang, C.K. y Salmon, C.G., 1998, *Reinforced Concrete Design*, 6a. ed. (Nueva York: Harper Collins), págs. 3-5.
[9]"The Story of Cement, Concrete and Reinforced Concrete", *Civil Engineering*, noviembre de 1977, págs. 63-65.

No hay una respuesta simple a esta pregunta, sobre todo porque ambos materiales tienen muchas características excelentes que pueden utilizarse con tan buenos resultados en muchos tipos de estructuras. De hecho, con frecuencia ambos se utilizan en las mismas estructuras con estupendos resultados.

La selección del material estructural que se ha de usar en un edificio determinado depende de la altura y claro de la estructura, el mercado de materiales, de las condiciones de la cimentación, de los códigos locales de construcción y de consideraciones arquitectónicas. Para edificios de menos de 4 niveles, el concreto reforzado, el acero estructural y la construcción con muros de carga pueden competir entre sí. En edificios de 4 a 20 niveles, el concreto reforzado y el acero estructural son económicamente competitivos, pero para edificios de más de 20 niveles se prefiere el acero estructural. Sin embargo, actualmente el concreto reforzado se ha vuelto cada vez más competitivo para edificios de más de 20 niveles y hay ya un número de edificios de concreto reforzado de mayor altura alrededor del mundo. El edificio Water Tower Place en Chicago de 74 niveles, de 859 pies de altura es el edificio de concreto reforzado más alto en el mundo. La torre CN de 1 465 pies (que no es un edificio) en Toronto, Canadá, es la estructura más alta de concreto reforzado en el mundo.

Aunque a todos nos gustaría participar en el diseño de grandes y prestigiosos edificios de concreto reforzado, simplemente no se hacen los suficientes. Como resultado, casi toda nuestra labor se invierte en el diseño de estructuras mucho más pequeñas. Acaso 9 de cada 10 edificios en Estados Unidos tienen una altura de 3 niveles o menos y más de dos tercios de ellos contienen un área de piso de 15 000 pies^2 o menos.

Las condiciones de la cimentación con frecuencia suelen afectar la selección del material por usar en la estructura de un edificio. Si las condiciones de la cimentación son pobres, puede ser más conveniente usar una estructura de acero debido al menor peso de ésta. El código de construcciones en una ciudad específica puede favorecer más a uno de los materiales que a los otros. Por ejemplo, muchas ciudades tienen zonas de incendio en las que sólo pueden erigirse estructuras a prueba de fuego, lo cual favorece al concreto reforzado. Finalmente, el factor tiempo favorece a las estructuras de acero, ya que éstas pueden erigirse mucho más rápidamente que las estructuras de concreto reforzado. Sin embargo, la ventaja del tiempo no es tan grande como podría parecer a primera vista, porque en caso de que la estructura deba estar calificada a prueba de fuego, el constructor tendrá que recubrir el acero con algún tipo de material incombustible después de montado el edificio.

En la decisión de si se debe usar concreto o acero para un puente, se deberán tomar en cuenta diversos factores, tales como el claro, las condiciones de la cimentación, las cargas, consideraciones arquitectónicas, etc. En general, el concreto es un material de excelente compresión y normalmente será preferido en puentes de claros cortos y en los casos en que se requiera una estructura rígida (como tal vez en puentes ferroviarios).

1.6 COMPATIBILIDAD DEL CONCRETO Y EL ACERO

El concreto y el acero de refuerzo funcionan en conjunto en forma excelente en las estructuras de concreto reforzado. Las ventajas de cada material compensan las desventajas del otro. Por ejemplo, la gran desventaja del concreto es su falta de resistencia a la tensión; pero la resistencia a la tensión es una de las grandes ventajas del acero. Las varillas de refuerzo tienen una resistencia a la tensión aproximadamente 100 veces mayor a la del concreto usado.

Los dos materiales se adhieren muy bien entre sí de modo que no hay deslizamiento entre los dos y por tanto funcionan conjuntamente como una unidad para resistir las fuerzas. La excelente liga obtenida se debe a la adherencia química entre los dos materiales, a la rugosidad natural de las varillas y a la estrecha separación de las corrugaciones en las superficies de las varillas.

Las varillas de refuerzo están expuestas a la corrosión, pero el concreto que las rodea les proporciona excelente protección. La fuerza del acero expuesto a las temperaturas que se alcanzan en los incendios normales es nula, pero su recubrimiento con concreto da como resultado calificaciones de prueba de fuego muy satisfactorias. Finalmente, el concreto y el acero trabajan muy bien juntos respecto a los cambios de temperatura porque sus coeficientes de dilatación térmica son muy parecidos. Para acero,

el coeficiente es 0.0000065 por unidad de longitud por grado Fahrenheit y para el concreto varía entre 0.000004 y 0.000007 (valor promedio, 0.0000055).

1.7 CÓDIGOS DE DISEÑO

El código más importante en Estados Unidos para el diseño de concreto reforzado es el *Building Code Requirements for Structural Concrete* del Instituto Americano del Concreto (ACI 318-08)[10]. Este código, que se usa principalmente para el diseño de edificios, es observado en la mayoría de los ejemplos numéricos dados en este texto. Con frecuencia se hacen referencias a este documento y se indica siempre el número de la sección considerada. Los requisitos de diseño para varios tipos de miembros de concreto reforzado se presentan en el código junto con un "comentario" a esos requisitos. El comentario proporciona explicaciones, sugerencias e información adicional relativa a los requisitos del diseño. De esa manera, los usuarios obtienen más antecedentes y un mejor entendimiento del código.

El código ACI no es en sí mismo un documento legalmente aplicable. Es meramente una serie de principios para la buena práctica del diseño de concreto reforzado. Sin embargo, está escrito en forma de código o ley de manera que diversos organismos de la administración pública puedan decidir fácilmente si lo incluyen en sus códigos locales de construcción y entonces pueda ser legalmente aplicable en esa comunidad. De esta manera, el código ACI ha sido votado como ley por innumerables organismos gubernamentales en Estados Unidos. El International Building Code (IBC), que publicó por primera vez en el año 2000 el International Code Council, ha consolidado los tres códigos regionales de construcciones (Building Officials and Code Administrators, International Conference of Building Officials, and Southern Building Code Congress International) en un documento nacional. El código IBC se actualiza cada 3 años y se refiere a la edición más reciente del ACI 318 para la mayoría de sus disposiciones relacionadas con el diseño de concreto reforzado, con sólo algunas modificaciones. Se espera que el IBC 2009 se referirá al ACI 318-08 para la mayoría de sus disposiciones sobre concreto reforzado. El código ACI 318 ha sido aceptado también ampliamente en Canadá y en México, ha tenido una enorme influencia en los códigos de concreto de todos los países alrededor del mundo.

Conforme se adquieren nuevos conocimientos sobre el comportamiento del concreto reforzado, el ACI revisa su código. El objetivo actual es efectuar cambios anuales en el código en forma de suplementos y efectuar revisiones mayores de todo el código cada 3 años.

Otras especificaciones bien conocidas sobre concreto reforzado son las de la *American Association of State Highway and Transportation Officials* (AASHTO) y la *American Railway Engineering Association* (AREA).

1.8 UNIDADES SI Y RECUADROS SOMBREADOS

La mayor parte de este libro está dedicada al diseño de estructuras de concreto reforzado usando las unidades comunes en Estados Unidos. Sin embargo, los autores opinan que es absolutamente necesario para los ingenieros actuales poder diseñar también usando el sistema SI. Por ello, se presentan aquí las ecuaciones SI cuando éstas difieren de las expresadas en unidades comunes, junto con una buena cantidad de ejemplos numéricos resueltos usando unidades SI. Las ecuaciones están tomadas de la versión métrica del *Building Code Requirements for Structural Concrete* del Instituto Americano del Concreto (ACI 318M-08).[11]

[10]American Concrete Institute, 2008, *Building Code Requirements for Structural Concrete* (ACI 318-08), Farmington Hills, Michigan.
[11]American Concrete Institute, 2008, *Building Code Requirements for Structural Concrete* (ACI 318M-08), Farmington Hills, Michigan.

Para mucha gente es algo incómodo leer un libro en el que números y ecuaciones son presentados en dos grupos de unidades. Para tratar de reducir esta molestia, los autores han colocado, a lo largo de todo el libro, un recuadro sombreado alrededor de cualquier entrada pertinente a unidades SI.

Si los lectores están trabajando en un momento dado con unidades de EUA, pueden ignorar por completo las áreas sombreadas. Por otra parte, esperamos que tales ayudas permitan a una persona que trabaje con unidades SI, encontrar fácilmente las ecuaciones y los ejemplos correspondientes.

1.9 TIPOS DE CEMENTO PORTLAND

Los concretos hechos con cemento portland normal requieren aproximadamente dos semanas para adquirir una resistencia suficiente que permita retirar la cimbra y aplicar cargas moderadas. Tales concretos alcanzan sus resistencias de diseño después de aproximadamente 28 días y después continúan ganando resistencia a un menor ritmo.

En muchas ocasiones es deseable acelerar la construcción por medio del uso de *cementos de fraguado rápido*, los cuales, si bien más caros, permiten obtener las resistencias deseadas en un periodo de 3 a 7 días en vez de los 28 días normales. Esos cementos son particularmente útiles para la fabricación de miembros prefabricados; en éstos, el concreto se cuela en cimbras en las que rápidamente adquiere las resistencias deseadas y luego se retiran las cimbras con objeto de usarlas nuevamente en otros colados. Está claro que cuanto más rápido se obtenga la resistencia deseada, más eficiente resultará la operación. Se pueden hacer consideraciones similares sobre el colado de edificios de concreto, piso por piso. Los



El One Peachtree Center en Atlanta, Georgia, tiene 854 pies de alto, construido para los Juegos Olímpicos de 1996. (Cortesía de Portland Cement Association.)

cementos de fraguado rápido pueden también usarse con éxito en reparaciones de emergencia y para el *concreto lanzado* (en éste, un mortero o concreto se dispara a gran velocidad a través de una manguera hacia una superficie preparada de antemano).

Existen otros tipos especiales de cementos portland disponibles. El proceso químico que ocurre durante el fraguado o endurecimiento del concreto produce calor. En estructuras de concreto colosales, como presas, losas de cimentación y pilares, este calor se disipa muy lentamente y puede generar serios problemas. Ocasiona que el concreto se expanda durante su hidratación. Al enfriarse, el concreto se contrae y se desarrolla con frecuencia un severo agrietamiento.

El concreto puede usarse en lugares en que queda expuesto a diversos cloruros y/o sulfatos. Tales situaciones se presentan en las construcciones marinas y en estructuras expuestas a diversos tipos de suelos. Se fabrican algunos cementos portland con bajo calor de hidratación y otros con mayores resistencias al ataque de los cloruros y sulfatos.

En Estados Unidos, la *American Society for Testing and Materials* (ASTM) clasifica los cementos portland en cinco tipos. Estos diferentes cementos se fabrican casi con los mismos materiales básicos, pero sus propiedades se modifican variando la dosificación. El cemento tipo I es el cemento normal usado en la mayoría de las construcciones, pero hay otros cuatro tipos útiles en situaciones especiales en las que se requiere un fraguado rápido o una generación baja de calor, o bien una resistencia mayor a los sulfatos:

Tipo I: el cemento común de usos múltiples empleado en trabajos de construcción en general.

Tipo II: un cemento modificado que tiene menor calor de hidratación que el Tipo I y puede resistir alguna exposición al ataque de los sulfatos.

Tipo III: un cemento de fraguado rápido que produce en las primeras 24 horas un concreto con una resistencia aproximadamente del doble que la del cemento tipo I. Este cemento produce calor de hidratación muy alto.

Tipo IV: un cemento de bajo calor que produce un concreto que disipa muy lentamente el calor. Se usa en estructuras de concreto de gran tamaño.

Tipo V: un cemento usado para concretos que van a estar expuestos a altas concentraciones de sulfatos.

Si el tipo requerido de cemento no está disponible en el mercado, pueden adquirirse varios aditivos con los que las propiedades del cemento Tipo I se modifican para producir las características deseadas.

1.10 ADITIVOS

Los materiales que se agregan al concreto durante o antes del mezclado se denominan aditivos. Se usan para mejorar el desempeño del concreto en ciertas situaciones, así como para disminuir su costo. Hay un dicho bastante conocido relacionado con los aditivos, que dice que “son para el concreto lo que los artículos de belleza son para el pueblo”. Varios de los tipos más comunes de aditivos se dan en la siguiente lista y se describen brevemente.

1. Los *aditivos inclusivos de aire*, que cumplen con los requisitos C260 y C618 de la ASTM, se usan principalmente para incrementar la resistencia del concreto al congelamiento y derretimiento; proporcionan mejor resistencia a la acción de deterioro de las sales descongelantes. Los agentes inclusivos de aire ocasionan la formación de espuma en el agua de mezclado, resultando billones de burbujas de aire estrechamente espaciadas que se incorporan en el concreto. Cuando el concreto se congela, el agua penetra en las burbujas de aire, aliviando la presión sobre el concreto. Cuando el concreto se descongela, el agua puede salir de las burbujas gracias a lo cual se da un menor agrietamiento al que se hubiera dado sin usar el aire atrapado.
2. La adición de *aditivos acelerantes*, como el cloruro de calcio, acelera en el concreto el desarrollo de su temprana resistencia. Los resultados de tales adiciones (particularmente útiles en climas fríos) son los tiempos reducidos requeridos para el curado y protección del concreto, así como

el pronto retiro de la cimbra. (La sección 3.6.3 del código ACI establece que debido a problemas de corrosión, el cloruro de calcio no debe agregarse a concretos con aluminio ahogado, ni a concretos colados en cimbras de acero galvanizado permanente, ni a concretos presforzados.) Hay otros aditivos aceleradores que pueden usarse, entre éstos se incluyen varias sales solubles y otros compuestos orgánicos.

3. Los *aditivos retardadores* se usan para retardar tanto el fraguado del concreto como los aumentos de temperatura. Consisten en varios ácidos o azúcares, o derivados del azúcar. Algunos conductores de camiones de concreto llevan consigo sacos de azúcar para añadirla al concreto en caso de ser demorados por el tránsito u otra circunstancia. Los aditivos retardadores son particularmente útiles para grandes colados donde pueden presentarse notables incrementos de temperatura. También prolongan la plasticidad del concreto, permitiendo mejorar el mezclado o adherencia entre colados sucesivos. Los retardadores también pueden desacelerar la hidratación del cemento en superficies de concreto expuestas o superficies cimbradas para producir acabados atractivos con agregado aparente.
4. Los *superplastificantes* son aditivos hechos a partir de sulfonatos orgánicos. Su uso permite a los ingenieros reducir considerablemente el contenido de agua en los concretos y al mismo tiempo incrementar sus revenimientos. Aunque los superplastificantes también pueden usarse para mantener proporciones de agua-cemento constantes usando menos cemento, son más comúnmente usados para producir concretos manejables con resistencias considerablemente superiores, aunque se use la misma cantidad de cemento. (Véase la sección 1.13.) Un producto relativamente nuevo, el concreto autoconsolidante, utiliza superplastificantes y modificaciones en las proporciones de las mezclas para producir una mezcla muy manejable que no requiere vibración, aun para las situaciones de colocación más congestionadas.
5. Usualmente, *materiales impermeables al agua* se aplican a las superficies endurecidas de concreto, pero pueden agregarse también a las mezclas de concreto. Estos aditivos consisten generalmente en algún tipo de jabón o de algunos productos derivados del petróleo, como por ejemplo las emulsiones asfálticas. Pueden ayudar a retardar la penetración del agua en los concretos porosos, pero probablemente no ayudan mucho a los concretos densos, bien curados.

1.11 PROPIEDADES DEL CONCRETO REFORZADO

Es necesario que el estudiante posea un amplio conocimiento de las propiedades del concreto antes de que empiece a diseñar estructuras de concreto reforzado. En esta sección se presenta una introducción a varias de esas propiedades.

Resistencia a la compresión

La resistencia a la compresión del concreto f'_c se determina por medio de pruebas a la falla de cilindros de concreto de 6 plg × 12 plg de diámetro de 28 días a una velocidad especificada de carga (primero se permitieron cilindros de 4 plg × 8 plg de diámetro en el código 2008 en lugar de los cilindros más grandes). Durante el periodo de 28 días los cilindros suelen mantenerse sumergidos en agua o en un local con temperatura constante y humedad de 100%. Aunque existen concretos con resistencias últimas a los 28 días que van de 2 500 lb/plg^2 hasta 10 000 a 20 000 lb/plg^2, la mayoría de los concretos usados en la práctica tienen una resistencia de entre 3 000 y 7 000 lb/plg^2. Para aplicaciones comunes se usan concretos de 3 000 y 4 000 lb/plg^2, mientras que en la construcción presforzada se emplean los de 5 000 y 6 000 lb/plg^2. Para ciertas aplicaciones, como en columnas de pisos inferiores de edificios altos, se han utilizado concretos con resistencia de hasta 9 000 o 10 000 lb/plg^2 que son suministrados por empresas de concreto premezclado. Como consecuencia, el uso de estos concretos de alta resistencia se hace cada vez más común. En la Two Union Square en Seattle, se usaron concretos con resistencias de hasta 19 000 lb/plg^2.

Los valores obtenidos para la resistencia a compresión de concretos, tal como se determinaron en pruebas, dependen en gran medida de los tamaños y formas de los especímenes de prueba y de la manera

en que éstos son cargados. En muchos países, los especímenes de prueba son cubos de 200 mm (7.87 plg) por lado. Para los mismos lotes de concreto, la prueba de cilindros 6 plg por 12 plg proporciona resistencias a compresión de sólo aproximadamente 80% de los valores en lb/plg^2 obtenidos con los cubos.

Es posible pasar de un concreto de 3 000 lb/plg^2 a otro de 5 000 lb/plg^2 sin que se requiera una cantidad excesiva de trabajo o de cemento adicional. El aumento en el costo aproximado para tal incremento de resistencia es 15 a 20%. Sin embargo, para fabricar un concreto con resistencia superior a 5 000 lb/plg^2 o 6 000 lb/plg^2 se requiere un diseño muy cuidadoso de la mezcla y prestar considerable atención al mezclado, colado y curado. Estos requisitos ocasionan un incremento relativamente mayor en el costo.

En este texto se hacen diversos comentarios respecto a los costos relativos que se obtienen al usar deferentes resistencias del concreto en distintas aplicaciones, tales como vigas, columnas, zapatas y miembros presforzados.

Para asegurar que la resistencia a la compresión del concreto en la estructura es al menos tan fuerte como el valor especificado, f_c', el diseño de la mezcla de concreto debe apuntar a un valor superior, f_{cr}'. La sección 5.3 del código ACI requiere que las resistencias de compresión del concreto usadas como base para seleccionar las proporciones del concreto deben exceder las resistencias de 28 días especificadas por valores bastante más grandes. Para las instalaciones de producción de concreto que tengan suficientes registros de pruebas de resistencia de campo como para permitirles calcular desviaciones estándar satisfactorias (como se describe en la sección 5.3.1.1 del ACI), en la tabla 5.3.2.1 del ACI se especifica un conjunto de resistencias a la compresión promedio requeridas (f_{cr}') para utilizarse como la base para seleccionar las propiedades del concreto. Para las instalaciones que no tengan suficientes registros para calcular desviaciones estándar satisfactorias, la tabla 5.3.2.2 del ACI provee incrementos en la resistencia a la compresión de diseño requerida (f_{cr}') de 1 000 lb/plg^2 para una resistencia especificada del concreto (f_c') de menos de 3 000 lb/plg^2 e incrementos muy superiores para concretos con f_c' superiores.

Las curvas de esfuerzo-deformación unitaria de la figura 1.1 representan los resultados obtenidos en pruebas de compresión en cilindros estándares de resistencias variables a los 28 días. Deben estudiarse cuidadosamente estas curvas, ya que muestran varios puntos importantes:

a) Las curvas son aproximadamente rectas, mientras la carga crece de cero a poco más o menos de un tercio a un medio de la resistencia última del concreto.

b) Más allá de este intervalo, el comportamiento del concreto es no lineal. La falta de linealidad de las curvas esfuerzo-deformación unitaria del concreto a esfuerzos mayores ocasiona algunos problemas en el análisis estructural de las estructuras de concreto porque el comportamiento de éstas tampoco es lineal bajo esfuerzos mayores.

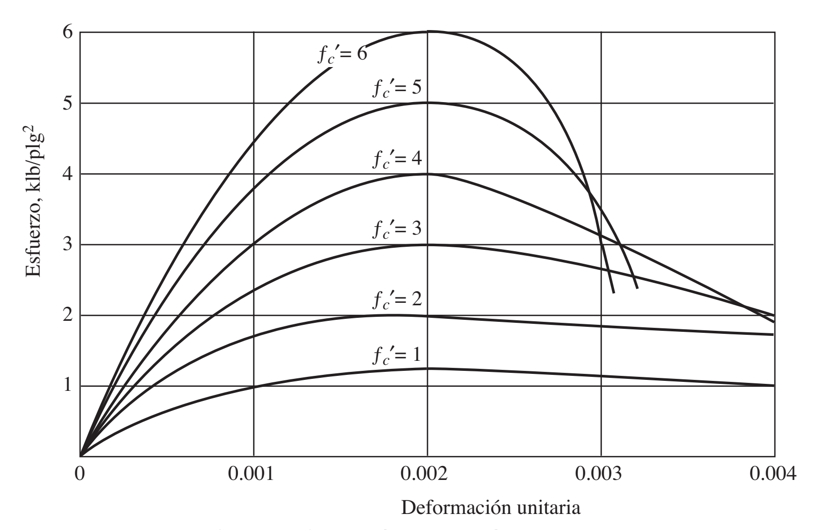


Figura 1.1 Curva esfuerzo-deformación unitaria típica del concreto, con carga de corto plazo.

c) Es de particular importancia el hecho de que todos los concretos, independientemente de sus resistencias, alcanzan sus resistencias últimas bajo deformaciones unitarias de aproximadamente 0.002.

d) El concreto no tiene una resistencia a la fluencia plástica definida; más bien, las curvas se comportan suavemente hasta sus puntos de ruptura bajo deformaciones unitarias de entre 0.003 y 0.004. Para fines de cálculos futuros en este texto, se supondrá que el concreto falla a 0.003 (ACI 10.2.3). *El lector debe observar que este valor, el cual es conservador para concretos de resistencia normal, puede no ser conservador para concretos de resistencia superior, es decir, en el intervalo de 8 000 lb/plg^2 y mayores*. El código europeo usa un valor diferente para la deformación unitaria a compresión última para columnas (0.002) que para vigas y columnas con carga excéntrica (0.0035).[12]

e) Muchas pruebas han mostrado claramente que las curvas esfuerzo-deformación unitaria de los cilindros de concreto son casi idénticas con las obtenidas en los lados de compresión de vigas.

f) Debe observarse además que los concretos de bajo grado son menos frágiles que los de grado alto, o sea, que mostrarán deformaciones unitarias mayores antes de romperse.

Módulo estático de elasticidad

El concreto no tiene un módulo de elasticidad bien definido. Su valor varía con las diferentes resistencias del concreto, con la edad de éste, con el tipo de carga, las características y proporciones del cemento y los agregados. Además, hay varias definiciones diferentes del módulo:

a) El *módulo inicial* es la pendiente del diagrama de esfuerzo-deformación en el origen de la curva.

b) El *módulo por tangente* es la pendiente de una tangente a la curva en algún punto de ésta, por ejemplo, en 50% de la resistencia última del concreto.

c) A la pendiente de una línea trazada del origen a un punto en la curva entre 25 y 50% de su resistencia última a compresión, se le llama *módulo por secante*.

d) Otro módulo, llamado *módulo aparente* o *módulo a largo plazo*, se determina usando los esfuerzos y deformaciones unitarias obtenidas después de que la carga se ha aplicado durante cierto periodo.

La sección 8.5.1 del código ACI establece que la siguiente expresión puede usarse para calcular el módulo de elasticidad de concretos que pesen entre 90 y 155 lb/pie^3:

$$E_c = w_c^{1.5} 33\sqrt{f'_c}$$

En esta expresión, E_c es el módulo de elasticidad en lb/plg^2, w_c es el peso del concreto en libras por pie cúbico y f'_c es su resistencia a la compresión especificada a los 28 días en lb/plg^2. Éste es en realidad un módulo por secante con la línea (cuya pendiente es igual al módulo) trazada del origen a un punto sobre la curva esfuerzo-deformación que corresponde aproximadamente al esfuerzo (0.45 f'_c) que se tendría bajo las cargas muertas y vivas estimadas que la estructura debe soportar.

Para concreto de peso normal que pesa aproximadamente 145 lb/pie^3, el código ACI establece que la siguiente versión simplificada de la expresión anterior se puede usar para determinar el módulo:

$$E_c = 57\,000\sqrt{f'_c}$$

[12] MacGregor, J.G. y Wight, J.K., *Reinforced Concrete Mechanics and Design*, 4a. ed. (Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice-Hall) pág. 111.

La tabla A.1 (véase el apéndice al final del libro) muestra valores de E_c para concretos de diferentes resistencias. Estos valores se calcularon con la primera de las fórmulas precedentes, suponiendo un concreto de 145 lb/pie^3.

En unidades SI, $E_c = w_c^{1.5}(0.043)\sqrt{f'_c}$ con w_c variando entre 1 500 y 2 500 kg/m^3 y con f'_c en N/mm^2 o MPa (megapascales). Si se usa piedra triturada normal o grava para el concreto (con una masa aproximadamente de 2 320 kg/m^3), $E_c = 4\,700\sqrt{f'_c}$. La tabla B.1 del apéndice B de este texto proporciona valores de módulos para varios concretos de diferentes resistencias.

El término *peso unitario* es constantemente usado por los ingenieros estructurales que trabajan con las unidades que se usan en Estados Unidos. Sin embargo, al usar el sistema SI, este término debe remplazarse por el término *densidad de masa*. Un kilogramo no es una unidad de fuerza y sólo indica la cantidad de materia en un objeto. La masa de un objeto particular es la misma en cualquier parte de la Tierra, mientras que el peso de un objeto en nuestras unidades usuales varía dependiendo de la altitud, debido al cambio en el valor de la aceleración gravitacional.

Los concretos con resistencias superiores a 6 000 lb/plg^2 son designados concretos de alta resistencia. Las pruebas han indicado que las ecuaciones usuales del ACI para E_c al aplicarse a concretos de alta resistencia dan valores muy grandes. Con base en estudios en la Universidad de Cornell, la siguiente expresión ha sido recomendada para concretos de peso normal con valores f'_c mayores que 6 000 lb/plg^2 y de hasta 12 000 lb/plg^2 y para concretos de peso ligero con f'_c mayores que 6 000 lb/plg^2 y de hasta 9 000 lb/plg^2.[13, 14]

$$E_c \text{lb/plg}^2 = [40\,000\sqrt{f'_c} + 10^6]\left(\frac{w_c}{145}\right)^{1.5}$$

En unidades SI con f'_c en MPa y w_c en kg/m^3, esta expresión toma la forma:

$$E_c(\text{MPa}) = [3.32\sqrt{f'_c} + 6\,895]\left(\frac{w_c}{2\,320}\right)^{1.5}$$

Módulo de elasticidad dinámico

El módulo de elasticidad dinámico, que corresponde a deformaciones unitarias instantáneas muy pequeñas, se obtiene usualmente por medio de pruebas sónicas. Es entre 20 y 40% mayor que el módulo estático y es aproximadamente igual al módulo inicial. Cuando las estructuras se analizan por cargas sísmicas o de impacto, el uso del módulo dinámico parece ser apropiado.

Módulo de Poisson

Al someter un cilindro de concreto a cargas de compresión, éste no sólo se acorta a lo largo, sino que también se expande lateralmente. La proporción de esta expansión lateral respecto al acortamiento longitudinal se denomina *módulo de Poisson*. Su valor varía de aproximadamente 0.11 para concretos de alta resistencia hasta 0.21 para concretos de bajo grado, con un valor promedio de aproximadamente 0.16. No parece haber ninguna relación directa entre el valor de esta proporción y la relación agua-cemento, cantidad de curado, tamaño del agregado, etcétera.

En la mayoría de los diseños de concreto reforzado, no se le da ninguna consideración al llamado efecto Poisson. Sin embargo, tal vez tenga que ser considerado en el análisis y diseño de presas de arco,

[13] Nawy, E.G., 2006, *Prestressed Concrete: A Fundamental Approach*, 5a. ed. (Upper Saddle River, Nueva Jersey: Prentice-Hall), pág. 38.
[14] Carrasquillol, R., Nilson, A. y Slate, F., 1981, "Properties of High-strength Concrete Subject to Short-term Loads". *J. ACI Proceedings*, 78(3), mayo-junio.



Cubierta acústica con forma de concha de concreto reforzado en Portage, Michigan.
(Cortesía de Veneklasen Concrete Construction Co.)

de túneles y de algunas otras estructuras estáticamente indeterminadas. La espiral de refuerzo en las columnas aprovecha el módulo de Poisson y esto se estudiará en el capítulo 9.

Contracción

Cuando los materiales del concreto se mezclan, la pasta consistente en cemento y agua llena los vacíos entre los agregados y los amalgama. Esta mezcla necesita ser suficientemente manejable o fluida de modo que pueda fluir entre las varillas de refuerzo y entre la cimbra. Para lograr la fluidez requerida se usa considerablemente más agua (quizás el doble) que la necesaria para que el cemento y el agua reaccionen químicamente (*hidratación*).

Después de que el concreto se ha curado y comienza a secarse, el agua adicional que se usó en el mezclado empieza a aflorar en la superficie, donde se evapora. Como consecuencia, el concreto se contrae y se agrieta. Las grietas resultantes pueden reducir la resistencia a cortante de los miembros y pueden dañar el aspecto de la estructura. Además, las grietas permiten que el refuerzo quede expuesto a la atmósfera, o a productos químicos tales como descongeladores, aumentando por consiguiente la posibilidad de corrosión. La contracción continúa durante muchos años, pero bajo condiciones comunes probablemente 90% se da durante el primer año. La cantidad de humedad que se pierde varía con la distancia a la superficie. Además, cuanto mayor es el área superficial de un miembro en proporción a su volumen, mayor es la contracción; es decir, los miembros con secciones transversales pequeñas se contraen más que aquellos con secciones transversales grandes.

La cantidad de contracción depende mucho del tipo de exposición. Por ejemplo, si el concreto se ve sometido a mucho viento durante el curado, su contracción será mayor. Igualmente, una atmósfera húmeda implica menos contracción, mientras que una seca implica mayor contracción.

También debe considerarse que es conveniente usar agregados de baja absorción, como el granito y muchas piedras calizas. Cuando se usan ciertas pizarras y areniscas absorbentes, el resultado puede ser 1½ o aún 2 veces la contracción que resulta con otros agregados.

Para minimizar la contracción es deseable: 1) mantener en un mínimo la cantidad de agua para mezclado; 2) curar bien el concreto; 3) colar el concreto para muros, pisos y otros elementos constructivos grandes en secciones pequeñas (lo que permite que parte de la contracción ocurra antes de colar

la siguiente sección); 4) intercalar juntas constructivas para controlar la posición de las grietas; 5) usar refuerzo por contracción y 6) emplear agregados apropiadamente densos y no porosos.[15]

Fluencia plástica (o cedencia)

Bajo cargas de compresión sostenidas, el concreto continuará deformándose durante largos periodos. Después de que ocurre la deformación inicial, la deformación adicional se llama *cedencia* o *fluencia plástica*. Si se aplica una carga de compresión a un miembro de concreto, se presenta un acortamiento inmediato o instantáneo elástico. Si la carga se deja en su lugar por mucho tiempo, el miembro continuará acortándose durante varios años y la deformación final usualmente será igual a aproximadamente dos o tres veces la deformación inicial. Veremos en el capítulo 6 que esto implica que las deflexiones a largo plazo también pueden ser iguales a dos o tres veces las deflexiones iniciales. Quizás 75% de la fluencia plástica total ocurrirá durante el primer año.

Si la carga a largo plazo se retira, el miembro recobrará la mayor parte de su deformación elástica y algo de su deformación plástica. Si la carga vuelve a actuar, tanto la deformación elástica como la plástica se desarrollarán nuevamente.

La magnitud del flujo plástico depende mucho de la magnitud de los esfuerzos presentes. Es casi directamente proporcional al esfuerzo mientras el esfuerzo sostenido no sea mayor que aproximadamente la mitad de f'_c. Más allá de este valor, la cedencia crece rápidamente.

Las cargas a largo plazo no sólo generan fluencia plástica, sino que también influyen adversamente en la resistencia del concreto. Para cargas sostenidas en especímenes cargados concéntricamente por un año o más, puede darse una reducción de la resistencia de aproximadamente 15 a 25%. *Así, un miembro cargado con una carga sostenida de, digamos, 85% de su resistencia última a la compresión, f'_c puede ser satisfactoria por un cierto tiempo, pero puede fallar después*.[16]

Otros factores que afectan la magnitud de la fluencia plástica son:

1. Cuanto mayor sea el tiempo de curado previo a la aplicación de las cargas, menor será la fluencia plástica. El curado a vapor, que acelera la adquisición de resistencia, reduce también la fluencia plástica.

2. Los concretos de alta resistencia manifiestan una menor fluencia plástica que los de baja resistencia, para esfuerzos de la misma intensidad. Sin embargo, los esfuerzos aplicados en concretos de alta resistencia son muy probablemente mayores que los aplicados en concretos de baja resistencia y este hecho tiende a causar un incremento de la fluencia plástica.

3. La fluencia plástica aumenta con la temperatura. Alcanza su valor máximo cuando el concreto está entre 150 y 160 °F.

4. A mayor humedad, menor será el agua de poro libre que pueda escapar del concreto. La fluencia plástica adquiere un valor casi del doble a 50% de humedad que a 100%. Obviamente es muy difícil distinguir entre la contracción y la fluencia plástica.

5. Los concretos con el mayor porcentaje de pasta cemento-agua tienen la mayor fluencia plástica porque es la pasta y no los agregados, la que fluye plásticamente. Esto es particularmente cierto si se usa como agregado piedra caliza.

6. Obviamente, la adición de refuerzo en las zonas de compresión del concreto reduce mucho la fluencia plástica, ya que el acero manifiesta muy poca fluencia plástica bajo esfuerzos ordinarios. Conforme ocurre la fluencia plástica en el concreto, el refuerzo tiende a impedirlo y a tomar cada vez más parte de la carga.

7. Los miembros grandes de concreto (es decir, aquellos con relaciones grandes de volumen a área superficial) fluirán proporcionalmente menos que los miembros delgados más pequeños donde el agua libre tiene distancias menores que recorrer para escapar.

---

[15] Leet, K., 1991, *Reinforced Concrete Design*, 2a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill), pág. 35.
[16] Rüsch, H., 1960, “Researches Toward a General Flexure Theory for Structural Concrete”, *Journal ACI*, 57(1), págs. 1-28.

Resistencia a la tensión

La resistencia a la tensión del concreto varía de aproximadamente 8 a 15% de su resistencia a la compresión. Una razón principal para esta baja resistencia, es que el concreto contiene un gran número de grietas muy finas. Las grietas tienen poca importancia cuando el concreto está sometido a cargas de compresión, porque éstas ocasionan que las grietas se cierren y permitan entonces la transmisión de la compresión. Obviamente, éste no es el caso para cargas de tensión.

Aunque la resistencia a la tensión normalmente se desprecia en los cálculos de diseño, es sin embargo, una propiedad importante que afecta el tamaño y extensión de las grietas que se presentan. Además, la resistencia a la tensión de los miembros de concreto tiene un efecto definitivo de reducción en sus deflexiones. (Debido a la pequeña resistencia a la tensión del concreto, muy poco esfuerzo se ha hecho para determinar su módulo de elasticidad en tensión. Sin embargo, con base en esta información limitada, parece ser que su valor es igual a su módulo de compresión.)

Usted podría preguntarse por qué no se supone que el concreto resiste una parte de la tensión en un miembro a flexión y el acero el resto. La razón es que el concreto se agrieta bajo deformaciones unitarias de tensión tan pequeñas que los esfuerzos tan bajos en el acero hasta ese momento, harían su uso antieconómico. Una vez que las grietas por tensión se han presentado, al concreto ya no le queda más resistencia a la tensión.

La resistencia a la tensión del concreto no varía en proporción directa a su resistencia última f'_c a compresión. Sin embargo, varía aproximadamente en proporción a la raíz cuadrada de f'_c. Esta resistencia es muy difícil de medir bajo cargas axiales directas de tensión debido al problema de agarre en los especímenes de prueba, para evitar concentraciones de esfuerzo, y debido también a la dificultad de alinear las cargas. Como resultado de estos problemas, se han desarrollado dos pruebas más bien indirectas para medir la resistencia a tensión del concreto. Éstas son la *prueba del módulo de ruptura* y la *prueba radial de cilindro*.

La resistencia a la tensión del concreto en flexión es muy importante al considerar grietas y deflexiones en vigas. Para estas consideraciones se han usado por mucho tiempo las resistencias a tensión obtenidas con el módulo de ruptura. El módulo de ruptura (que se define como la resistencia a la tensión por flexión del concreto) usualmente se mide al cargar una viga rectangular de concreto simple (o sea sin refuerzo) de 6 plg × 6 plg × 30 plg (con apoyos simples a 24 plg entre centros) a la falla con cargas concentradas iguales en los tercios del claro, de acuerdo con el método ASTM C78-2002.[17] La carga se incrementa hasta que ocurre la falla por agrietamiento en la cara de tensión de la viga. El módulo de ruptura f_r se determina entonces con la fórmula de la flexión. En las siguientes expresiones, b es el ancho de la viga, h el peralte y M es $PL/6$ que es el momento máximo calculado:

$$f_r = \frac{Mc}{I} = \frac{M\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{1}{12}bh^3}$$

$$f_r = \text{módulo de ruptura} = \frac{6M}{bh^2} = PL/bh^2$$

El esfuerzo determinado de esta manera no es muy exacto porque al usar la fórmula de la flexión estamos suponiendo que los esfuerzos en el concreto varían en proporción directa a las distancias del eje neutro. Estas suposiciones no son muy buenas.

Con base en cientos de pruebas, el código (sección 9.5.2.3) proporciona un módulo de ruptura f_r igual a $7.5\lambda\sqrt{f'_c}$ en donde f_r y f'_c están en unidades de lb/plg^2. El término λ reduce el módulo de ruptura cuando se usan agregados ligeros (véase la sección 1.12).

La resistencia a la tensión del concreto también se puede medir por medio de la prueba radial.[18] Se coloca un cilindro acostado en la máquina de prueba y se le aplica una carga de compresión uniforme

---

[17]American Society for Testing and Materials, 2002, *Standard Test Method for Flexural Strength of Concrete (Using Simple Beam with Third-Point Loading)* ASTM C78 2002, West Conshohocken, PA.

[18]American Society for Testing and Materials, 2004, *Standard Method of Test for Splitting Tensile Strength of Cylindrical Concrete Specimens* (ASTM C496-2004), West Conshohocken, PA.

*En unidades SI, $f_r = 0.7\sqrt{f_c}$ MPa.

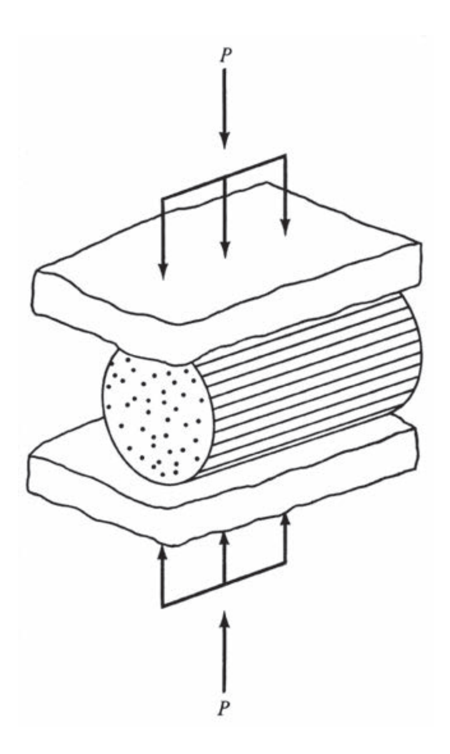


Figura 1.2 Prueba radial.

a lo largo de la longitud del cilindro, que está apoyado a todo lo largo de la base (véase la figura 1.2). El cilindro se fracturará a la mitad de extremo a extremo cuando se alcance su resistencia a la tensión. El esfuerzo de tensión en que ocurre la rotura se denomina *resistencia radial del cilindro* y puede calcularse con la siguiente expresión, en la cual P es la fuerza máxima de compresión, L es la longitud y D es el diámetro del cilindro:

$$f_t = \frac{2P}{\pi LD}$$

Aun cuando se usan almohadillas bajo las cargas, ocurren algunas concentraciones locales de esfuerzos durante las pruebas. Además, algunos esfuerzos se desarrollan perpendicularmente a los esfuerzos de tensión. Como consecuencia, las resistencias a la tensión obtenidas no son muy exactas.

Resistencia al corte

Es sumamente difícil obtener en pruebas de laboratorio fallas por cortante puro que no estén afectadas por otros esfuerzos. Como consecuencia, las pruebas para resistencia por cortante del concreto han dado, durante muchos años, valores que varían entre un tercio y cuatro quintos de las resistencias últimas a la compresión. Usted aprenderá en el capítulo 8, que no debe preocuparse por estas pruebas inconsistentes de resistencia al corte, porque las aproximaciones del diseño se basan en suposiciones muy conservadoras de la resistencia al corte.

1.12 AGREGADOS

Los agregados que se usan en concreto ocupan aproximadamente tres cuartas partes del volumen del concreto. Como son menos caros que el cemento, es deseable usar la mayor cantidad de ellos que sea posible. Se emplean tanto agregados finos (usualmente arena) como gruesos (usualmente grava o piedra triturada). Cualquier agregado que pasa la malla No. 4 (malla con alambres separados ¼ plg entre sí en ambas direcciones) se considera agregado fino. El material de mayor tamaño es agregado grueso.

Los tamaños máximos de los agregados que pueden usarse en concreto reforzado están especificados en la sección 3.3.2 del código ACI. *Estos valores límites son los siguientes: un quinto de la*

dimensión más corta entre los lados de la cimbra, un tercio del espesor de las losas, o tres cuartos de la separación libre mínima entre las varillas de refuerzo. Pueden usarse tamaños mayores si, de acuerdo con el juicio del ingeniero, la manejabilidad del concreto y su método de consolidación son tales que el agregado en uso no ocasionará la formación de vacíos o de una estructura alveolar.

Los agregados deben ser fuertes, durables y limpios. Si se encuentran en ellos polvo u otras partículas, pueden interferir en la adherencia entre la pasta de cemento y los agregados. La resistencia de los agregados tiene un efecto importante en la resistencia del concreto y las propiedades de los agregados afectan considerablemente la durabilidad del concreto.

Los concretos con resistencias a los 28 días iguales o mayores que 2 500 lb/plg^2 y pesos secos al aire iguales o menores que 115 lb/pie^3, se denominan concretos estructurales de peso ligero. Los agregados usados para estos concretos están hechos con pizarras expandidas de origen volcánico, arcillas cocidas o escorias. Cuando se usan materiales de peso ligero, tanto para los agregados finos como para los agregados gruesos, el concreto resultante se denomina de *peso ligero global*. Si se usa arena para el agregado fino y el agregado grueso se remplaza con agregado de peso ligero, el concreto resultante se denomina *de arena y peso ligero*. Los concretos hechos con agregados de peso ligero no son tan durables o robustos como los hechos con agregados de peso normal.

Algunas de las propiedades estructurales del concreto son afectadas por el uso de agregados ligeros. El código ACI 318-08, sección 8.4 requiere que el módulo de ruptura sea disminuido por la introducción del término λ en la ecuación

$$f_r = 7.5\lambda\sqrt{f'_c} \qquad \text{(Ecuación ACI 9-10)}$$

o, en unidades SI con f'_c en N/mm^2, $f_r = 0.7\lambda\sqrt{f'_c}$

El valor de λ depende del agregado que se remplazó con material ligero. Si sólo se remplaza el agregado grueso (concreto de arena y peso ligero), λ vale 0.85. Si la arena también se remplaza con material ligero (concreto de peso ligero global), λ vale 0.75. La interpolación lineal está permitida entre los valores de 0.85 y 1.0, así como también de 0.75 a 0.85 cuando se usa el remplazo parcial con material ligero. Alternativamente, si se especifica la resistencia a la tensión radial promedio del concreto ligero, f_{ct}, en la sección 8.6.1 del código ACI 318-08 se define a λ como

$$\lambda = \frac{f_{ct}}{6.7\sqrt{f'_c}} \leq 1.0$$

Para concreto de peso normal y para concreto que tiene agregado fino de peso normal y una mezcla de agregado ligero y agregado grueso de peso normal, λ = 1.0. El uso de concreto con agregado ligero puede afectar las deflexiones en las vigas, la resistencia al corte, el coeficiente de fricción, las longitudes de desarrollo de las varillas de refuerzo, de los ganchos y el diseño del concreto presforzado.

1.13 CONCRETOS DE ALTA RESISTENCIA

A los concretos cuyas resistencias a compresión exceden de 6 000 lb/plg^2 se les llama *concretos de alta resistencia*. También se les llama *concretos de alto desempeño* porque tienen otras características excelentes además de su alta resistencia. Por ejemplo, la permeabilidad baja de tales concretos los hace muy durables con respecto a los diferentes agentes físicos y químicos que actúan sobre ellos y pueden ocasionar que el material se deteriore.

Hasta hace unas cuantas décadas, los ingenieros estructurales consideraban que las compañías de premezclado no podían entregar concretos con resistencias a compresión mucho mayores que 4 000 lb/plg^2 o 5 000 lb/plg^2. Sin embargo, actualmente éste no es el caso, ya que estas mismas compañías puedan entregar ahora concretos con resistencias a compresión de hasta por lo menos 9 000 lb/plg^2. Se han

usado aun concretos más resistentes. En Two Union Square en Seattle se obtuvieron resistencias de hasta 19 000 lb/plg^2 usando concreto premezclado entregado en el sitio de la construcción. Además, se han producido concretos en laboratorios con resistencias mayores a 20 000 lb/plg^2. Estos concretos deberían tal vez designarse como *concretos de súper alta resistencia* o *concretos de súper alto desempeño*.

Si vamos a usar una pasta de cemento de muy alta resistencia, no olvidemos usar un agregado grueso que sea igualmente de muy alta resistencia. Si la resistencia planeada para el concreto es, digamos de 15 000 lb/plg^2 a 20 000 lb/plg^2, debe usarse un agregado igualmente resistente y es posible que tal agregado no se encuentre disponible a distancias razonables. Además de la resistencia necesaria para el agregado grueso, sus tamaños deben estar bien graduados y sus superficies deben ser rugosas para poder obtener una mejor adherencia con la pasta de cemento. Sin embargo, las superficies rugosas de los agregados pueden disminuir la trabajabilidad del concreto.

Desde un punto de vista económico debe ser claro que si bien los concretos con resistencias de entre 12 000 lb/plg^2 y 15 000 lb/plg^2 cuestan aproximadamente 3 veces tanto como producir concretos de 3 000 lb/plg^2, sus resistencias a compresión son 4 o 5 veces mayores.

Los concretos de alta resistencia son a veces usados para miembros precolados y presforzados. Ellos son particularmente útiles en la industria del precolado donde su resistencia nos permite producir miembros más pequeños y ligeros, con los consiguientes ahorros en los costos de almacenamiento, manipulación, envío y montaje. Además, ellos se han usado en estructuras fuera de la costa, pero su uso común ha sido en columnas de edificios altos de concreto reforzado, probablemente con 25 o 30 pisos de altura, en donde las cargas en las columnas son muy grandes, digamos de 1 000 klb o más. En realidad, para tales edificios las columnas para los pisos superiores, donde las cargas son relativamente pequeñas, son probablemente construidas con concretos convencionales de 4 000 lb/plg^2 o 5 000 lb/plg^2, mientras que se usan concretos de alta resistencia para las columnas inferiores fuertemente cargadas. Si se usaran concretos convencionales para estas columnas inferiores, las columnas resultarían muy grandes y ocuparían una cantidad excesiva de espacio de piso rentable. Los concretos de alta resistencia tienen también ventajas en la construcción de muros cortantes. (Los muros cortantes se estudiarán en el capítulo 18.)

Para producir concretos con resistencias superiores a 6 000 lb/plg^2, primero es necesario ejercer un control de calidad más estricto del trabajo y tener un cuidado especial en la selección de los materiales por usarse. El aumento de la resistencia puede lograrse usando proporciones menores de agua-cemento, agregando aditivos y seleccionando agregados limpios y sólidos. Las resistencias reales del concreto usadas por el diseñador para un trabajo específico dependerán del tamaño de las cargas y de la calidad de los agregados disponibles.

En años recientes se han tenido mejoras apreciables en el colado, vibración y acabado del concreto. Estas mejoras han dado como resultado proporciones menores de agua-cemento y por tanto, resistencias superiores. El factor más importante que afecta la resistencia del concreto es su porosidad, la cual se controla primordialmente por la proporción agua-cemento. Esta proporción debe mantenerse tan pequeña como sea posible siempre que se mantenga una trabajabilidad adecuada. A este respecto hay diversos tipos de aditivos reductores de agua con los que las proporciones pueden reducirse apreciablemente y al mismo tiempo mantener una trabajabilidad adecuada.

Concretos con resistencias de 6 000 lb/plg^2 a 10 000 lb/plg^2 o 12 000 lb/plg^2 se pueden obtener fácilmente si se usan aditivos como gas de sílice y superplastificadores. El gas de sílice, que es más de 90% bióxido de silicio, es un polvo extraordinariamente fino que varía en color de gris claro a gris oscuro e incluso puede ser de color gris azul verdoso. Se obtiene de hornos de arco eléctrico como un subproducto durante la producción de silicio metálico y algunas otras aleaciones de silicio. Se encuentra disponible en polvo y líquido. La cantidad de gas de sílice usado en una mezcla varía de 5 a 30% del peso del cemento.

Las partículas de gas de sílice tienen diámetros aproximadamente 100 veces más pequeños que las partícula de cemento promedio y sus áreas superficiales por unidad de peso son aproximadamente 40 a 60 veces las del cemento portland. Como resultado, ellas conservan más agua. (A propósito, este incremento de área superficial causa la generación de más calor de hidratación.) Las proporciones agua-cemento son menores y las resistencias son mayores. El gas de sílice es una *puzolana*: un material de silicio que por sí mismo no tiene cualidades cementantes, pero que al usarse en mezclas de concreto sus

partículas extraordinariamente finas reaccionan con el hidróxido de calcio del cemento para producir un compuesto cementante. Se tienen muchas puzolanas que se pueden usar satisfactoriamente en el concreto. Dos de las más comunes son la ceniza voladora y el gas de sílice. Aquí veremos sólo el gas de sílice.

Cuando se usa el gas de sílice, éste causa un incremento en la densidad y la resistencia del concreto. Estas mejoras se deben a que las partículas ultrafinas del gas de sílice se dispersan entre las partículas del cemento. Desafortunadamente, esto causa una reducción en la trabajabilidad del concreto y es necesario agregar *superplastificadores* a la mezcla. Los superplastificadores, llamados también *reductores de agua de alto rango*, se agregan a los concretos para aumentar su trabajabilidad. Se hacen tratando formaldehído o naftalina con ácido sulfúrico. Tales materiales usados como aditivos disminuyen la viscosidad o resistencia al flujo del concreto. Como consecuencia, puede usarse menos agua, obteniéndose así menores proporciones agua-cemento y mayores resistencias.

La adición de polímeros orgánicos puede usarse para remplazar una parte del cemento como aglutinante. Un polímero orgánico está compuesto de moléculas que se han formado por la unión de miles de moléculas. Los polímeros más comúnmente usados en el concreto son los látex. Tales aditivos mejoran la resistencia, durabilidad y adhesión del concreto. Además, los concretos resultantes tienen excelente resistencia a la abrasión, congelamiento, deshielo e impacto.

Otro procedimiento que puede incrementar la resistencia del concreto es la *consolidación*. Cuando productos de concreto precolado son consolidados, el agua y el aire en exceso son expulsados, produciéndose así concretos con contenidos óptimos de aire. De manera similar, las fuerzas centrífugas causadas por la centrifugación de los tubos de concreto durante su manufactura consolidan el concreto y reducen los contenidos de agua y aire. No se ha hecho mucho trabajo en el área de consolidación para el concreto colado en el sitio debido a la dificultad de aplicar las fuerzas de expulsión. Para comprimir tales concretos es necesario aplicar presión a la cimbra. Puede verse que una mayor dificultad en lograr esto es que debe tenerse un cuidado especial para prevenir la distorsión de los miembros con el concreto aún húmedo.

1.14 CONCRETOS REFORZADOS CON FIBRAS

En años recientes ha habido un gran interés en el concreto reforzado con fibras y actualmente se llevan a cabo numerosas investigaciones sobre el tema. Las fibras usadas están hechas de acero, plásticos, vidrio y otros materiales. Varios experimentos han mostrado que la adición de tales fibras en cantidades convenientes (normalmente hasta cerca del 1 o 2% por volumen) a concretos convencionales pueden mejorar apreciablemente sus características.

Las resistencias a la compresión de los concretos reforzados con fibras no son considerablemente mayores que lo que serían si las mismas mezclas se usaran sin fibras. Sin embargo, los concretos resultantes son considerablemente más firmes y tienen mayor resistencia al agrietamiento y al impacto. El uso de fibras ha aumentado la versatilidad del concreto al reducir su fragilidad. El lector debe notar que una varilla de refuerzo proporciona refuerzo sólo en la dirección de la varilla, mientras que las fibras distribuidas de manera aleatoria proporcionan resistencia adicional en todas direcciones.

El acero es el material más comúnmente usado para las fibras. Los concretos resultantes parecen ser muy durables, por lo menos mientras las fibras están cubiertas y protegidas por la pasta de cemento. Los concretos reforzados con fibras de acero son muy usados en pavimentos, cascarones delgados y productos precolados, así como en algunos parches y cubiertas. Las fibras de vidrio se usan con más frecuencia para aplicaciones rociadas como en el concreto lanzado. Es necesario darse cuenta de que el vidrio ordinario se deteriorará al entrar en contacto con la pasta de cemento. Por ello son necesarias las fibras de vidrio resistentes a los álcalis.

Las fibras usadas varían en longitud de aproximadamente ¼ plg a 3 plg mientras que sus diámetros van de aproximadamente 0.01 plg hasta 0.03 plg. Para mejorar la adherencia con la pasta de cemento las fibras pueden tener ganchos o estar retorcidas. Además, las características de la superficie de las fibras pueden ser modificadas químicamente para aumentar la adherencia.

La mejora obtenida en la tenacidad del concreto (la energía total absorbida al romper un miembro en flexión) al agregar fibras depende de la *relación de aspecto* (longitud/diámetro) de las fibras. Típicamente, las relaciones de aspecto usadas varían entre aproximadamente 25 hasta tanto como 150, con 100 como valor promedio. Otros factores que afectan la tenacidad son la forma y la textura de las fibras. La norma ASTM C1018[19] es el método de prueba para determinar la tenacidad del concreto reforzado con fibras usando el método de carga de la viga en los tercios descrito anteriormente.

Cuando se abre una grieta en un miembro de concreto reforzado con fibras, las pocas fibras que salvan la grieta no incrementan apreciablemente la resistencia del concreto. Sin embargo, ellas ofrecen resistencia a la abertura de la grieta debido al considerable trabajo necesario para extraerlas. En consecuencia, la ductilidad y tenacidad del concreto se incrementan. Se ha mostrado que el uso de las fibras incrementa la vida por fatiga de las vigas y disminuye los anchos de las grietas cuando los miembros están sometidos a cargas de fatiga.

El uso de fibras incrementa considerablemente los costos. Ésta ha sido probablemente la razón por la que los concretos reforzados con fibras se han usado más bien para revestimientos tales como pavimentos de autopistas y pistas de aeropuertos, no para proyectos integrales de concreto. En realidad, a largo plazo, si las vidas incrementadas de servicio de los concretos reforzados con fibras son consideradas, ellos podrían resultar económicamente favorables. Por ejemplo, muchos contratistas de hogares residenciales usan concreto reforzado con fibras para construir vías de acceso a garajes en vez de concreto reforzado convencional.

Algunas personas tienen la sensación de que la adición de fibras al concreto reduce su revenimiento y su trabajabilidad así como su resistencia. Aparentemente, se sienten de esa manera porque el concreto se ve más rígido para ellos. En realidad, las fibras no reducen el revenimiento, a menos que la cantidad sea demasiada grande, es decir, muy por encima de alrededor de 1 libra por yarda cúbica. Las fibras sólo parecen causar una reducción en la trabajabilidad, pero como resultado los técnicos que terminan el concreto frecuentemente añaden más agua a fin de incrementar la proporción agua-cemento y disminuir la resistencia. La norma ASTM C1018 utiliza el método de carga de la viga en los tercios para medir la tenacidad y la resistencia a la primera grieta del concreto con fibras reforzadas.

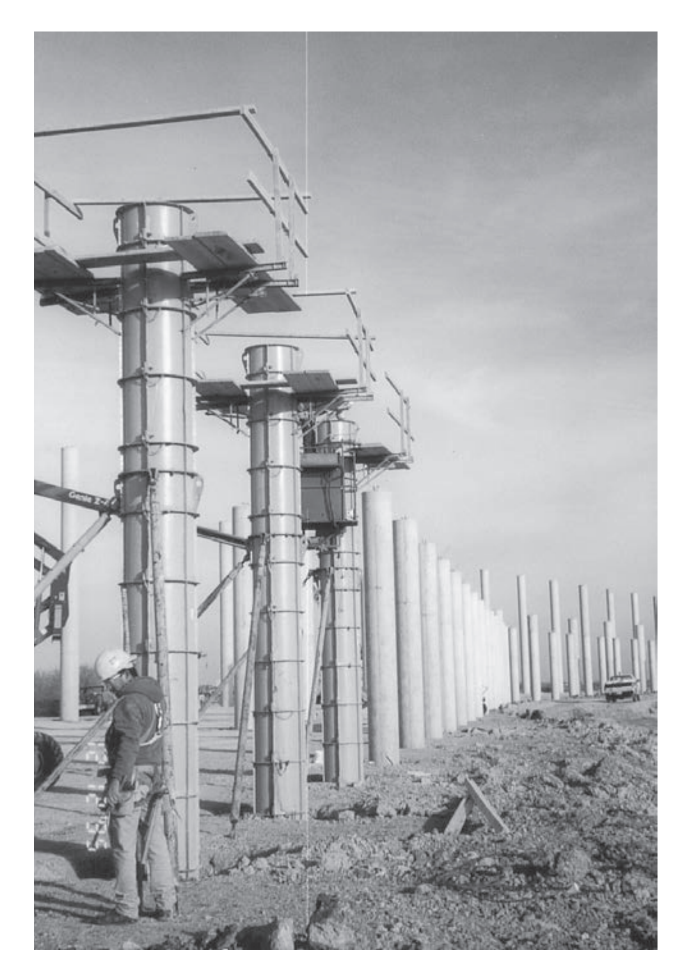
1.15 DURABILIDAD DEL CONCRETO

La resistencia a la compresión del concreto puede ser dictada por la exposición a condiciones de congelamiento-deshielo o a productos químicos tales como descongeladores o sulfatos. Estas condiciones pueden requerir una resistencia a la compresión mayor o una proporción menor de agua-cemento que las requeridas para soportar las cargas calculadas. El capítulo 4 del código 2008 impone límites a la proporción de agua-cemento, al valor de f_c' y a la inclusión de aire para elementos expuestos a ciclos de congela-miento-deshielo. Para el concreto expuesto a productos químicos descongelantes, la cantidad de ceniza volátil u otras puzolanas está limitada en este capítulo. Finalmente, la proporción de agua-cemento está limitada igualmente por la exposición a los sulfatos. Se requiere que el proyectista determine si son más restrictivos los requisitos de sustentación de carga estructural o los requisitos de durabilidad y que especifique requisitos más restrictivos para el valor de f_c', la proporción de agua-cemento y el contenido de aire.

1.16 ACERO DE REFUERZO

El refuerzo usado en las estructuras de concreto puede ser en forma de varillas o de malla soldada de alambre. Las varillas pueden ser *lisas* o *corrugadas*. Las varillas corrugadas, que tienen protuberancias en sus superficies (los patrones difieren según los fabricantes) para aumentar la adherencia entre el

[19] American Society for Testing and Materials, 1997, *Standard Test Method for Flexural Toughness and First-Crack Strength of Fiber-Reinforced Concrete* (Using Simple Beam with Third-Point Loading) (ASTM C1018-1997), West Conshohocken, PA.



Cimbras redondas para columnas de graderías en The Texas Motor Speedway, Fort Worth, Texas. (Cortesía de EFCO Corp.)

concreto y el acero, se usan en casi todas las aplicaciones. El alambre corrugado es dentado y no con protuberancias por laminado. Las varillas lisas no se usan con frecuencia, excepto para rodear las varillas longitudinales, sobre todo en columnas.

Las varillas redondeadas lisas están identificadas por sus diámetros en fracciones de pulgada, como de $\frac{3}{8}''\phi$, $\frac{1}{2}''\phi$ y $\frac{5}{8}''\phi$. Las varillas corrugadas son redondas y varían en tamaños del #3 al #11, con dos tamaños muy grandes, el #14 y el #18, también disponibles. Para varillas de hasta el #8 inclusive, el número de la varilla coincide con el diámetro de la varilla en octavos de pulgada. Por ejemplo, una varilla del #7 tiene un diámetro de 7/8 de pulgada y un área de la sección transversal de 0.60 plg^2 (que es el área de un círculo con un diámetro de 7/8 de pulgada). Antes las varillas se fabricaban con secciones redondas y cuadradas, pero actualmente todas las varillas son redondas.

Las varillas #9, #10 y #11 tienen diámetros que proporcionan áreas iguales a las áreas de las viejas varillas cuadradas de 1 plg $\times$ 1 plg, $1\frac{1}{8}$ de pulgada $\times$ $1\frac{1}{8}$ de pulgada y $1\frac{1}{4}$ de pulgada $\times$ $1\frac{1}{4}$ de pulgada, respectivamente. De manera similar, las varillas #14 y #18 corresponden a las viejas varillas cuadradas de $1\frac{1}{2}$ plg $\times$ $1\frac{1}{2}$ plg y de 2 plg $\times$ 2 plg, respectivamente. La tabla A.2 (véase el apéndice) provee detalles en lo que se refiere a las áreas transversales, diámetros y pesos de las varillas de refuerzo. Aunque las varillas #14 y #18 se muestran en esta tabla, el proyectista debe asegurarse de que se puedan conseguir en el mercado en cantidades suficientes. Las varillas de refuerzo se pueden comprar en longitudes de hasta 60 pies. Las varillas más largas tienen que ordenarse especialmente. Normalmente son muy flexibles y difíciles de manejar.

Las mallas soldadas de alambre se usan frecuentemente como refuerzo de losas, pavimentos, cascarones y en lugares donde no se tiene suficiente espacio para proporcionar el recubrimiento necesario de concreto que se requiere para las varillas regulares de refuerzo. La malla se hace con alambres estirados en frío, colocados en dos direcciones ortogonales y soldados en los puntos de intersección. Los tamaños y separación del alambre pueden ser los mismos en ambas direcciones o pueden ser diferentes, dependiendo de los requisitos del diseño. La malla de alambre se coloca fácilmente, tiene una adherencia excelente con el concreto y la separación de los alambres se controla muy bien.

La tabla A.3(A) en el apéndice da información sobre ciertos tipos de malla soldada de alambre que han sido recomendados por el Wire Reinforcement Institute como los tipos usuales en el mercado (los cuales, en general, son trasladados hasta los lugares de almacenamiento y puestos a disposición en cualquier momento). La tabla A.3(B) en el apéndice proporciona información detallada sobre los diámetros, áreas, pesos y separaciones de alambres usados comúnmente en la fabricación de las mallas. Se hace malla de alambre lisa y corrugada con alambres cuyos diámetros varían desde 0.134 plg hasta 0.628 plg para alambre liso y desde 0.225 plg hasta 0.628 plg para alambre corrugado.

El alambre liso se designa con la letra W seguida de un número igual al área de la sección trasversal del alambre en centésimos de pulgada cuadrada. El alambre corrugado se designa con la letra D seguida de un número que indica el área. Por ejemplo, un alambre D4 es un alambre corrugado con un área de sección transversal igual a 0.04 plg. La malla de alambre liso queda incluida en la definición del código ACI del refuerzo corrugado, debido a su adherencia mecánica al concreto, causada por las intersecciones de los alambres. La malla de alambre con corrugaciones en su superficie se adhiere aún más al concreto, debido a dichas corrugaciones, así como a las intersecciones de los alambres. Según el código, no se permite que el alambre corrugado sea mayor que D31 o menor que D4.

La malla se indica usualmente en los dibujos con las letras WWF (de *welded-wire fabric*), seguidas de los espaciamientos de los alambres longitudinales y transversales y luego de las áreas totales de alambre en centésimos de pulgada cuadrada por pie de longitud. Por ejemplo, WWF6 $\times$ 12-W16 $\times$ 8 representa una malla soldada de alambre liso con separación longitudinal de 6 plg y transversal de 12 plg, con áreas de sección transversal de 0.32 plg^2/pie y de 0.08 plg^2/pie, respectivamente.

Las varillas de acero con anclaje interno para el refuerzo de concreto (ASTM A970/970M-06) se añadieron al código ACI 318 en 2008. Las varillas con anclaje interno se pueden usar en lugar de varillas rectas o con gancho, con considerablemente menos congestión en las áreas aglomeradas tales como las intersecciones de viga-columna. La especificación cubre varillas lisas y corrugadas cortadas a la medida y que tengan cabezas ya sea forjadas o soldadas en uno o ambos extremos. Alternativamente, las cabezas se pueden conectar a las varillas por cuerdas internas en la cabeza que se acoplan a cuerdas en el extremo de la varilla o mediante una tuerca individual con cuerda para asegurar la cabeza a la varilla. Las cabezas se forjan, se tornean de varillas en existencia, o se cortan de placas. La figura 1.3 ilustra un detalle de varilla con anclaje interno. El International Code Council ha publicado criterios de aceptación para extremos con cabezas de refuerzo de concreto (ACC 347).

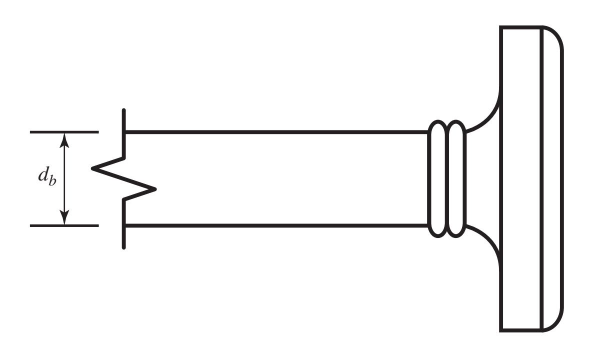


Figura 1.3 Varilla de refuerzo corrugada con anclaje interno.

1.17 GRADOS DEL ACERO DE REFUERZO

Las varillas de refuerzo se fabrican con base en acero de lingotes, de ejes o de rieles. Sin embargo, sólo ocasionalmente se laminan usando viejos rieles ferroviarios o ejes de locomotoras. Estos últimos aceros, después de haber sido trabajados en frío durante muchos años, no son tan dúctiles como los aceros de lingote.

Hay varios tipos de varillas de refuerzo con designaciones de la ASTM que se muestran al final de este párrafo. Estos aceros están disponibles en grados diferentes como el Grado 50, Grado 60, etc., donde Grado 50 significa que el acero tiene un punto de fluencia específico de 50 000 lb/plg^2, el Grado 60 significa 60 000 lb/plg^2, etcétera.

1. ASTM A615: varillas de acero de lingote lisas y corrugadas. Estas varillas, que deben estar marcadas con la letra S (por el tipo de acero), son las varillas de refuerzo de uso más común en Estados Unidos.
2. ASTM A706: varillas lisas y corrugadas de baja aleación. Estas varillas, que deben estar marcadas con la letra W (por el tipo de acero), deben usarse cuando se requieran propiedades controladas a la tensión y/o una composición química especialmente controlada para propósitos de soldadura.
3. ASTM A996: varillas corrugadas de acero de riel o de acero de ejes. Deben marcarse con la letra R (por el tipo de acero).
4. Si se producen varillas corrugadas para cumplir con ambas especificaciones A615 y A706, deben estar marcadas con ambas letras S y W.

Los proyectistas en casi todas las partes de Estados Unidos probablemente nunca encontrarán varillas de acero de rieles o de ejes (A996) porque sólo se encuentran en muy pocos lugares del país. De los 23 fabricantes de Estados Unidos de varillas de refuerzo en la lista del Concrete Reinforcing Steel Institute,[20] sólo cinco fabrican varillas de acero de riel y ninguno fabrica varillas de acero de eje.

Casi todas las varillas de refuerzo cumplen con la especificación A615 y una gran parte del material usado para hacerlas no es acero nuevo sino acero fundido recuperado, tal como el que proviene de carrocerías de automóviles viejos. Las varillas que cumplen con la especificación A706 se usan donde la soldadura y/o la flexión son de importancia particular. No siempre es fácil conseguir estas varillas con los distribuidores locales.

Es pequeña la diferencia en costo entre los aceros de refuerzo con resistencias de fluencia de 40 klb/plg^2 y 60 klb/plg^2. Por ello, las varillas de 60 klb/plg^2 son las más comúnmente usadas en el diseño de concreto reforzado.

Cuando las varillas se fabrican con aceros con resistencias de fluencia mayores de 60 klb/plg^2, el ACI (sección 3.5.3.2) estipula que la resistencia de fluencia especificada debe ser el esfuerzo correspondiente a una deformación unitaria de 0.35%. El ACI (sección 9.4) ha establecido un límite superior de 80 klb/plg^2 en las resistencias a la fluencia permitidas para cálculos del diseño en concreto reforzado. Si el ACI permitiera el uso de aceros con resistencias a la fluencia mayores que 80 klb/plg^2, tendrían que darse restricciones de diseño adicionales, ya que la deformación unitaria a la fluencia del acero de 80 klb/plg^2 es casi igual a la deformación unitaria última del concreto en compresión. (Esta última afirmación tendrá sentido cuando el lector estudie el capítulo 2.)

A través de los años ha habido demanda creciente de acero de grado 75, particularmente en edificios de gran altura en que se usa en combinación con concretos de alta resistencia. Se obtienen así columnas más pequeñas, más espacio de piso rentable y menores cimentaciones, debido al menor peso de los edificios que resultan.

El acero de grado 75 es un acero considerablemente más caro y las varillas #14 y #18 suelen ser de difícil adquisición; con frecuencia tienen que ser pedidas especialmente a los fabricantes. Esto significa

[20] Concrete Reinforcing Steel Institute, 2001, *Manual of Standard Practice*, 27a. ed., Chicago. Apéndice A, págs. A-1–A-5.

que pueda ser necesario un laminado especial para suministrar el acero. En consecuencia, su uso puede no ser económicamente, viable a menos que se ordenen al menos 50 o 60 toneladas.

Los esfuerzos de fluencia arriba de 60 klb/plg^2 se obtienen también en las mallas de alambre soldado, pero los esfuerzos especificados deben corresponder a deformaciones unitarias de 0.35%. La malla lisa debe cumplir con la ASTM A185, mientras que la malla corrugada no puede ser menor que el tamaño D4 y debe cumplir con la ASTM A496.

El módulo de elasticidad de los aceros no presforzados se considera igual a 29×10^6 lb/plg^2. En los aceros presforzados varía un poco de fabricante a fabricante, con un valor medio bastante común de 27×10^6 lb/plg^2.

El refuerzo de acero inoxidable (ASTM A955) se introdujo en el código 2008. Es altamente resistente a la corrosión, especialmente a la corrosión por picadura y por aireación diferencial debido a la exposición a las soluciones que contienen cloruros tales como las sales de deshielo. Aun cuando es más caro que el refuerzo normal de acero al carbono, el costo de su vida útil puede ser menor al considerar los costos de mantenimiento y reparación.

1.18 TAMAÑOS DE VARILLAS Y RESISTENCIAS DE MATERIALES EN UNIDADES SI

La versión métrica del código ACI 318M-08 usa las mismas varillas de refuerzo que se emplean en el diseño con unidades de medida comunes en Estados Unidos. Las dimensiones métricas de las varillas son meramente conversiones aproximadas (es decir, casi equivalentes) de los tamaños comunes. Las resistencias SI del concreto (f_c') y las resistencias mínimas a la fluencia del acero (f_y') se convierten de los valores acostumbrados a unidades métricas y se redondean un poco. En los siguientes párrafos se presenta un breve resumen de los tamaños métricos de varillas y de la resistencia de materiales. Estos valores se usan para los ejemplos SI y los ejercicios de tarea en este texto.

1. Los tamaños de varillas usados en la versión métrica del código corresponden a nuestras varillas de la #3 a la #18. Se numeran 10, 13, 16, 19, 22, 25, 29, 32, 36, 43 y 57. Estos números representan los diámetros de varillas en unidades comunes en Estados Unidos, redondeados al milímetro más cercano (mm). Por ejemplo, la varilla #10 tiene un diámetro igual en el sistema métrico a 9.5 mm, la varilla #13 tiene un diámetro igual en el sistema métrico a 12.7 mm, etc. En las tablas B.2 y B.3 del apéndice se proporciona información detallada relativa a los diámetros de las varillas de refuerzo, las áreas de sección transversal, la masa y clasificaciones ASTM.
2. Los grados del acero de refuerzo o las resistencias mínimas a la fluencia del acero, mencionadas en el código son 300, 350, 420 y 520 MPa. Estos valores corresponden, respectivamente, a 43 511, 50 763, 60 916 y 75 420 lb/plg^2 y por tanto corresponden aproximadamente a las varillas de grados 40, 50, 60 y 75. La tabla B.3 del apéndice proporciona los números ASTM, los grados de acero y los tamaños de las varillas disponibles en cada grado.
3. Las resistencias del concreto en unidades métricas mencionadas en el código son 17, 21, 24, 28, 35 y 42 MPa. Estos valores corresponden respectivamente a 2 466, 3 046, 3 481, 4 061, 5 076 y 6 092 lb/plg^2, es decir, a concretos de 2 500, 3 000, 3 500, 4 000, 5 000 y 6 000 lb/plg^2.

En 1997 los productores de las varillas de acero de refuerzo en Estados Unidos comenzaron a producir varillas métricas con valores aproximados. Éstas son las mismas varillas que por mucho tiempo han sido llamadas varillas estándar de libra-pulgada, pero que están marcadas con unidades métricas. Actualmente, la mayor parte de las varillas métricas fabricadas en Estados Unidos son con valores aproximados en el sistema métrico. Al producir exactamente las mismas varillas, la industria no tiene que conservar dos inventarios diferentes (un conjunto de tamaños para varillas de libra-pulgada y otro conjunto de tamaños diferentes de varillas en unidades métricas). La tabla 1.1 muestra los tamaños de varillas dados en ambos conjuntos de unidades.

Tabla 1.1 Tamaños y áreas de las varillas de refuerzo

Varillas estándar de libra-pulgada			Varillas con valores aproximados en el sistema métrico		
Número de varilla	Diámetro (plg)	Área (plg^2)	Número de varilla	Diámetro (mm)	Área (mm^2)
3	0.375	0.11	10	9.5	71
4	0.500	0.20	13	12.7	129
5	0.625	0.31	16	15.9	199
6	0.750	0.44	19	19.1	284
7	0.875	0.60	22	22.2	387
8	1.000	0.79	25	25.4	510
9	1.128	1.00	29	28.7	645
10	1.270	1.27	32	32.3	819
11	1.410	1.41	36	35.8	1 006
14	1.693	2.25	43	43.0	1 452
18	2.257	4.00	57	57.3	2 581

1.19 AMBIENTES CORROSIVOS

Cuando el concreto reforzado se ve sometido a sales descongelantes, agua marina o rocío de estas sustancias, es necesario proporcionar una protección especial contra la corrosión al acero de refuerzo. Las estructuras usualmente afectadas son los tableros de puentes, los garajes de estacionamiento, las plantas de tratamiento de aguas negras y diversas estructuras costeras. También deben considerarse las estructuras sujetas a derrames ocasionales de productos químicos que contienen cloruros.

El refuerzo se oxidará si no está bien protegido; al oxidarse, los óxidos resultantes ocupan un volumen mucho mayor que el del metal original. Como resultado, se dan grandes presiones hacia el exterior que ocasionan un severo agrietamiento y astillado del concreto. Esto reduce el *recubrimiento* protector de concreto para el acero y la corrosión se acelera. Además, la *adhesión* entre el concreto y el acero se reduce. El resultado de todos estos factores es una reducción de la vida útil de la estructura.

La sección 7.7.6 del código requiere que en ambientes corrosivos se proporcione más recubrimiento de concreto al acero; también expresa que se usen proporciones especiales en la dosificación del concreto.

La vida útil de tales estructuras puede incrementarse sustancialmente con el uso de varillas de *refuerzo recubiertas con epóxido*. Esas varillas deben manejarse muy cuidadosamente para no quebrar sus capas protectoras. Además, la adhesión al concreto de tales varillas no es muy buena y sus longitudes de ahogamiento deben aumentarse, como se verá en el capítulo 7. El uso de refuerzo de acero inoxidable, como se describe en la sección 1.14, también puede aumentar significativamente la vida útil de las estructuras expuestas a ambientes corrosivos.

1.20 IDENTIFICACIÓN DE LAS MARCAS EN LAS VARILLAS DE REFUERZO

Es importante que los trabajadores en el taller y en el campo puedan ser capaces de identificar de un vistazo las dimensiones y grados de las varillas de refuerzo. Si no fuera así, pueden utilizar varillas más pequeñas y de menor grado que aquellas que el proyectista señaló. Para prevenir tales errores, las varillas tienen marcas de identificación impresas en su superficie. Estas marcas se describen a continuación y se muestran en la figura 1.4.

1. El fabricante se identifica con una letra.
2. El número con la dimensión de la varilla (3 a 18) se da después.
3. El tipo de acero se identifica con otra letra (S para lingote, la letra R con un símbolo de riel para el acero de riel, A para el de eje y W para bajas aleaciones).

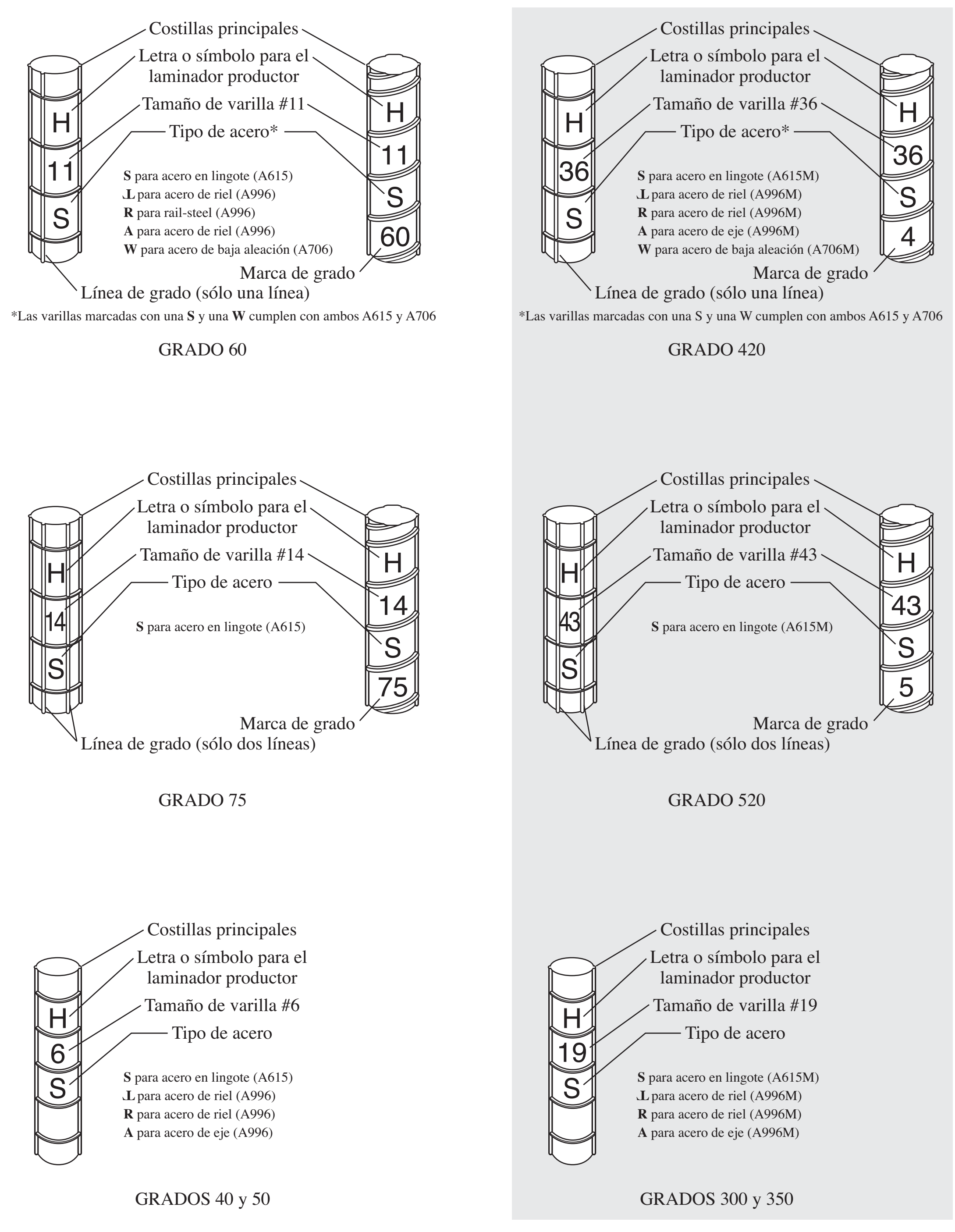


Figura 1.4 Marcas de identificación para varillas estándar ASTM. (Cortesía del Concrete Reinforcing Steel Institute.)

4. Finalmente, el grado de las varillas se indica ya sea con números o con líneas continuas. Una varilla de grado 60 tiene ya sea el número 60 o una línea longitudinal continua además del corrugado. Una varilla con grado 75 tiene el número 75 o dos líneas continuas adicionales al corrugado.

1.21 INTRODUCCIÓN A LAS CARGAS

Quizá la tarea más importante y difícil encarada por el proyectista de estructuras es la estimación precisa de las cargas que pueden aplicarse a una estructura durante su periodo de vida útil. No pueden dejar de considerarse cargas que puedan presentarse con cierta probabilidad razonable. Una vez estimadas las cargas, el siguiente problema consiste en determinar cuál será la peor combinación de éstas que pueda ocurrir en un momento dado. Por ejemplo, ¿podría estar un puente carretero, completamente cubierto con hielo y nieve, además de sujeto a las cargas dinámicas de camiones pesados viajando a gran velocidad en todos los carriles y con un viento lateral de 90 millas, o es más razonable considerar una combinación de cargas más ligeras?

Las siguientes secciones de este capítulo proporcionan una breve introducción a los tipos de cargas que el proyectista de estructuras debe conocer. El propósito de estas secciones no es analizar las cargas en gran detalle, sino dar al lector una idea general del tema. Como veremos, las cargas se clasifican en muertas, vivas o ambientales.

1.22 CARGAS MUERTAS

Las cargas muertas son cargas de magnitud constante que permanecen en un mismo lugar. Incluyen el peso propio de la estructura en estudio, así como también cualesquiera elementos que están permanentemente unidos a ella. En un edificio con estructura de concreto reforzado, algunas de las cargas muertas son los marcos, muros, pisos, cielos rasos, escaleras, techos y plomería.

Para diseñar una estructura, es necesario estimar los pesos o cargas muertas de las diversas partes para considerarlas en el diseño. Los tamaños y pesos exactos de las partes no se conocen hasta que se ha hecho el análisis estructural y se han seleccionado los elementos para la estructura. Los pesos obtenidos en el diseño deben compararse con los pesos estimados. Si se encuentran grandes discrepancias, será necesario repetir el análisis y diseñar usando pesos mejor estimados.

Pueden obtenerse estimaciones razonables de pesos estructurales comparando estructuras de tipo similar o consultando fórmulas y tablas contenidas en la mayoría de los manuales de ingeniería civil. Un ingeniero experimentado puede estimar con mucha precisión los pesos de la mayoría de los elementos estructurales e invertirá poco tiempo en repetir diseños con estimaciones deficientes.

En la tabla 1.2 se dan los pesos aproximados de algunos materiales comunes que se usan en pisos, muros, techos, etcétera.

1.23 CARGAS VIVAS

Las cargas vivas son cargas que pueden cambiar de magnitud y posición. Éstas incluyen cargas de ocupantes, cargas de materiales en bodegas, cargas de materiales de construcción, cargas de grúas viajeras, cargas de equipo en operación y muchas otras. Por lo general, son cargas inducidas por la gravedad.

Tabla 1.2 Pesos de algunos materiales de construcción comunes

Concreto reforzado; 12 plg	150 lb/pie^2	Piso doble de madera, 2 × 12 @ 16 plg	7 lb/pie^2
Loseta acústica para plafones	1 lb/pie^2	Loseta de linóleo o asfalto	1 lb/pie^2
Cielo raso suspendido	2 lb/pie^2	Piso de madera dura ($\frac{7}{8}$ plg)	4 lb/pie^2
Yeso sobre concreto	5 lb/pie^2	1 pulgada de cemento sobre relleno de concreto de grava	32 lb/pie^2
Baldosas de asfalto	2 lb/pie^2	Particiones de acero movibles	4 lb/pie^2
Techo de madera contrachapada (3 lechos)	1 lb/pie^2	Pies derechos de madera con ½ plg de yeso	8 lb/pie^2
Margen para ductos mecánicos	4 lb/pie^2	Hiladas de ladrillo de arcilla de 4 plg	39 lb/pie^2

Tabla 1.3 Algunas cargas vivas típicas uniformemente distribuidas

Vestíbulos de recintos de reunión	100 lb/pie^2	Salones de clase en escuelas	40 lb/pie^2
Salones de baile	100 lb/pie^2	Pasillos de pisos superiores en escuelas	80 lb/pie^2
Salas de lectura en bibliotecas	60 lb/pie^2	Escaleras y salidas	100 lb/pie^2
Salas de estanterías en bibliotecas	150 lb/pie^2	Bodegas de equipo pesado	250 lb/pie^2
Talleres pequeños	125 lb/pie^2	Tiendas, planta baja	100 lb/pie^2
Recintos en edificios de oficinas	50 lb/pie^2	Tiendas, pisos superiores	75 lb/pie^2
Habitaciones residenciales	40 lb/pie^2	Pasajes y plataformas elevadas	60 lb/pie^2

lb/pie^2: libras por pie cuadrado.

Algunas de las cargas vivas de piso típicas que actúan en las estructuras se presentan en la tabla 1.3. Estas cargas, que están tomadas de la tabla 4-1 en el ASCE 7-05,[21] actúan hacia abajo y quedan distribuidas uniformemente sobre todo un piso. En contraste, las cargas vivas de techo tienen un valor máximo de 20 lb/pie^2 (libras por pie cuadrado) distribuido uniformemente sobre el techo en su totalidad.

Otros tipos de cargas vivas son:

Cargas de tránsito en puentes: los puentes están sujetos a una serie de cargas concentradas de magnitud variable causadas por grupos de ruedas de camiones o de trenes.

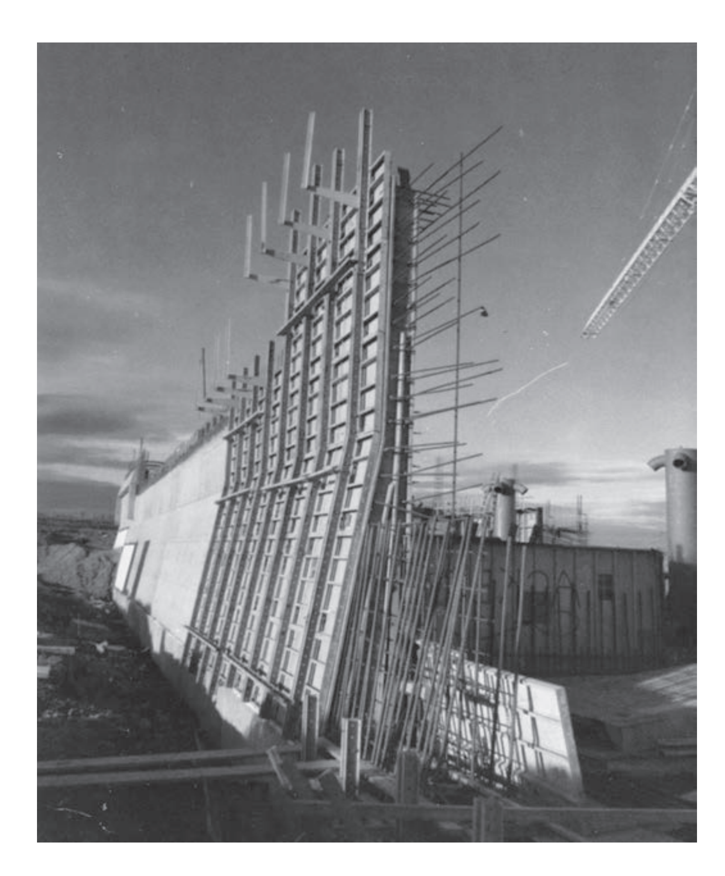
Cargas de impacto: las cargas de impacto las causan la vibración de las cargas móviles o movibles. Es obvio que un bulto arrojado al piso de un almacén o un camión que rebota sobre el pavimento irregular de un puente, causan mayores fuerzas que las que se presentarían si las cargas se aplicaran suave y gradualmente. Las cargas de impacto son iguales a la diferencia entre las magnitudes de las cargas realmente generadas y las magnitudes de las cargas consideradas como muertas.

Cargas longitudinales: las cargas longitudinales también necesitan ser consideradas en el diseño de algunas estructuras. Al detenerse un tren en un puente de ferrocarril o un camión en un puente de carretera, se producen en éstos fuerzas longitudinales. No es difícil imaginar la tremenda fuerza longitudinal que se desarrolla en un puente cuando el conductor de un camión con remolque de 40 toneladas viajando a 60 millas por hora repentinamente tiene que frenar al cruzar un puente de carretera. Hay otras situaciones de carga longitudinal, por ejemplo, la que se suscita cuando un barco golpea el muelle y cuando se mueven las grúas tipo viajero sostenidas por los marcos de las edificaciones industriales.

Cargas diversas: entre los otros tipos de cargas vivas a las que el proyectista de estructuras tendrá que enfrentarse, se encuentran las *presiones del suelo* (tales como el ejercicio de presiones laterales de la tierra sobre muros o las presiones hacia arriba sobre las cimentaciones), las *presiones hidrostáticas* (presión hidráulica sobre las presas, fuerzas de inercia de grandes masas de agua durante los terremotos y subpresiones sobre tanques y estructuras en sótanos), las *cargas explosivas* (causadas por explosiones, por aviones supersónicos y por armas militares) y las *fuerzas centrífugas* (como las causadas por camiones y trenes en puentes curvos o efectos similares en montañas rusas).

Se permiten reducciones de carga viva, según la sección 4.8 de ASCE 7, porque es improbable que la estructura entera esté sujeta a su carga viva de diseño total sobre toda el área de piso, todo al mismo tiempo. Esta reducción puede reducir significativamente la carga viva de diseño total en una estructura, resultando en cargas de columna mucho más bajas en pisos inferiores y cargas sobre las zapatas.

[21] American Society of Civil Engineers, 2005, *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*, ASCE 7-05 (Reston, VA: American Society of Civil Engineers), págs. 9-13.



Planta de tratamiento de aguas negras, Redwood City, California. (Cortesía de The Burke Company.)

1.24 CARGAS AMBIENTALES

Las cargas ambientales son cargas causadas por el medio ambiente en el cual se encuentra la estructura. Para edificios, son causadas por la lluvia, nieve, viento, cambios de temperatura y terremotos. Estrictamente hablando, son también cargas vivas, pero son el resultado del ambiente en el que la estructura se encuentra. Aunque varían con el tiempo, no todas son causadas por la gravedad o las condiciones de operación, como es usual con otras cargas vivas. En los siguientes párrafos comentaremos brevemente los diversos tipos de cargas ambientales.

1. *Nieve y hielo*. En los países más fríos, las cargas de nieve y hielo en ocasiones son considerables. Una pulgada de nieve equivale a aproximadamente 0.5 lb/pie^2, pero puede ser mayor en elevaciones menores, donde la nieve es más densa. Para los diseños de techos se usan cargas de nieve de 10 lb/pie^2 a 40 lb/pie^2, la magnitud depende principalmente de la pendiente del techo y en menor grado de su tipo de superficie. Los valores mayores se usan para techos horizontales, y los menores, para techos inclinados. La nieve tiende a resbalar en los techos con pendiente, sobre todo en aquellos con superficies de metal o pizarra. Una carga de aproximadamente 10 lb/pie^2 podría usarse para pendientes de 45° y una de 40 lb/pie^2 para techos a nivel. Los estudios de registros de precipitación de nieve en áreas con inviernos severos pueden indicar la ocurrencia de cargas de nieve mucho mayores que 40 lb/pie^2, con valores tan altos como 80 lb/pie^2 en el norte del estado de Maine.

La nieve es una carga variable, que puede cubrir todo un techo o sólo partes de éste. Puede haber ventiscas contra los muros o acumulación en la lima hoya o entre los parapetos. La nieve puede deslizarse de un techo a otro situado más abajo. El viento puede barrerla de una parte de un

techo con pendiente, o la nieve puede solidificarse y quedarse en su posición original aun durante fuertes vendavales. Las cargas de nieve que se aplican a una estructura dependen de muchos factores, como la localización geográfica, inclinación del techo, resguardo y forma del techo.

2. *Lluvia*. Aunque las cargas de nieve son un problema más severo que las cargas pluviales en los techos comunes, la situación puede invertirse en los techos horizontales, especialmente aquellos localizados en lugares con clima cálido. Si el agua en un techo sin pendiente se acumula más rápidamente que lo que tarda en escurrir, el resultado se denomina *encharcamiento*; la carga aumentada causa que el techo se flexione en forma de plato hondo, que entonces puede contener más agua, lo que a su vez causa mayores deflexiones, etc. Este proceso continúa hasta que se alcanza el equilibrio o el colapso de la estructura. El encharcamiento es un problema muy serio, como lo atestigua el gran número de fallas que ocurren en techos horizontales debido al encharcamiento cada año en Estados Unidos. Se afirma que casi 50% de las demandas contra los constructores de edificios, tienen que ver con los sistemas de techo.[22] El encharcamiento es uno de los temas principales en tales litigios.

3. *Viento*. Una revisión de la literatura técnica de ingeniería durante los pasados 150 años revela muchas referencias a fallas estructurales causadas por el viento. Acaso las más tremendas han sido las fallas en los puentes, tal como la del puente Tay en Escocia en 1879 (que causó la muerte de 75 personas) y el puente Tacoma Narrows (Tacoma, Washington) en 1940. Pero también se han tenido algunas fallas desastrosas durante el mismo periodo en edificios ocasionadas por el viento, tal como la del edificio Union Carbide en Toronto en 1958. Es importante notar que un gran porcentaje de las fallas en edificios debidas al viento han ocurrido durante su construcción.[23]

   En años recientes se ha investigado exhaustivamente el tema de las cargas de viento. No obstante, más estudio es necesario, ya que el cálculo de las fuerzas del viento no puede considerarse de ninguna manera como una ciencia exacta. La magnitud y la duración de las cargas del viento varían con la localidad geográfica, la altura de las estructuras sobre el terreno, tipos de suelo alrededor de las estructuras, proximidad de otros edificios, posición dentro de la estructura y carácter del viento mismo.

   El capítulo 6 de la especificación ASCE 7-05 proporciona un procedimiento más bien largo para estimar las presiones del viento aplicadas a los edificios. El procedimiento involucra varios factores, con ayuda de los cuales se intenta tomar en cuenta el terreno alrededor del edificio, la importancia del edificio respecto a la vida y el bienestar humanos y por supuesto la velocidad del viento en el sitio de la obra. Aunque el uso de las ecuaciones es algo complicado, el trabajo puede simplificarse considerablemente con las tablas presentadas en la especificación. Sin embargo, se advierte al lector que tales tablas son para edificios de forma regular. Si se considera un edificio de geometría irregular o no usual, podría ser necesario tener que llevar a cabo estudios en túneles de viento.

   La forma básica de la ecuación presentada en la especificación es:

$$p = qCG$$

   En esta ecuación p es la carga de viento estimada (en lb/pie^2) que actúa sobre la estructura. Esta carga de viento variará con la altura sobre el terreno y con la localización de la estructura. La cantidad q es la presión de velocidad de referencia. Varía con la altura y con la exposición al viento. El factor de forma aerodinámica C depende de la forma y la orientación del edificio con respecto a la dirección en que sopla el viento. Finalmente, el factor de respuesta por ráfagas

[22]Van Ryzin, Gary, 1980, “Roof Design: Avoid Ponding by Sloping to Drain”, *Civil Engineering* (Nueva York: ASCE, enero), págs. 77-81.

[23]Task Committee on Wind Forces, Committee on Loads and Stresses, Structural Division, ASCE, 1961, “Wind Forces on Structures”, Final Report, *Transactions* ASCE 126, Part II, págs. 1124-1125.

G depende de la naturaleza del viento y de la localización del edificio. Otras consideraciones para determinar el diseño de la presión del viento incluyen el factor de importancia y la rugosidad de la superficie.

4. *Cargas sísmicas*. Muchas zonas del mundo están en "territorio sísmico" y en tales zonas es necesario considerar fuerzas sísmicas en el diseño de todos los tipos de estructuras. A través de los siglos han habido fallas catastróficas en edificios, puentes y otras estructuras durante los sismos. Se ha estimado que alrededor de 50 000 personas perdieron la vida en el sismo de 1988 en Armenia.[24] Los sismos de Loma Prieta en 1989 y de Northridge en 1994 en California, causaron miles de millones de dólares en pérdidas por daño a las propiedades, así como una considerable pérdida de vidas. El sismo de 2008 en la provincia de Sichuan, China, causó 69 000 muertes y otros 18 000 desaparecidos.

Los terremotos recientes han demostrado claramente que el edificio o puente promedio que no ha sido diseñado para resistir fuerzas sísmicas puede ser destruido por un terremoto que no sea particularmente severo. La mayoría de las estructuras pueden diseñarse y construirse económicamente para resistir las fuerzas generadas durante la mayoría de los terremotos. Por otra parte, el costo de proporcionar resistencia sísmica a estructuras existentes (llamado *remodelación*) puede ser extremadamente alto.

Algunos ingenieros estiman que las cargas sísmicas que se consideran en el diseño son meramente incrementos porcentuales de las cargas de viento. Sin embargo, esta suposición es incorrecta, ya que las cargas sísmicas son diferentes en su acción y no son proporcionales a las áreas expuestas del edificio, sino más bien proporcionales a la distribución de la masa del edificio sobre el nivel considerado.

Otro factor a ser considerado en el diseño sísmico es la condición del suelo. Casi todo el daño estructural y pérdida de vidas en el terremoto de Loma Prieta ocurrieron en áreas con suelos de arcilla suave. Parece ser que esos suelos amplificaron los movimientos de la roca subyacente.[25]

Debe entenderse claramente que los terremotos afectan a las estructuras de manera indirecta. El suelo se desplaza y como las estructuras están conectadas a éste, también se desplazan y vibran. Como consecuencia, diversas deformaciones y esfuerzos son causados en toda la estructura.

De la información anterior se puede entender que los sismos no producen ninguna fuerza externa en las estructuras sobre el nivel del suelo. Los procedimientos para estimar las fuerzas sísmicas, tales como los presentados en el capítulo 12 de ASCE 7-05, son muy complicados. Como consecuencia, por lo general se estudian en los cursos de análisis estructural avanzado, tales como dinámica estructural o diseño para resistencia sísmica.

1.25 SELECCIÓN DE LAS CARGAS DE DISEÑO

Para ayudar al ingeniero a estimar las magnitudes de las cargas vivas necesarias para diseñar estructuras, se han elaborado a través de los años una serie de especificaciones y reglamentos de construcción. Estas publicaciones proporcionan estimaciones conservadoras de las magnitudes de las carga vivas para diversas situaciones. Una de las especificaciones para diseño de cargas en edificios más ampliamente usada, es la publicada por la American Society of Civil Engineers (ASCE).[26]

El proyectista usualmente tiene una buena guía en el código de construcción de su región de trabajo para la estimación de las cargas vivas de diseño. Desafortunadamente, los valores dados en estos códigos varían de ciudad a ciudad, por lo cual el proyectista debe asegurarse de que se cumplan en cada caso los requisitos de la localidad considerada. En ausencia de un código gobernante, puede consultarse el excelente código ASCE.

[24]Fairweather, V., 1990, "The Next Earthquake", *Civil Engineering* (Nueva York: ASCE, marzo), págs. 54-57.
[25]Ibid.
[26]American Society of Civil Engineers, 2005, *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*, ASCE 7-05 (Reston, VA: American Society of Civil Engineers), 376 pp.



Estadio Croke Park, Dublín, Irlanda. (Cortesía de EFCO Corp.)

Algunas otras especificaciones muy aplicadas son:

1. Para puentes de ferrocarril, las de la American Railway Engineering Association (AREA).[27]
2. Para puentes carreteros, las de la American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO).[28]
3. Para edificios, el International Building Code (IBC).[29]

Estas especificaciones describen claramente en muchos casos las cargas con que deben diseñarse las estructuras. A pesar de la disponibilidad de esta información, el ingenio y los conocimientos del ingeniero son con frecuencia necesarios para predecir qué cargas tendrá que soportar una estructura particular en años venideros. En el pasado, las estimaciones insuficientes por parte de los ingenieros de puentes de las futuras cargas de tránsito, han tenido como consecuencia tener que remplazar una gran cantidad de estructuras por otras más amplias y resistentes.

1.26 EXACTITUD DE LOS CÁLCULOS

Un punto muy importante, que muchos estudiantes con sus asombrosas computadoras y calculadoras de bolsillo tienen dificultad en entender, es que el diseño del concreto reforzado no es una ciencia exacta y que no tiene sentido tratar de obtener resultados con seis u ocho cifras significativas. Las razones para esta afirmación deberían ser bastante obvias: el análisis de estructuras se basa en suposiciones parcialmente verdaderas; las resistencias de los materiales usados varían ampliamente; las estructuras no se construyen con las dimensiones exactas mostradas en los planos y las cargas máximas sólo pueden determinarse en forma aproximada. Con respecto a esta última afirmación, ¿cuántos estudiosos de este libro podrían estimar con una aproximación de 10% la carga viva máxima en libras por pie cuadrado que alguna vez ocurrirá en el piso del edificio que ahora ocupan? Los cálculos con más de dos o tres

[27]American Railway Engineering Association (AREA), 2003, *Manual for Railway Engineering* (Chicago, IL).
[28]*Standard Specifications for Highway Bridges*, 2002, 17a. ed. (Washington, DC: American Association of State Highway and Transportation Officials [AASHTO]).
[29]International Building Code, 2006, International Code Council, Inc.

cifras significativas, obviamente son de poco valor y pueden darle a los estudiantes una falsa impresión de exactitud.

1.27 IMPACTO DE LAS COMPUTADORAS EN EL DISEÑO DE CONCRETO REFORZADO

La disponibilidad de las computadoras personales ha cambiado drásticamente la manera en que se analizan y diseñan las estructuras de concreto reforzado. En prácticamente todas las escuelas de ingeniería y las oficinas, las computadoras se usan rutinariamente para manejar los problemas de diseño estructural.

Muchos cálculos están implícitos en el diseño del concreto reforzado y muchos de estos cálculos consumen mucho tiempo. Con una computadora, el proyectista puede reducir considerablemente el tiempo requerido para estos cálculos y dedicar el tiempo ahorrado para considerar diseños alternativos.

Aunque las computadoras aumentan la productividad del diseño, sin duda tienden al mismo tiempo a reducir el "sexto sentido" del proyectista para las estructuras. Esto puede ser un problema especial para los ingenieros jóvenes con poca experiencia previa en el diseño. A menos que los proyectistas tengan este "sexto sentido", el uso de la computadora, aunque acelera el trabajo y reduce muchos errores, puede conducir ocasionalmente a grandes equivocaciones.

Es interesante notar que hasta ahora, la práctica en la mayoría de las escuelas de ingeniería ha sido que la mejor manera de enseñar el diseño del concreto reforzado es en el pizarrón, complementándose con algunos ejemplos de la computadora.

Acompañando a este texto están varias hojas de cálculo de Excel que pueden descargarse del sitio web de este libro en: http://virtual.alfaomega.com.mx/

Estas hojas de cálculo están dirigidas a permitirle al estudiante considerar diseños alternativos múltiples y no como una herramienta para trabajar problemas básicos de tarea.

PROBLEMAS

1.1 Mencione varios de los aditivos usados en mezclas de concreto. ¿Cuál es el propósito de cada uno de ellos?

1.2 ¿Qué es la relación de Poisson y dónde puede ser importante en trabajos con concreto?

1.3 ¿Qué factores influyen en el flujo plástico del concreto?

1.4 ¿Qué se puede hacer para reducir el flujo plástico?

1.5 ¿Cuál es el efecto del flujo plástico en columnas de concreto reforzado sometidas a cargas axiales de compresión?

1.6 ¿Por qué se usa gas de sílice en concretos de alta resistencia? ¿Qué efecto tiene?

1.7 ¿Por qué tienen corrugaciones las superficies de las varillas de refuerzo?

1.8 ¿Cuáles son las varillas de refuerzo con dimensiones aproximadas en el "sistema métrico"?

1.9 ¿Cuáles son los tres factores que influyen en la magnitud de la carga sísmica en una estructura?

1.10 ¿Por qué a veces se usan varillas recubiertas con epóxido en la construcción con concreto reforzado?

1.11 ¿Cuál es el diámetro y área de sección transversal de una varilla de refuerzo del #5?

2

Análisis de vigas sometidas a flexión

2.1 INTRODUCCIÓN

En esta sección se supone que se coloca una pequeña carga transversal sobre una viga de concreto con refuerzo de tensión y que esta carga se incrementa gradualmente en magnitud hasta que la viga falla. Cuando esto ocurre, encontraremos que la viga pasa por tres etapas distintas antes de que ocurra el colapso. Éstas son: 1) etapa del concreto no agrietado, 2) etapa con esfuerzos elásticos y concreto agrietado y 3) etapa de resistencia última. Se considera una viga relativamente larga, de manera que los efectos cortantes no tienen un gran efecto en su comportamiento.

Etapa del concreto no agrietado

Bajo cargas pequeñas, cuando los esfuerzos de tensión son menores que el *módulo de ruptura* (esfuerzo de tensión por flexión bajo el cual el concreto comienza a agrietarse), la sección transversal total de la viga resiste la flexión, con compresión en un lado y tensión en el otro. La figura 2.1 muestra la variación de los esfuerzos y de las deformaciones unitarias bajo estas cargas pequeñas; en la sección 2.2 se presenta un ejemplo numérico al respecto.

Concreto agrietado: etapa de esfuerzos elásticos

Al incrementarse la carga después de que el módulo de ruptura del concreto se ha excedido, comienzan a desarrollarse grietas en la parte inferior de la viga. El momento cuando comienzan a formarse las grietas, es decir, cuando los esfuerzos de tensión en la parte inferior de la viga son iguales al módulo de ruptura, se denomina *momento de agrietamiento*, M_{cr}. Al aumentar la carga, estas grietas se extienden rápidamente hacia la vecindad del eje neutro, el cual comienza a desplazarse hacia arriba. Las grietas se presentan en aquellos lugares a lo largo de la viga, donde el momento real es mayor que el momento de agrietamiento, tal como se muestra en la figura 2.2(*a*).

Una vez que el lado inferior de la viga se ha agrietado, empieza una nueva etapa, porque obviamente el concreto en la zona agrietada no puede resistir esfuerzos de tensión —el acero debe resistirlos. Esta etapa continuará mientras los esfuerzos de compresión en las fibras superiores sean menores a aproximadamente la mitad de la resistencia a compresión f'_c del concreto y mientras el esfuerzo en el acero sea menor que su límite elástico. En la figura 2.2(*b*) se muestran los esfuerzos y deformaciones unitarias de esta fluctuación. En esta etepa los esfuerzos de compresión varían linealmente con la distancia del eje neutro o bien como una línea recta.

La variación lineal de los esfuerzos y de las deformaciones se presenta normalmente en las vigas de concreto reforzado bajo condiciones normales de carga de servicio, ya que debido a esas cargas los esfuerzos del concreto generalmente son inferiores a 0.50 f'_c. Para calcular los esfuerzos en el concreto y en el acero en esta etapa, se usa el método de la sección transformada (que se presentará en la sección 2.3). Las *cargas de servicio* o de *trabajo* son las cargas que supuestamente se presentan cuando una estructura está en uso o en servicio. Bajo estas cargas se desarrollan momentos que son

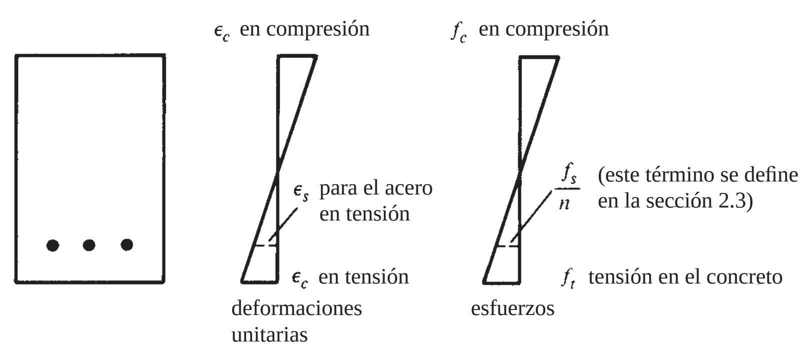


Figura 2.1 Etapa del concreto no agrietado.

considerablemente mayores que los momentos de agrietamiento. Obviamente el lado tensado de la viga se agrietará. En el capítulo 6 aprenderemos a estimar los anchos de las grietas y veremos métodos para limitar estos anchos.

Falla de la viga: etapa de resistencia última

Conforme la carga crece todavía más, de modo que los esfuerzos de compresión resultan mayores que la mitad de f'_c, las grietas de tensión se desplazan aún más hacia arriba, igual que lo hace el eje neutro, y los esfuerzos de compresión en el concreto comienzan a dejar de ser lineales. En este análisis inicial se supondrá que las varillas de refuerzo han cedido. La variación de los esfuerzos es parecida a la que se muestra en la figura 2.3. Compare la información dada en esta figura con la de la figura 1.1 en cuanto a la variación proporcional entre las deformaciones unitarias y los esfuerzos en los diferentes niveles de esfuerzo.



Construcción del Kingdome, Seattle, Washington. (Cortesía de EFCO Corp.)

M_{agr} M_{agr}

a)

ϵ_c f_c

ϵ_s f_s

deformaciones unitarias

esfuerzos

b)

Figura 2.2 Concreto agrietado: etapa de esfuerzos elásticos.

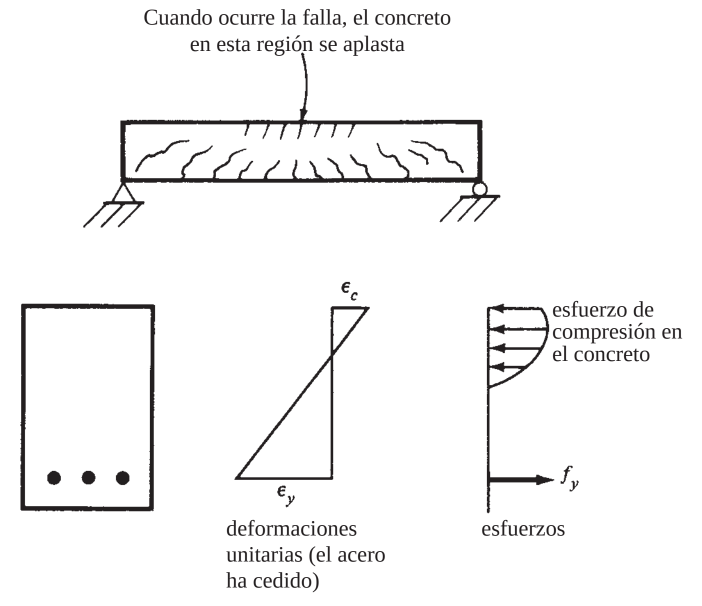


Figura 2.3 La etapa de resistencia última.

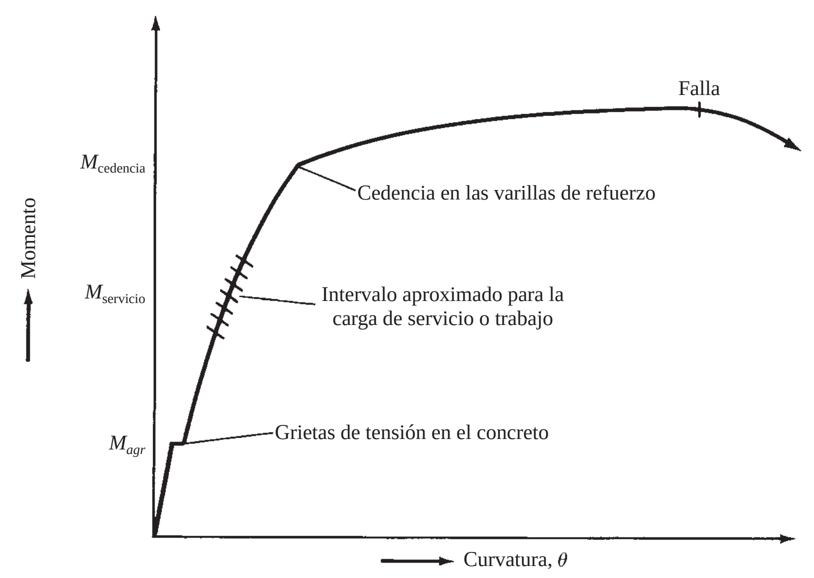


Figura 2.4 Diagrama de momento-curvatura para una viga de concreto reforzado con refuerzo de tensión solamente.

Para ilustrar mejor las tres etapas de comportamiento de la viga que se han descrito, se muestra en la figura 2.4[1] un diagrama de momento-curvatura. En este diagrama, θ se define como el cambio angular de la sección de la viga en una cierta longitud y se calcula por medio de la siguiente expresión, en la que ϵ es la deformación unitaria en una fibra de la viga a una distancia y del eje neutro de la viga:

$$\theta = \frac{\epsilon}{y}$$

La primera etapa del diagrama es para momentos pequeños menores que el momento de agrietamiento M_{agr} donde se dispone de toda la sección transversal de la viga para resistir la flexión. En esta etapa, las deformaciones unitarias son pequeñas, y el diagrama es casi vertical y muy parecido a una línea recta.

Cuando el momento crece más allá del valor del momento de agrietamiento, la pendiente de la curva disminuye un poco debido a que la viga ya no es tan rígida como en la etapa inicial anterior al agrietamiento del concreto. El diagrama describirá casi una línea recta desde M_{agr}, hasta el punto en que el refuerzo queda sometido a su punto de cedencia. Hasta alcanzarse el esfuerzo de cedencia en el acero, se requiere una carga adicional bastante grande para incrementar apreciablemente la deflexión de la viga.

Después de que el acero cede plásticamente, la viga tiene muy poca capacidad adicional por momento, y se requiere sólo una pequeña carga adicional para incrementar considerablemente las rotaciones, así como las deflexiones. En esta etapa la pendiente del diagrama es muy ligera.

2.2 MOMENTO DE AGRIETAMIENTO

El área del refuerzo como un porcentaje del área total de la sección transversal de una viga, es bastante pequeño (generalmente 2% o menor), y su efecto es casi despreciable en las propiedades de la viga, en tanto que ésta no se agriete. Por tanto, se puede obtener un cálculo aproximado de los esfuerzos de flexión en tal viga, con base en las propiedades generales de la sección transversal total de la viga. El

[1]MacGregor, J.G., 2005, *Reinforced Concrete Mechanics and Design*, 4a. ed. (Upper Saddle River, N. J.; Prentice Hall), pág. 109.

esfuerzo en el concreto en cualquier punto a una distancia y del eje neutro de la sección transversal se puede determinar con la siguiente fórmula de flexión, donde M es el momento flexionante, que es igual o menor que el momento de agrietamiento de la sección, e I_g es el momento de inercia bruto de la sección transversal:

$$f = \frac{My}{I_g}$$

La sección 9.5.2.3 del código ACI establece que el momento de agrietamiento de una sección se puede determinar con la ecuación 9-9 del ACI, en donde f_r es el módulo de ruptura del concreto y y_t es la distancia del eje centroidal de la sección a su fibra extrema en tensión. En esta sección, con su ecuación 9-10, el código establece que f_r puede tomarse igual a $7.5\lambda\sqrt{f'_c}$ con f'_c en lb/plg^2.

O en unidades SI con f'_c en $\frac{N}{mm^2}$ o MPa, $f_r = 0.7\lambda\sqrt{f'_c}$.

El término “lambda” es 1.0 para concreto de peso normal y es menor que 1.0 para concreto ligero como se describió en la sección 1.12. El momento de agrietamiento es como sigue:

$$M_{agr} = \frac{f_r I_g}{y_t} \quad \text{(Ecuación ACI 9-9)}$$

El ejemplo 2.1 muestra los cálculos para una viga de concreto reforzado en la que los esfuerzos de tensión son menores que su módulo de ruptura. Por tanto, se supone que no aparecen grietas de tensión y que los esfuerzos son similares a los que ocurren en una viga construida con un material homogéneo.

EJEMPLO 2.1

a) Suponiendo que el concreto no está agrietado, calcular los esfuerzos de flexión en las fibras extremas de la viga de la figura 2.5 para un momento flexionante de 25 pie-klb. El concreto de peso normal tiene un f'_c de 4 000 lb/plg^2 y un módulo de ruptura de $f_r = 7.5(1.0)\sqrt{4\,000} = 474$ lb/plg^2.

b) Determine el momento de agrietamiento de la sección.

SOLUCIÓN **a)** Esfuerzos de flexión:

$$I_g = \frac{1}{12}bh^3 \text{ con } b = 12 \text{ plg y } h = 18 \text{ plg}$$

$$I_g = \left(\frac{1}{12}\right)(12)(18)^3 = 5\,832 \text{ plg}^4$$

$$f = \frac{My}{I_g} \text{ con } M = 25 \text{ pie-klb} = 25\,000 \text{ pie-lb}$$

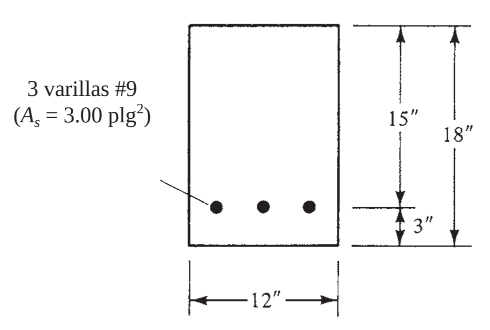


Figura 2.5

Luego se multiplica 25 000 por 12 para obtener plg-lbs como se muestra enseguida:

$$f = \frac{(12 \times 25\,000)(9.00)}{5\,832} = 463 \text{ lb/plg}^2$$

Como este esfuerzo es menor que la resistencia a la tensión o módulo de ruptura del concreto de 474 lb/plg^2, se supone que la sección no se agrieta.

b) Momento de agrietamiento:

$$M_{agr} = \frac{f_r I_g}{y_t} = \frac{(474)(5\,832)}{9.00} = 307\,152 \text{ plg-lb} = \underline{\underline{25.6 \text{ pie/klb}}}$$

2.3 ESFUERZOS ELÁSTICOS: CONCRETO AGRIETADO

Cuando el momento flexionante es lo suficientemente grande que los esfuerzos de tensión en las fibras extremas resulten mayores que el módulo de ruptura, se supone que todo el concreto en el lado de tensión de la viga está agrietado y se puede desechar en los cálculos de flexión.

El momento de agrietamiento de una viga es normalmente muy pequeño comparado con el momento de carga de servicio. Así, cuando se aplican las cargas de servicio, el lecho inferior de la viga se agrieta. El agrietamiento de la viga no implica necesariamente que la viga va a fallar. Las varillas de refuerzo en el lado de tensión comienzan a absorber la tensión causada por el momento aplicado.

Se supone que en el lado de tensión de la viga se da una adherencia perfecta entre las varillas de refuerzo y el concreto. Así, las deformaciones unitarias en el concreto y en el acero serán iguales a distancias iguales del eje neutro. Pero si las deformaciones unitarias en los dos materiales en un punto particular son las mismas, los esfuerzos correspondientes no serán iguales, ya que los módulos de elasticidad son diferentes. Así, los esfuerzos en los dos materiales serán proporcionales a la razón de sus módulos de elasticidad. La razón del módulo del acero al módulo del concreto se denomina *razón modular n:*

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

Si la razón modular para una viga particular es 10, el esfuerzo en el acero será 10 veces el esfuerzo en el concreto a la misma distancia del eje neutro. Otra forma de decir esto es que cuando $n = 10$, 1 plg^2 de acero tomará la misma fuerza total que 10 plg^2 de concreto.

Para la viga de la figura 2.6, las varillas de acero se han remplazado por un área equivalente de concreto ficticio (nA_s), que supuestamente puede resistir tensión. A esta área se le llama *área transformada.* La sección transversal revisada resultante o sección transformada se trata igual que en las vigas hechas

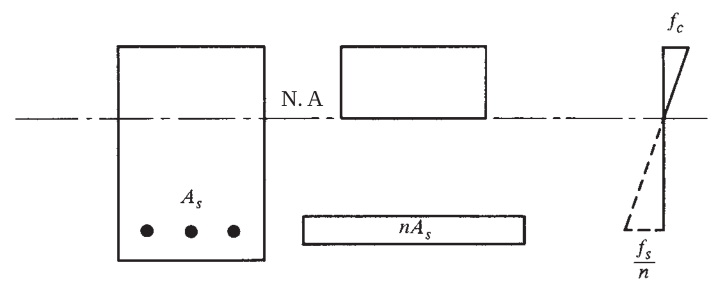
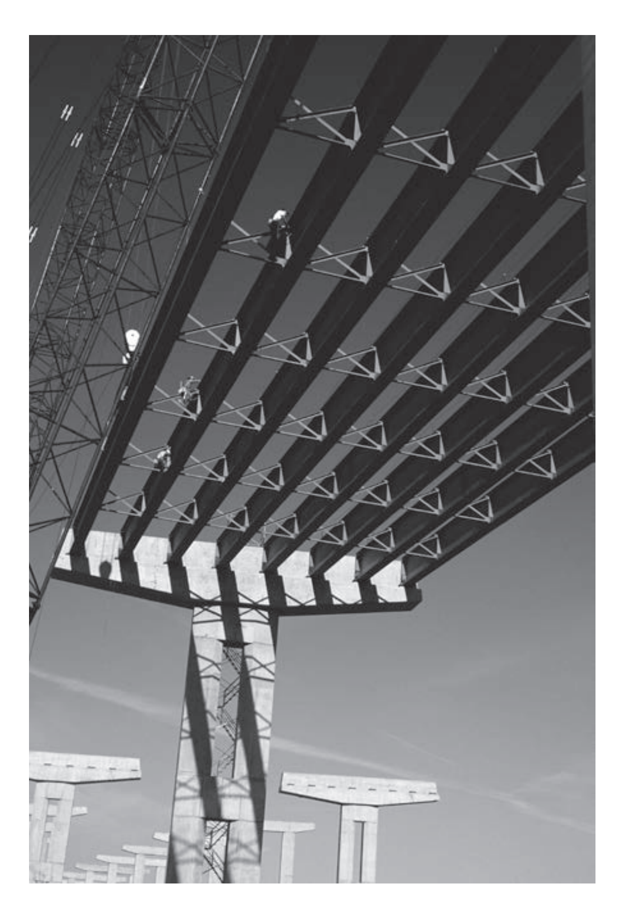


Figura 2.6



Puente de pilares y cubierta. (PhotoDisc, Inc./Getty Images.)

de un material homogéneo elástico. En la figura se muestra también un diagrama que indica la variación de los esfuerzos en la viga. En el lado de tensión se presenta una línea punteada porque el diagrama es discontinuo. En esa zona se supone que el concreto está agrietado y que no es capaz de resistir tensiones. El valor indicado al lado del acero es el esfuerzo ficticio en el concreto que se presentaría si el concreto estuviese bajo tensiones. Este valor se indica como f_s/n porque debe multiplicarse por n para dar el esfuerzo f_s *en el* acero.

Los ejemplos 2.2, 2.3 y 2.4 son problemas de secciones transformadas que ilustran los cálculos necesarios para determinar los esfuerzos y momentos resistentes en vigas de concreto reforzado. El primer paso en cada uno de estos problemas es localizar el eje neutro, que se supone situado a una distancia x de la superficie comprimida de la viga. El primer momento del área de compresión de la sección transversal de la viga respecto al eje neutro debe ser igual al primer momento del área de tensión respecto al eje neutro. La ecuación cuadrática (segundo grado) que resulta puede resolverse completando los cuadrados o usando la fórmula cuadrática.

Después de localizar el eje neutro, se calcula el momento de inercia de la sección transformada, y los esfuerzos en el concreto y en el acero se calculan con la fórmula de la flexión.

EJEMPLO 2.2

Calcular los esfuerzos de flexión en la viga mostrada en la figura 2.7 usando el método del área transformada; $f'_c =$ 3 000 lb/plg^2, $n = 9$ y $M = 70$ pie-klb.

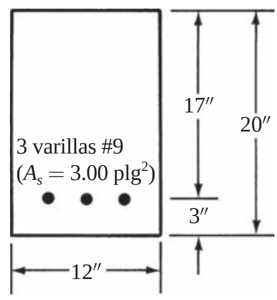


Figura 2.7

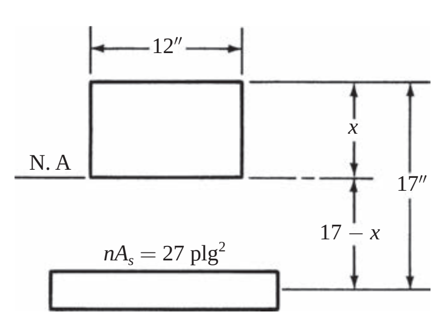


Figura 2.8

SOLUCIÓN **Tomando momentos respecto al eje neutro (remítase a la figura 2.8)**

$$(12x)\left(\frac{x}{2}\right) = (9)(3.00)(17-x)$$

$$6x^2 = 459-27.00x$$

Se resuelve la ecuación completando el cuadrado

$$6x^2 + 27.00x = 459$$

$$x^2 + 4.50x = 76.5$$

$$(x + 2.25)(x + 2.25) = 76.5 + (2.25)^2$$

$$x = 2.25 + \sqrt{76.5 + (2.25)^2} = 9.03''$$

$$x = 6.780''$$

Momento de inercia

$$I = \left(\frac{1}{3}\right)(12)(6.78)^3 + (9)(3.00)(10.22)^2 = 4\,067 \text{ plg}^4$$

Esfuerzos por flexión

$$f_c = \frac{My}{I} = \frac{(12)(70\,000)(6.78)}{4\,067} = \underline{\underline{1\,400 \text{ lb/plg}^2}}$$

$$f_s = n\frac{My}{I} = (9)\frac{(12)(70\,000)(10.22)}{4\,067} = \underline{\underline{18\,998 \text{ lb/plg}^2}}$$

EJEMPLO 2.3

Determinar el momento resistente permisible de la viga del ejemplo 2.2, si los esfuerzos permisibles son: $f_c = 1\,350$ lb/plg^2 y $f_s = 20\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN

$$M_c = \frac{f_c I}{y} = \frac{(1\,350)(4\,067)}{6.78} = 809\,800 \text{ plg-lb} = \underline{\underline{67.5 \text{ pie-klb}}} \leftarrow$$

$$M_s = \frac{f_s I}{ny} = \frac{(20\,000)(4\,067)}{(9)(10.22)} = 884\,323 \text{ plg-lb} = 73.7 \text{ pie-klb}$$

Comentario

En una viga dada, el concreto y el acero usualmente no alcanzan sus esfuerzos permisibles máximos bajo exactamente los mismos momentos flexionantes. Tal es el caso para la viga de este ejemplo, donde el concreto alcanza su esfuerzo permisible máximo bajo un momento de 67.5 pie-klb, mientras que el acero no alcanza su valor máximo sino hasta que se aplica un momento de 73.7 pie-klb. El momento resistente de la sección es de 67.5 pie-klb porque si este valor se excede, el concreto resultará sobresforzado, aun cuando el esfuerzo en el acero sea menor que el esfuerzo permisible correspondiente.

EJEMPLO 2.4

Calcular los esfuerzos de flexión en la viga mostrada en la figura 2.9 usando el método de la sección transformada; $n = 8$ y $M = 110$ pie-klb.

SOLUCIÓN **Se localiza el eje neutro (supóngase que el eje neutro se encuentra abajo de la muesca)**

$$(18x)\left(\frac{x}{2}\right) - (6)(6)(x-3) = (8)(5.06)(23-x)$$

$$9x^2 - 36x + 108 = 931 - 40.48x$$

$$9x^2 + 4.48x = 823$$

$$x^2 + 0.50x = 91.44$$

$$(x+0.25)(x+0.25) = 91.44 + (0.25)^2 = 91.50$$

$$x = 0.25 = \sqrt{91.50} = 9.57$$

$$x = 9.32'' > '' \quad \therefore \text{ la posición supuesta para el eje neutro, debajo de la muesca, es correcta}$$

Momento de inercia

$$I = \left(\tfrac{1}{3}\right)(6)(9.32)^3(2) + \left(\tfrac{1}{3}\right)(6)(3.32)^3 + (8)(5.06)(13.68)^2 = 10.887 \text{ plg}^4$$

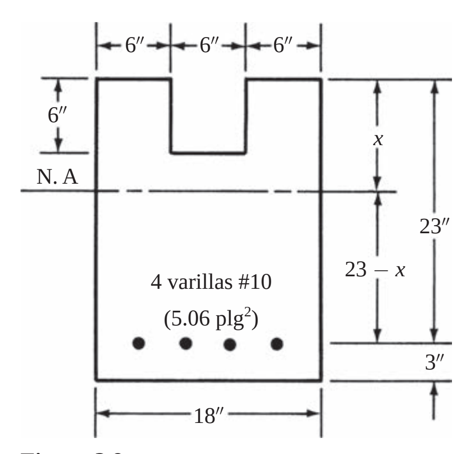


Figura 2.9

Cálculo de los esfuerzos

$$f_c = \frac{(12)(110\ 000)(9.32)}{10\ 887} = \underline{\underline{1\ 130 \text{ lb/plg}^2}}$$

$$f_s = (8)\frac{(12)(110\ 000)(13.68)}{10\ 887} = \underline{\underline{13\ 269 \text{ lb/plg}^2}}$$

El ejemplo 2.5 ilustra el análisis de una viga de concreto doblemente reforzada, es decir, de una viga que contiene acero de compresión, así como de tensión. El acero de compresión generalmente se considera antieconómico, pero se presentan casos en que es muy conveniente utilizarlo.

El acero de compresión permite usar vigas notablemente menores que aquellas con sólo acero de tensión. Los tamaños reducidos pueden ser muy importantes en los casos en que la limitación de espacio o los requisitos arquitectónicos limitan el tamaño de las vigas. El acero de compresión es muy útil para reducir las deflexiones a largo plazo y ayuda en la colocación de los estribos o del refuerzo por cortante, un tema que se verá en el capítulo 8. En el capítulo 5 se consideran en detalle las vigas doblemente reforzadas.

La cedencia o fluencia plástica del concreto se describe en la sección 1.11. Si se refuerza el lado de compresión de una viga, los esfuerzos a largo plazo en ese refuerzo serán afectados considerablemente por la cedencia en el concreto. Conforme pasa el tiempo, el concreto de compresión se compacta más firmemente, ocasionando que las varillas de refuerzo (que tienen un flujo plástico insignificante) tomen cada vez más carga.

Como consecuencia de esta cedencia en el concreto, se supone que los esfuerzos en las varillas de compresión calculados con el método del área transformada se duplican con el paso del tiempo. En el ejemplo 2.5, el área transformada de las varillas de compresión se supone igual a $2n$ veces su área A_s'.

Para el caso de "fracturas de filamento" se observará en este ejemplo que el área del acero de compresión realmente se multiplica por $2n - 1$. El área transformada del lado de compresión es igual al área de compresión total del concreto más $2nA_s'$ menos el área de los orificios en el concreto $(1A_s')$, que teóricamente no debería incluirse en la parte de concreto. Esto es igual al área del concreto de compresión más $(2n - 1)A_s'$. De modo semejante, se usa $2n - 1$ en los cálculos del momento de inercia. Los esfuerzos en las varillas de compresión se determinan multiplicando por $2n$ veces los esfuerzos en el concreto localizado a la misma distancia del eje neutro.

EJEMPLO 2.5

Calcular los esfuerzos de flexión en la viga mostrada en la figura 2.10; $n = 10$ y $M = 118$ pie-klb.

SOLUCIÓN **Localice el eje neutro**

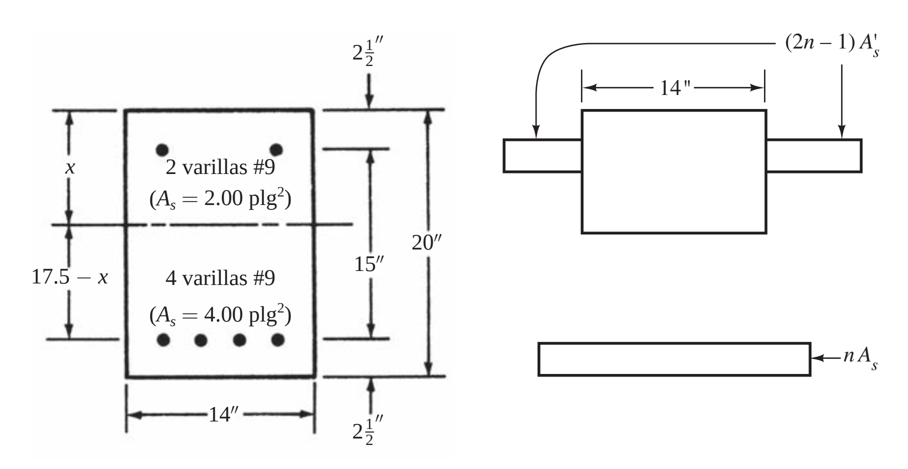
$$(14x)\left(\frac{x}{2}\right) + (20-1)(2.00)(x-2.5) = (10)(4.00)(17.5-x)$$
$$7x^2 + 38x - 95 = 700 - 40x$$
$$7x^2 + 78x = 795$$
$$x^2 + 11.14x = 113.57$$
$$x + 5.57 = \sqrt{113.57 + (5.57)^2} = 12.02$$
$$x = 6.45 \text{ plg}$$

Momento de inercia

$$I = \left(\tfrac{1}{3}\right)(14)(6.45)^3 + (20-1)(2.00)(3.95)^2 + (10)(4.00)(11.05)^2 = 6\,729 \text{ plg}^4$$

Esfuerzos de flexión

$$f_c = \frac{(12)(118\,000)(6.45)}{6\,729} = \underline{\underline{1\,357 \text{ lb/plg}^2}}$$
$$f_s' = 2n\frac{My}{I} + (2)(10)\frac{(12)(118\,000)(3.95)}{6\,729} = \underline{\underline{16\,624 \text{ lb/plg}^2}}$$
$$f_s = (10)\frac{(12)(118\,000)(11.05)}{6\,729} = \underline{\underline{23\,253 \text{ lb/plg}^2}}$$



a) Sección real b) Sección transformada

Figura 2.10

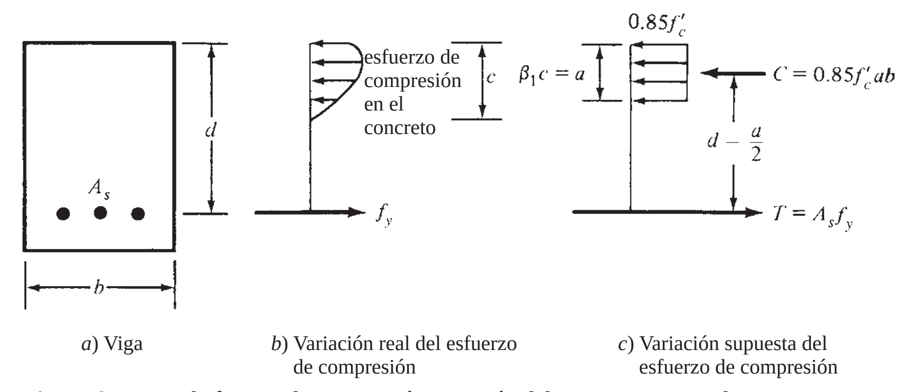
2.4 MOMENTOS ÚLTIMOS O NOMINALES DE FLEXIÓN

En esta sección se presenta una introducción muy breve al cálculo de la resistencia última o nominal a la flexión en vigas. Este tema se continúa más ampliamente en el siguiente capítulo, donde se presentan fórmulas, limitaciones, diseños y otras consideraciones. Para este análisis, se supone que las varillas de refuerzo a tensión están trabajando a su punto de cedencia antes de que falle el concreto en el lado de compresión de la viga. Veremos en el capítulo 3 que el código ACI requiere que todos los diseños de vigas se hagan bajo esta hipótesis.

Después de que los esfuerzos de compresión en el concreto exceden el valor $0.50f'_c$ ya no varían directamente a la distancia del eje neutro o como una línea recta. Su comportamiento se vuelve más bien como el que se muestra en la figura 2.11(*b*). Se supone, para los fines de este análisis, que el diagrama de compresión curvo se remplaza con uno rectangular con un esfuerzo constante de $0.85f'_c$ como se muestra en la parte (*c*) de la figura. Se considera además que el diagrama rectangular de altura a tiene el mismo c.g. (centro de gravedad) y la misma magnitud total que el diagrama curvo. (En la sección 3.4 del capítulo 3 de este texto veremos que esta distancia a se hace igual a $\beta_1 c$, donde β_1 es un valor obtenido en pruebas y especificado por el código.) Estas hipótesis nos permiten calcular fácilmente la resistencia teórica o nominal a flexión de vigas de concreto reforzado. Las pruebas experimentales avalan que con estas hipótesis usadas aquí, puede determinarse con precisión las resistencias a la flexión.

Para obtener la resistencia nominal o teórica por momento de una viga, se siguen los siguientes pasos, como se ilustra en el ejemplo 2.6.

1. Calcule la fuerza total de tensión $T = A_s f_y$.
2. Iguale la fuerza total de compresión $C = 0.85f'_c ab$ a la expresión $A_s f_y$ y despeje a. En esta expresión, ab es el área supuesta esforzada en compresión a $0.85f'_c$. La fuerza de compresión C y la fuerza *de tensión T* deben ser iguales para mantener el equilibrio en la sección.
3. Calcule la distancia entre los centros de gravedad de T y C. (Para una viga rectangular la sección transversal es igual a $d - a/2$.)
4. Determine M_n, que es igual a T o C veces la distancia entre sus centros de gravedad.



a) Viga *b*) Variación real del esfuerzo de compresión *c*) Variación supuesta del esfuerzo de compresión

Figura 2.11 Par de fuerzas de compresión y tensión del momento nominal.

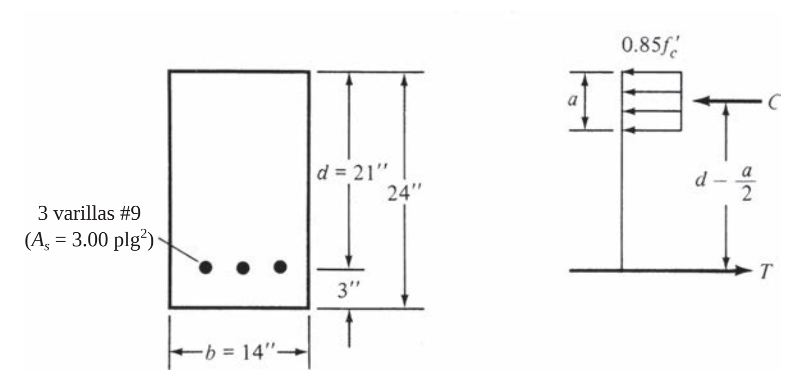


Figura 2.12

EJEMPLO 2.6

Determinar la resistencia M_n por momento último teórico o nominal de la sección de la viga mostrada en la figura 2.12, si f_y = 60 000 lb/plg^2 y $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN **Cálculo de las fuerzas *T* y *C* de tensión y compresión**

$$T = A_s f_y = (3.00)(60) = 180 \text{ klb}$$
$$C = 0.85f'_c ab = (0.85)(3)(a)(14) = 35.7a$$

Igualando *T* y *C* y despejando *a*

$$T = C \text{ por equilibrio}$$
$$180 = 35.7a$$
$$a = 5.04 \text{ plg}$$

El cálculo de $d - \frac{a}{2}$ y M_n es

$$d - \frac{a}{2} = 21 - \frac{5.04}{2} = 18.48 \text{ plg}$$
$$M_n = (180)(18.48) = 3\,326.4 \text{ plg-klb} = \underline{\underline{277.2 \text{ pie-klb}}}$$

En el ejemplo 2.7 se determina la capacidad del momento nominal de otra viga en forma análoga a como se hizo en el ejemplo 2.6. La única diferencia es que la sección transversal del área (A_c) comprimida a $0.85f'_c$ no es rectangular. Entonces, una vez calculada esta área es necesario localizar su centro de gravedad. El c.g. del área en compresión del concreto para la viga de la figura 2.13 se muestra como la distancia $\bar{y}$ desde la parte superior de la viga en la figura 2.14. Luego el brazo de palanca entre *C y T e*s igual a $d - \bar{y}$ (que corresponde a $d - a/2$ en el ejemplo 2.6) y M_n *es* igual a $A_s f_y(d - \bar{y})$.

Con este procedimiento muy simple, se pueden calcular los valores de M_n para vigas con refuerzo de tensión y cualquier sección transversal.

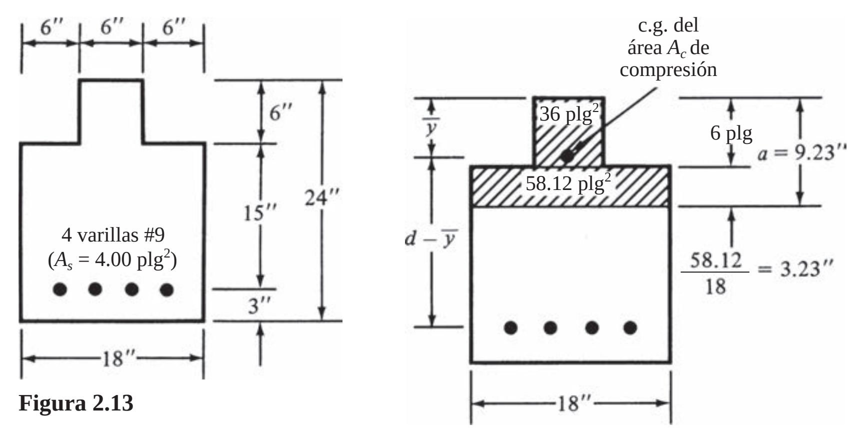


Figura 2.13

Figura 2.14

EJEMPLO 2.7

Calcule la resistencia por momento último nominal o teórico de de la sección de la viga mostrada en la figura 2.13, si $f_y = 60\ 000$ lb/plg² y $f'_c = 3\ 000$ lb/plg². Los bordes de 6 plg de ancho en la parte superior son necesarios para soportar losas de concreto precoladas.

SOLUCIÓN

$$T = A_s f_y = (4.00)(60) = 240 \text{ klb}$$

$$C = (0.85f'_c)(\text{área } A_c \text{ de concreto reforzado a } 0.85f'_c)$$

$$= 0.85f'_c A_c$$



Espigones para la base de la Guardia costera de EUA, Boston. (Cortesía de EFCO Corp.)

Igualando *T* y *C* y despejando A_c

$$A_c = \frac{T}{0.85f'_c} = \frac{240}{(0.85)(3)} = 94.12 \text{ plg}^2$$

Las 94.12 plg^2 en la parte superior de la viga en la figura 2.14 están esforzadas en compresión a $0.85f'_c$. Se puede demostrar que esta área se extiende a 9.23 plg hacia abajo desde la parte superior de la viga. Su c.g. (centro de gravedad) se localiza tomando los momentos en la parte superior de la viga como sigue:

$$\bar{y} = \frac{(36)(3) + (58.12)\left(6 + \frac{3.23}{2}\right)}{94.12} = 5.85 \text{ plg}$$

$$d - \bar{y} = 21 - 5.85 = 15.15 \text{ plg}$$

$$M_n = (240)(15.15) = 3\,636 \text{ plg-klb} = \underline{\underline{303 \text{ pie-klb}}}$$

2.5 EJEMPLO DE PROBLEMA USANDO UNIDADES SI

En el ejemplo 2.8, se calcula la resistencia nominal por momento de una viga usando unidades SI. Las tablas B.1 a B.9 en el apéndice proporcionan información concerniente a diversos grados de concreto y acero, así como a diámetros de varillas, áreas, etc., todo dado en unidades SI.

EJEMPLO 2.8

Determinar la resistencia nominal por momento de la viga mostrada en la figura 2.15 si $f'_c = 28$ MPa y $f_y = 420$ MPa.

SOLUCIÓN

$$T = C$$

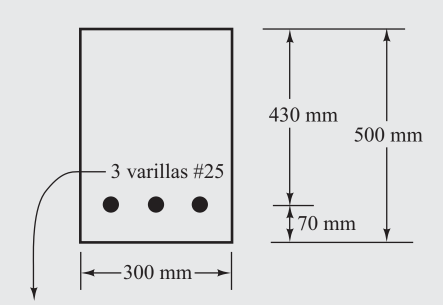
$$A_s f_y = 0.85 f'_c ab$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{(1\,530)(420)}{(0.85)(28)(300)} = 90 \text{ mm}$$

$$M_n = T\left(d - \frac{a}{2}\right) = C\left(d - \frac{a}{2}\right) = A_s f_y\left(d - \frac{a}{2}\right)$$

$$= (1\,530)(420)\left(430 - \frac{90}{2}\right)$$

$$= 2.474 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{mm} = \underline{\underline{247.4 \text{ kN} \cdot \text{m}}}$$



($A_s = 1\,530$ mm^2 de la tabla B.4 del apéndice.)

Figura 2.15

2.6 HOJAS DE CÁLCULO DE LA COMPUTADORA

En el sitio web http://virtual.alfaomega.com.mx/ para este libro de texto, se proporcionan varias hojas de cálculo para que el estudiante las use como ayuda en la solución de problemas. Se clasifican en categorías por capítulo. Observe que la mayor parte de las hojas de cálculo tienen hojas de trabajo múltiples indicadas por etiquetas en la parte inferior. Las tres hojas de trabajo disponibles para el capítulo 2 incluyen: 1) cálculo del momento de agrietamiento, 2) esfuerzos en vigas rectangulares individualmente reforzadas, 3) análisis ASD de Vigas T y 4) resistencia nominal de vigas rectangulares individualmente reforzadas.

EJEMPLO 2.9

Repita el ejemplo 2.1 usando la hoja de cálculo provista para el capítulo 2.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo del capítulo 2 y seleccione la hoja de trabajo llamada *Cracking Moment* (Momento de Agrietamiento). Capture sólo las celdas sombreadas en amarillo[2] (a continuación se dan los primeros seis valores).

$f_c' =$	**4 000**	**lb/plg²**
$M =$	**25**	**klb-pie**
$b =$	**12**	**plg**
$h =$	**18**	**plg**
$\gamma_c =$	**145**	**lb/pie³**
$\lambda =$	**1.00**	
$I_g = bh^3/12 =$	**5 832**	**plg⁴**
$f_r = 7.5\lambda\ SQRT\ (f_c')$	**474**	**lb/plg²**
$f =$	**643**	**lb/plg²**
$M_{agr} =$	**307 373**	**plg-lb**
$M_{agr} =$	**25.6**	**klb-pie**

Los últimos cinco valores son los mismos que se calcularon en el ejemplo 2.1.

EJEMPLO 2.10

Repita el ejemplo 2.2 usando la hoja de cálculo proporcionada para el capítulo 2.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo del capítulo 2 y seleccione la hoja de trabajo llamada *Elastic Stresses* (Esfuerzos elásticos). Capture sólo las celdas sombreadas en amarillo[2] (a continuación se dan los primeros siete valores).

$b =$	**12**	**plg**
$d =$	**17**	**plg**
$n =$	**9**	
$A_s =$	**3**	**plg²**
$M =$	**70**	**klb-pie**
$f_c' =$	**3 000**	**lb/plg²**
$\lambda_c =$	**145**	**lb/pie³**
$E_c =$	**3 155 924**	**lb/plg²**
$n =$	**9.19**	
$n\rho =$	**0.132**	

[2]El sombreado amarillo está en las Hojas de Cálculo de Excel, no en el ejemplo impreso.

$x =$	**6.78**	**plg**
$I_{agr} =$	**4 067**	**plg**^{4}
$f_c = Mx/I =$	**1 401**	**lb/plg**^{2}
$f_s = nM(d - x)/I =$	**18 996**	**lb/plg**^{2}

Los últimos cuatro valores son los mismos (con un pequeño redondeo) que se calcularon en el ejemplo 2.2.

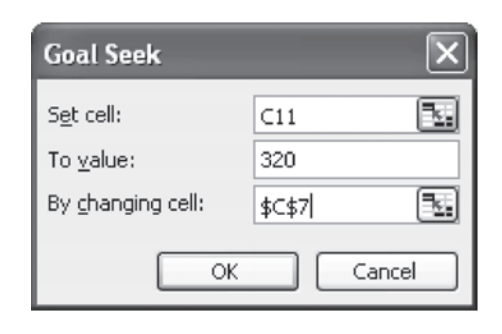
EJEMPLO 2.11

Repita el ejemplo 2.6 usando la hoja de cálculo proporcionada para el capítulo 2.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo del capítulo 2 y seleccione la hoja de trabajo llamada *Nominal Moment Strength* (Resistencia del momento nominal). Capture sólo las celdas sombreadas en amarillo[2] (a continuación se dan los primeros cinco valores).

$f'_c =$	3 000	lb/plg^2
$b =$	14	plg
$d =$	21	plg
$A_s =$	3	plg^2
$f_y =$	60	klb/plg^2
$a =$	5.04	
$M_n =$	3 326.2	plg-klb
$=$	277.2	pie-klb

La tercera hoja de trabajo llamada *Nominal Moment Strength* se puede usar para resolver fácilmente el ejemplo 2.6. En este caso, ingrese los primeros cinco valores y los resultados son los mismos que en el ejemplo. El proceso se puede invertir si se usa "goal seek" (búsqueda de objetivo). Suponga que usted desea saber cuánto acero de refuerzo, A_s, es necesario para resistir un momento, M_n, de 320 pie-klb para la viga mostrada en el ejemplo 2.6. Sombree la celda donde se calcula M_n en pie-klb (celda C11). Luego vaya a "Data" (datos) en la parte superior de la ventana de Excel y seleccione "What-If Analysis" (Análisis de qué pasa si) y "Goal seek…" (búsqueda de objetivo). La ventana Goal Seek se abrirá. En "Set cell" (selección de celda) aparece C11 porque la sombreó cuando usted seleccionó Goal Seek. En "To value" (valor), teclee 320 porque ése es el momento que usted está buscando. Finalmente, para "By changing cell" (celda que cambia) teclee C7 porque el área del acero de refuerzo es lo que usted quiere variar para producir un momento de 320 pie-klb. Haga clic en OK y el valor de A_s cambiará a 3.55. Esto quiere decir que se requiere un área de acero de 3.55 plg^2 para producir una capacidad de momento M_n de 320 pie-klb. La opción Goal Seek puede usarse de una manera similar para la mayor parte de las hojas de cálculo provistas en este texto.

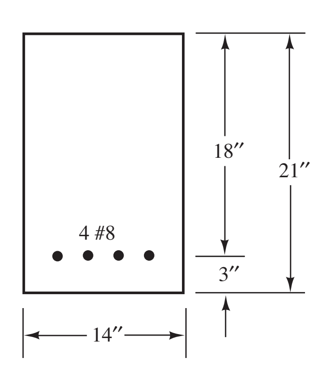


PROBLEMAS

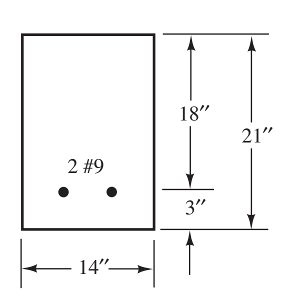
Momentos de agrietamiento

En los problemas 2.1 al 2.5, determine los momentos de agrietamiento para las secciones mostradas, si $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2 y si el módulo de ruptura $f_r = 7.5\sqrt{f'_c}$.

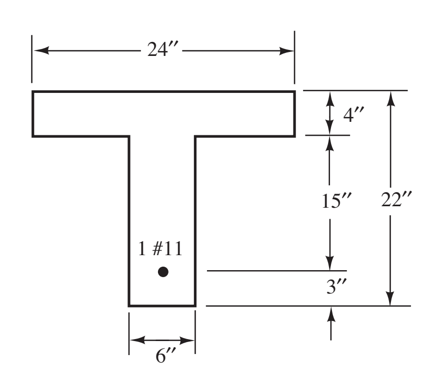
Problema 2.1 (*Resp.* 40.7 pie-klb.)



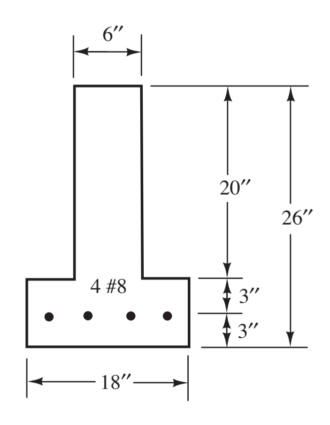
Problema 2.2.



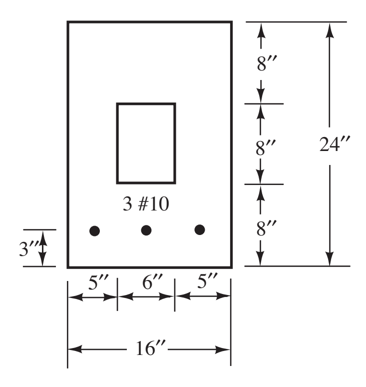
Problema 2.3 (*Resp.* 25.6 pie-klb.)



Problema 2.4

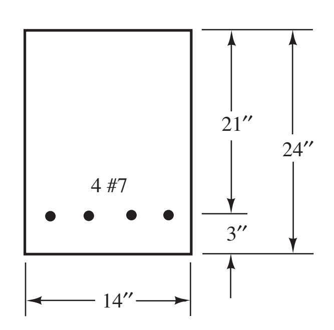


Problema 2.5 (*Resp.* 59.8 pie-klb.)

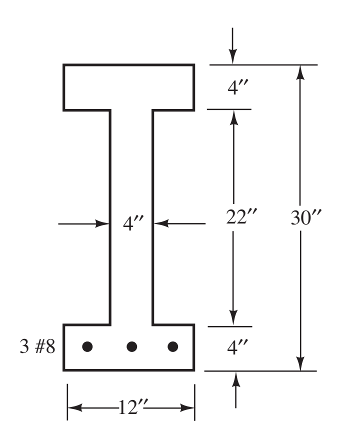


En los problemas 2.6 y 2.7 calcule la carga uniforme (adicional al peso propio de la viga) que ocasionará que las secciones empiecen a agrietarse si se usan en claros simplemente apoyados de 28 pies. $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2, $f_r = 7.5\sqrt{f'_c}$. Peso del concreto reforzado = 150 lb/pie^3.

Problema 2.6.



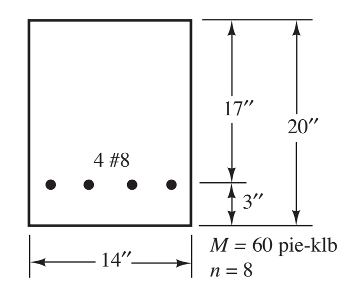
Problema 2.7 (*Resp.* 0.343 klb/pie.)



Método de la sección transformada

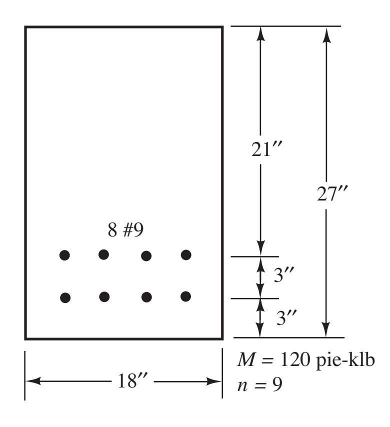
En los problemas 2.8 al 2.14, suponga que las secciones están agrietadas y use el método de la sección transformada para calcular sus esfuerzos de flexión para las cargas o momentos dados.

Problema 2.8.

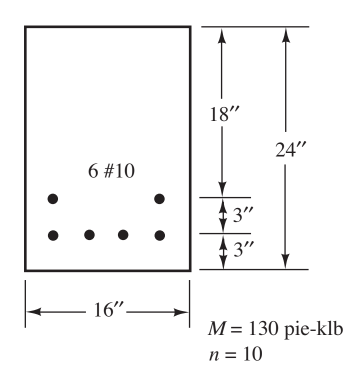


Problema 2.9 Repita el problema 2.8 si se usan cuatro varillas del #7. (*Resp.* $f_c = 1\ 214$ lb/plg^2, $f_s = 19\ 826$ lb/plg^2.)

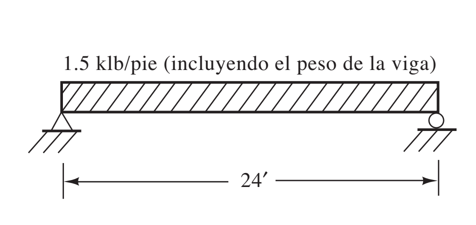
Problema 2.10

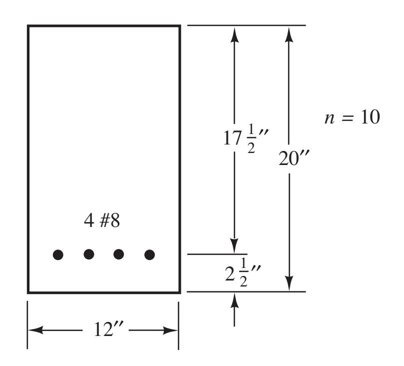


Problema 2.11 (*Resp.* $f_c = 1\ 187$ lb/plg^2, $f_s = 12\ 289$ lb/plg^2.)

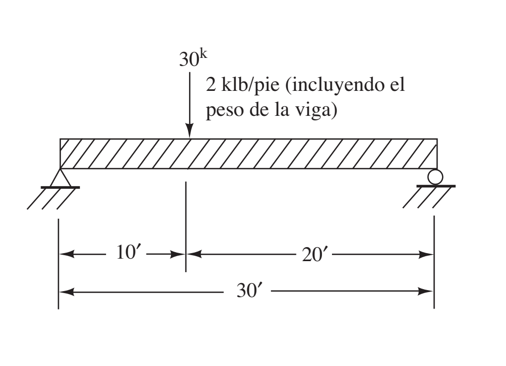


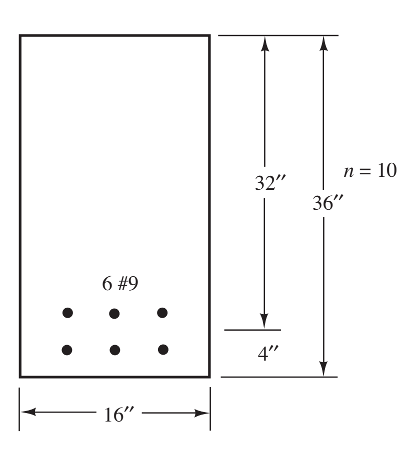
Problema 2.12



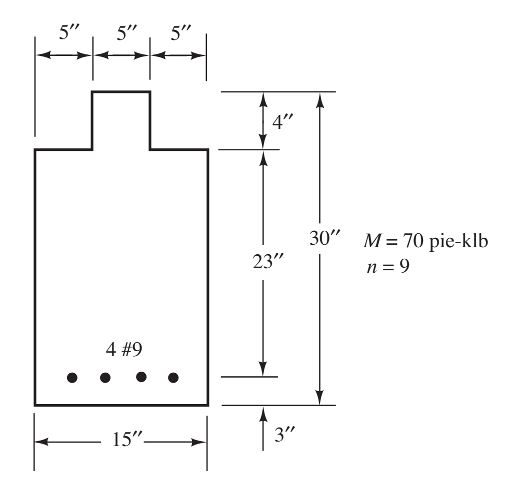


Problema 2.13 (*Resp.* f_c = 1 762 lb/plg^2, f_s = 28 635 lb/plg^2.)





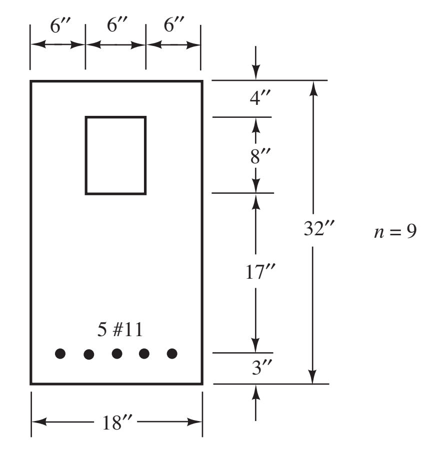
Problema 2.14



2.15 Usando el método de la sección transformada, calcule el momento resistente de la viga del problema 2.10 si f_s = 24 000 lb/plg^2 y fc = 1 800 lb/plg^2. (*Resp.* 258.8 pie-klb.)

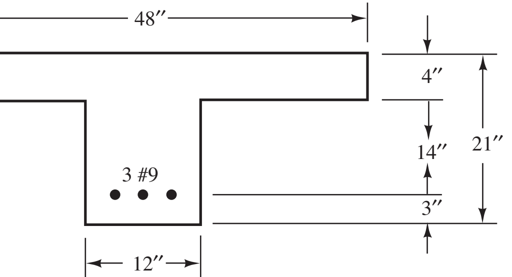
2.16 Calcule el momento resistente de la viga del problema 2.13, si se emplean ocho varillas #10 y si n = 10, f_s = 20 000 lb/plg^2 y f_c = 1 125 lb/plg^2. Use el método de la sección transformada.

2.17 Usando la sección transformada, ¿qué carga uniforme permisible puede soportar esta viga además de su propio peso para un claro simplemente apoyado de 28 pies? Peso del concreto = 150 lb/pie^3, f_s = 24 000 lb/plg^2 y f_c = 1 800 lb/plg^2. (*Resp.* 3.11 klb/pie.)

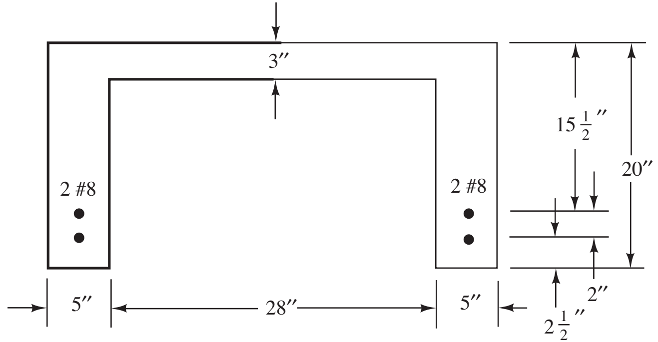


En los problemas 2.18 a 2.21 determine los esfuerzos de flexión en estos miembros, aplicando el método de la sección transformada.

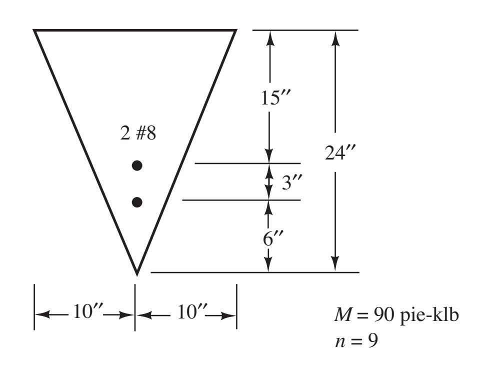
Problema 2.18



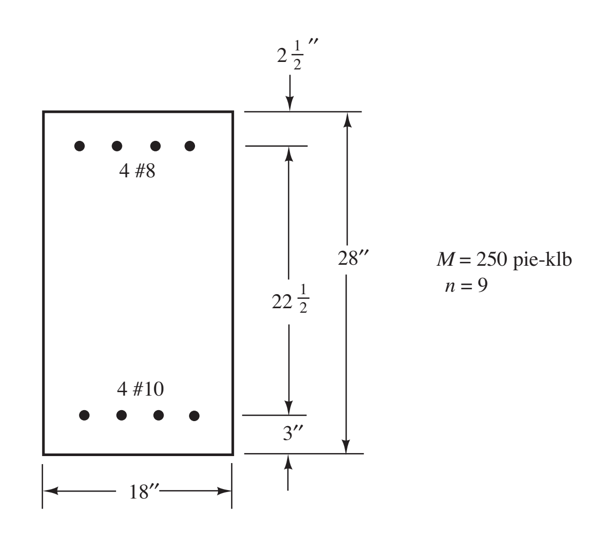
Problema 2.19 (*Resp.* $f_c = 1\ 223$ lb/plg², $f_s = 30\ 185$ lb/plg².)



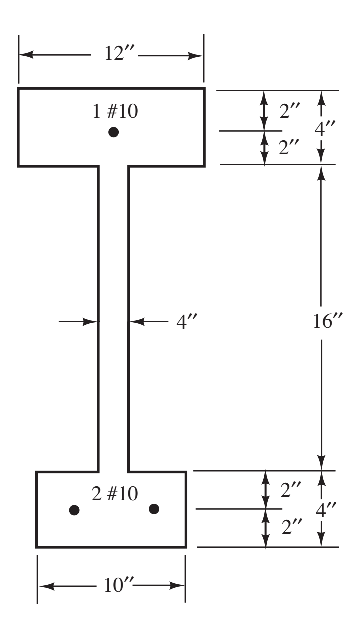
Problema 2.20



Problema 2.21 (*Resp.* $f_c = 1\ 280$ lb/plg²; $f_s' = 15\ 463$ lb/plg²; $f_s = 26\ 378$ lb/plg².)

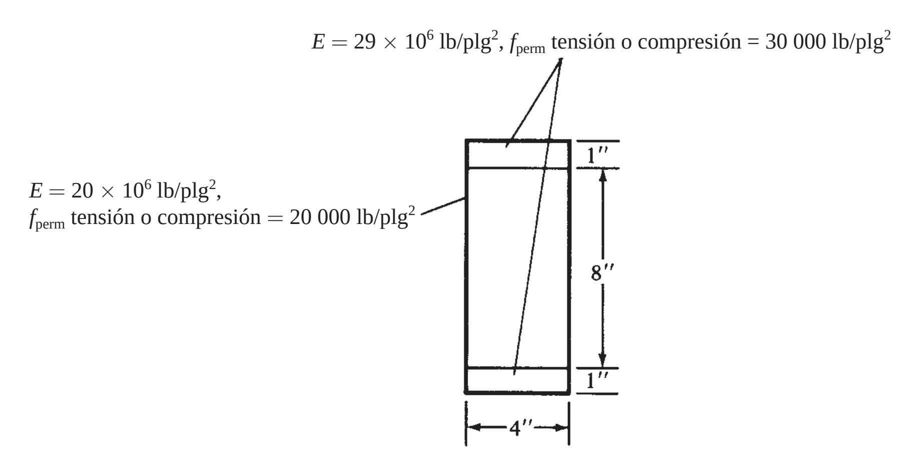


2.22 Calcule el momento resistente permisible de la sección mostrada aplicando la sección transformada, si $f_c = 1\ 800$ lb/plg^2, $f_s = f_s' = 24\ 000$ lb/plg^2 y $n = 8$.

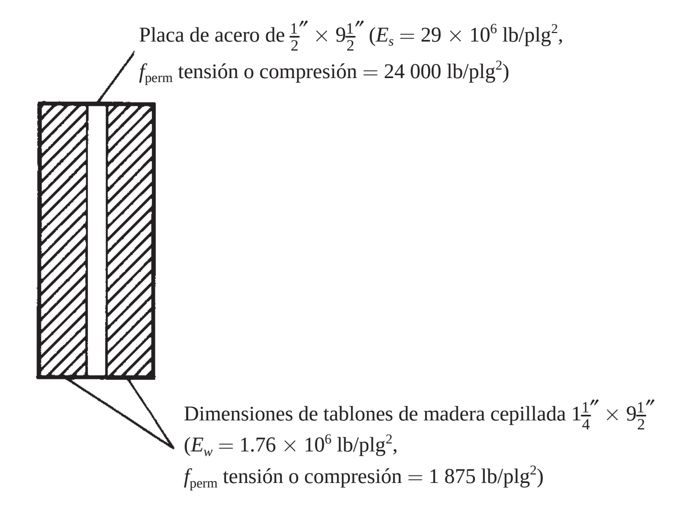


En los problemas 2.23 a 2.25 usando el método de sección transformada, determine los momentos resistentes permisibles de las secciones mostradas.

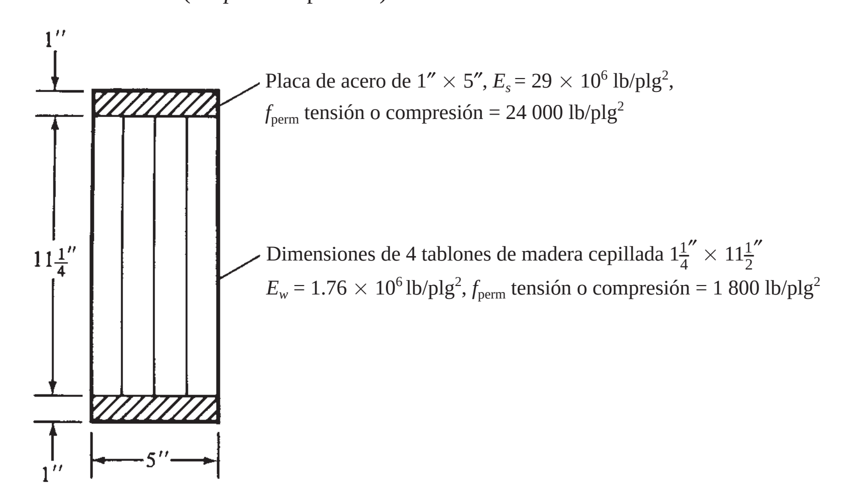
Problema 2.23 (*Resp.* 140.18 pie-klb.)



Problema 2.24.



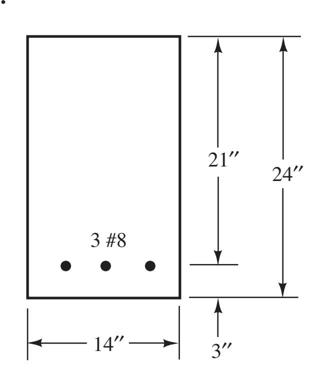
Problema 2.25 (*Resp.* 124.4 pie-klb.)



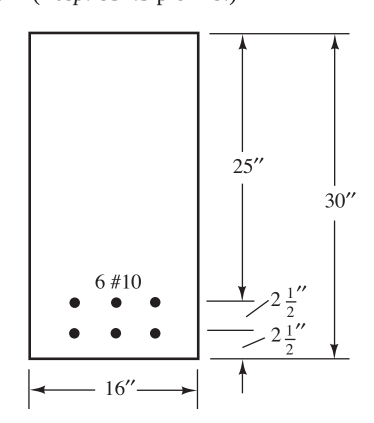
Análisis de resistencia nominal

En los problemas 2.26 a 2.29 determine la capacidad por momento nominal o teórico M_n de cada viga, si $f_y = 60\,000$ lb/plg^2 y $f_c' = 4\,000$ lb/plg^2.

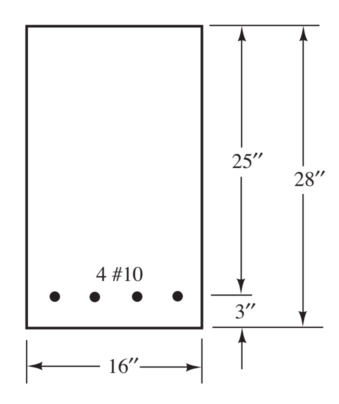
Problema 2.26.



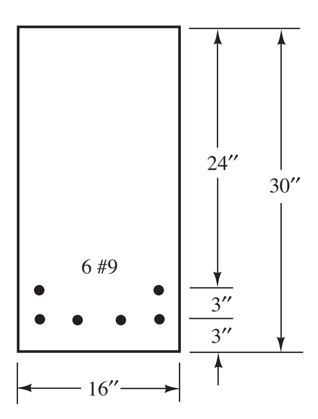
Problema 2.27 (*Resp.* 837.3 pie-klb.)



Problema 2.28



Problema 2.29 (*Resp.* 680.7 pie-klb.)

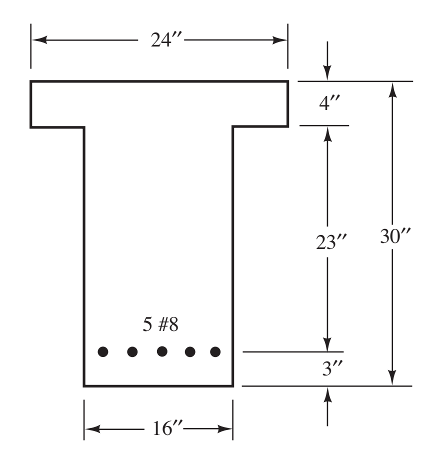


Para los problemas 2.30 a 2.34, determine la capacidad nominal por momento M_n para cada una de las vigas rectangulares.

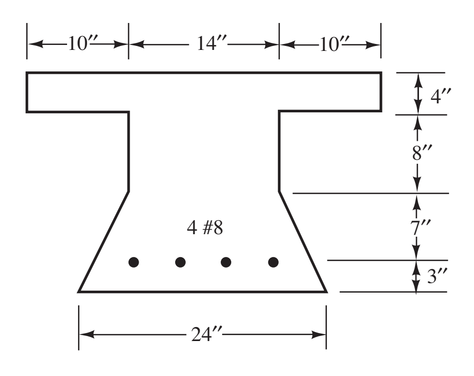
Prob. No.	b (plg)	d (plg)	Varillas	f'_c (klb/plg^2)	f_y(klb/plg^2)	Resp.
2.30	14	21	3 #9	4.0	60	—
2.31	18	28.5	8 #10	4.0	60	1 191.1 pie-klb
2.32	14	20.5	4 #10	5.0	60	—
2.33	18	25.5	4 #11	5.0	75	876.4 pie-klb
2.34	22	36	6 #11	3.0	60	—

Para los problemas 2.35 a 2.39, determine M_n si $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2.

Problema 2.35 (*Resp.* 502.2 pie-klb.)



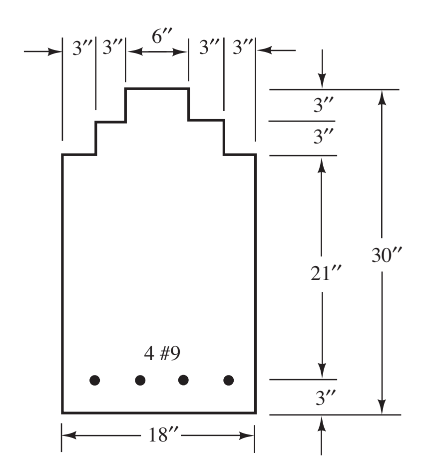
Problema 2.36



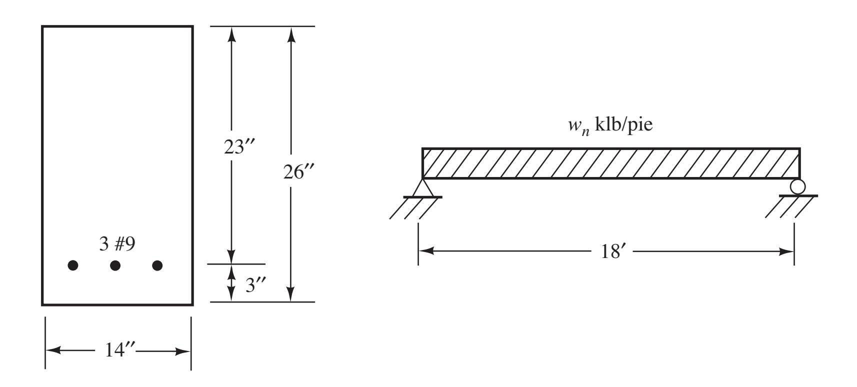
2.37 Repita el problema 2.35 si se emplean cuatro varillas #11. (*Resp.* 771.3 pie-klb.)

2.38 Calcule M_n para la viga del problema 2.36 si se emplean seis varillas #8.

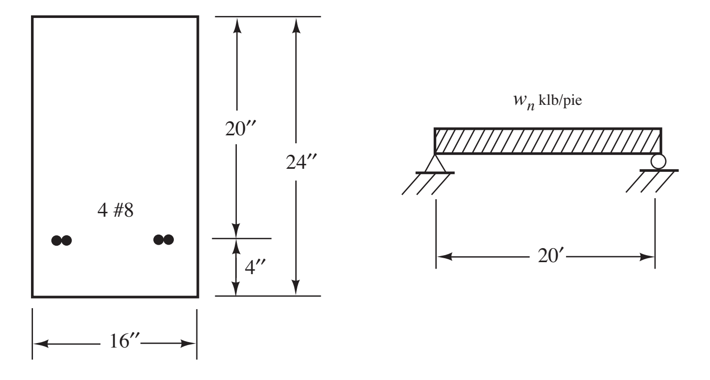
Problema 2.39 (*Resp.* 456 pie-klb.)



2.40 Determine la carga nominal uniforme, w_n (incluyendo el peso de la viga), que cause un momento flexionante igual a $M_n \times$ $f_y = 60\,000$ lb/plg^2 $f_c' = 4\,000$ lb/plg^2.



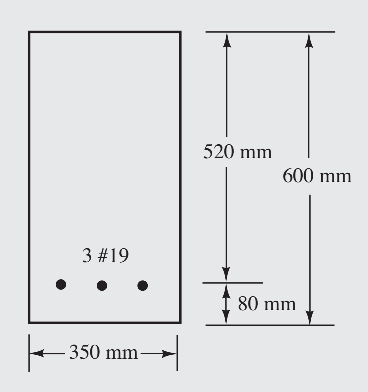
2.41 Determine la carga nominal uniforme, w_n (incluyendo el peso de la viga), que cause un momento flexionante igual a $M_n \times$ $f_c' = 3\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2 (*Resp.* 5.74 klb/pie.)



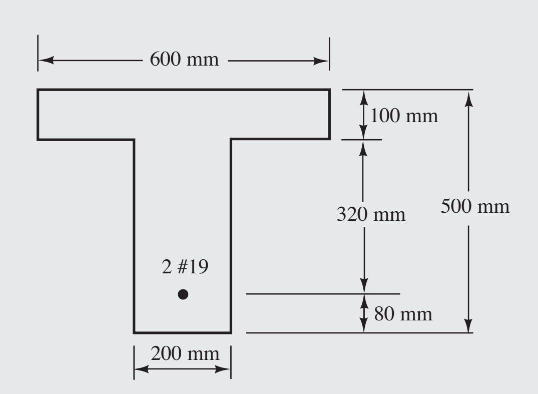
Problemas con unidades SI

En los problemas 2.42 a 2.44, determine los momentos de agrietamiento para las secciones mostradas si $f'_c = 28$ MPa y si el módulo de ruptura es $f_r = 0.7\sqrt{f'_c}$ con f'_s en MPa.

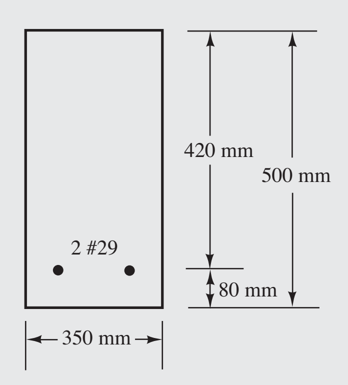
Problema 2.42



Problema 2.44

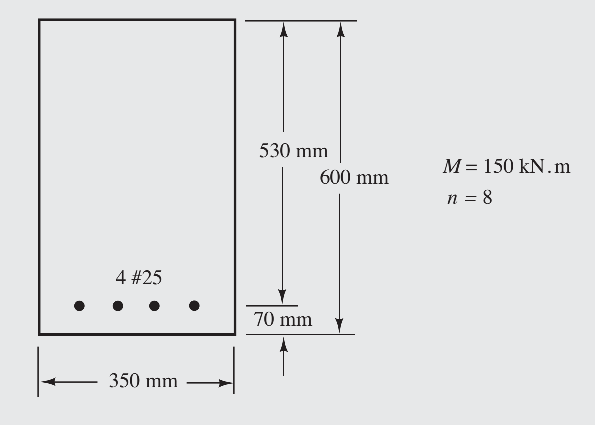


Problema 2.43 (*Resp.* 54.0 kN-m.)

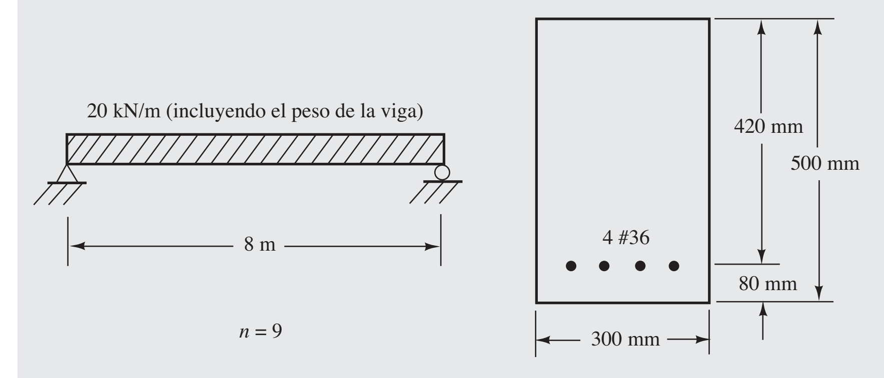


En los problemas 2.45 a 2.47 calcule los esfuerzos de flexión en el concreto y el acero para las vigas mostradas, usando el método de la sección transformada.

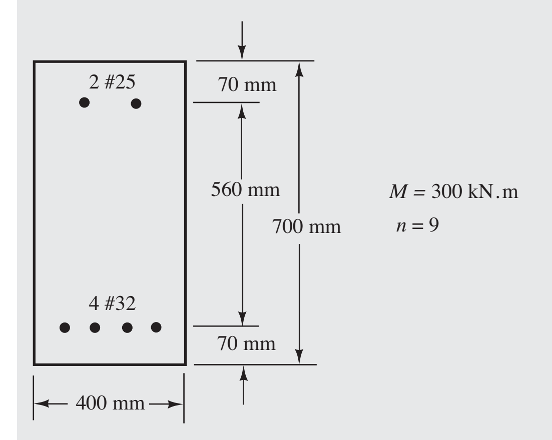
Problema 2.45 (*Resp.* $f'_c = 10.07$ MPa, $f_s = 155.9$ MPa.)



Problema 2.46



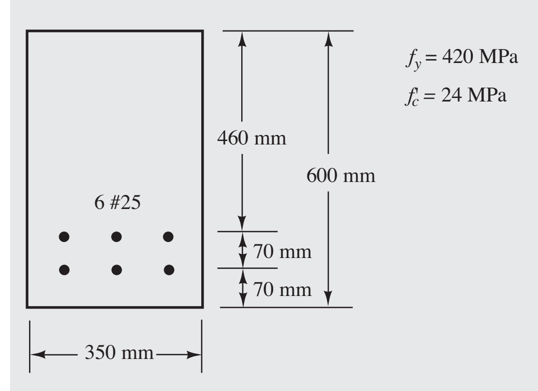
Problema 2.47 (*Resp*. $f_c = 9.68$ MPa, $f_s' = 118.4$ MPa, $f_s = 164.1$ MPa.

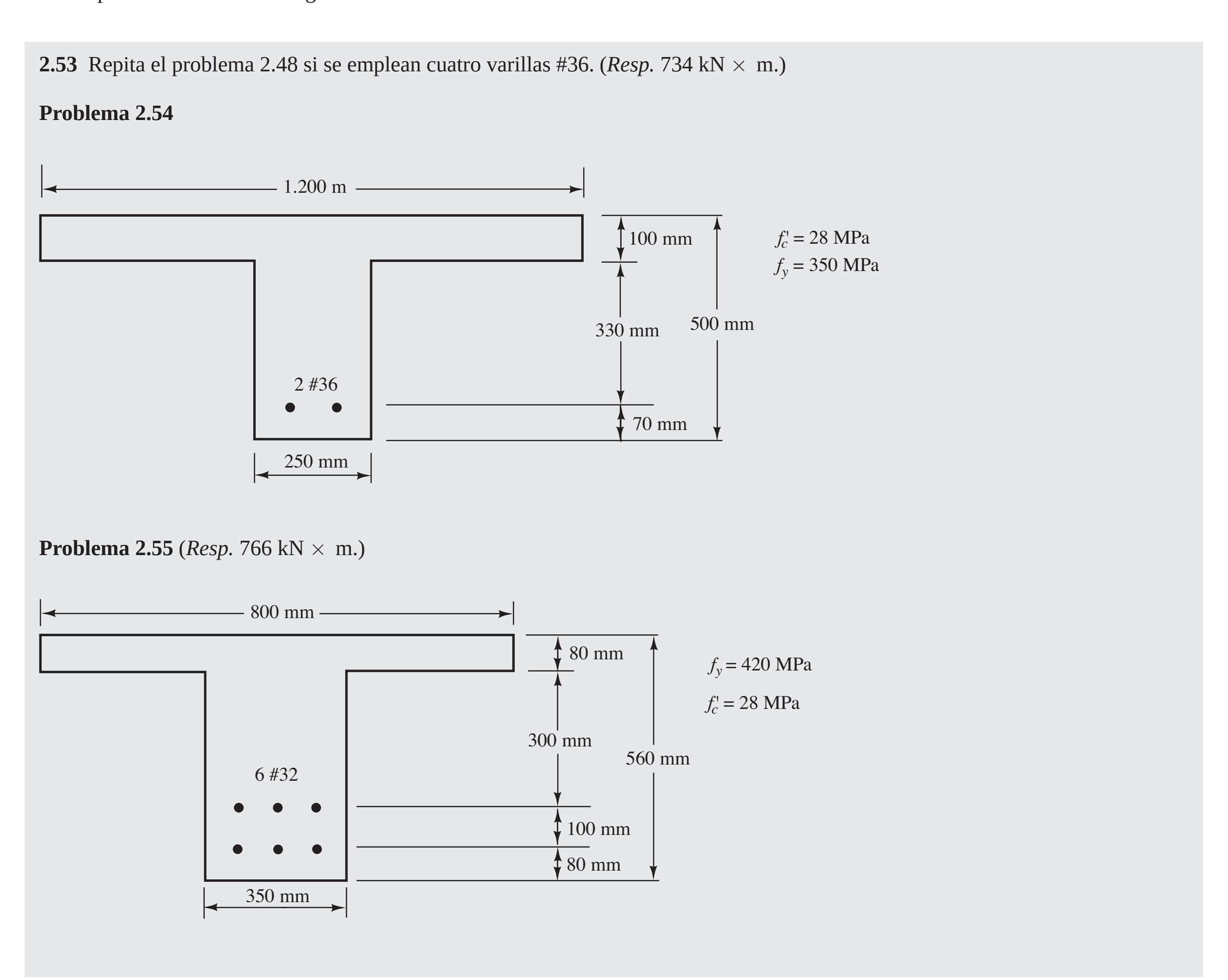


En los problemas 2.48 a 2.55, calcule los valores de M_n.

Prob. No.	b (mm)	d (mm)	Varillas	f_c'(MPa)	f_y (MPa)	Respuesta
2.48	300	600	3 #36	35	350	—
2.49	320	600	3 #36	28	350	560.5 kN-m
2.50	350	530	3 #25	24	420	—
2.51	400	660	3 #32	42	420	644 kN-m

Problema 2.52





2.53 Repita el problema 2.48 si se emplean cuatro varillas #36. (*Resp.* 734 kN × m.)

Problema 2.54

Problema 2.55 (*Resp.* 766 kN × m.)

2.56 Repita el problema 2.27 usando las hojas de cálculo del capítulo 2.

2.57 Repita el problema 2.28 usando las hojas de cálculo del capítulo 2. (*Resp.* 561.9 pie-klb.)

2.58 Elabore un diagrama de flujo para la determinación de M_n para una viga rectangular de concreto reforzado para tensión.

3

Análisis por resistencia de vigas de acuerdo con el código ACI

3.1 MÉTODOS DE DISEÑO

Desde principios del siglo XX hasta los primeros años de la década de 1960, casi todo el diseño de estructuras de concreto reforzado en Estados Unidos se hizo aplicando el método de diseño de esfuerzos de trabajo (llamado también *diseño por esfuerzos permisibles* o *diseño lineal*). En este método, frecuentemente llamado WSD (*Working Stress Design*), se calculan primero las cargas muertas y vivas, llamadas *cargas de trabajo* o *cargas de servicio*, que han de ser soportadas. Luego se determina el tamaño de los miembros de la estructura, de manera que los esfuerzos calculados por medio del método de la sección transformada no excedan de ciertos valores límites o permisibles.

Desde 1963 el método del diseño por resistencia última ha ganado rápidamente mucha popularidad, debido a que: 1) usa un enfoque más racional que el método de diseño de esfuerzos de trabajo (WSD); 2) usa una consideración más realista del concepto de seguridad y 3) conduce a diseños más económicos. En este método (llamado actualmente *diseño por resistencia*) las cargas actuantes muertas y vivas se multiplican por ciertos factores de carga (equivalentes a factores de seguridad) y los valores resultantes se llaman *cargas factorizadas*. Los miembros se seleccionan entonces de manera que teóricamente fallen justo bajo las cargas factorizadas.

Aunque casi todas las estructuras de concreto reforzado que el lector encontrará serán diseñadas por el método de diseño por resistencia, es conveniente que esté familiarizado con el método de diseño de esfuerzos de trabajo, por las siguientes razones. Éstas incluyen las siguientes:

1. Algunos proyectistas usan el método de diseño de esfuerzos de trabajo (WSD) para diseñar estructuras que contienen líquidos (como tanques de agua y diversas estructuras sanitarias). Cuando estas estructuras se diseñan por WSD, los esfuerzos se mantienen a niveles bastante bajos, por lo que el agrietamiento resulta considerablemente menor y en consecuencia se tienen menos filtraciones. (Si el proyectista usa el método de diseño por resistencia y hace uso de los métodos apropiados para el control del agrietamiento que se describen en el capítulo 6, se tendrán pocos problemas de filtración.)
2. El método ACI para calcular los momentos de inercia usados en el cálculo de las deflexiones, requiere el conocimiento en alguna medida del método de los esfuerzos de trabajo.
3. El diseño de miembros de concreto presforzado se basa no sólo en el método de resistencia, sino también en los cálculos de esfuerzo elástico en las condiciones de carga de servicio.

El lector debe darse cuenta que el diseño de esfuerzos de trabajo tiene varias desventajas. Al usar el método, el proyectista tiene un conocimiento limitado en lo que se refiere a las magnitudes de los factores de seguridad contra el colapso; no se considera el hecho de que es deseable aplicar diferentes factores de seguridad para las cargas muertas y las cargas vivas; el método no toma en cuenta las variaciones en las resistencias y las cargas, ni la posibilidad de que al incrementarse las cargas, algunas aumentan más que otras.

En 1956, el código ACI incluyó por primera vez, como un apéndice, el diseño por resistencia última, aunque los códigos para concreto de varios otros países estaban basados en tales consideraciones

desde hacía varias décadas. En 1963 el código puso a la par el diseño de resistencia última con el diseño de esfuerzos de trabajo, el código de 1971 le dio preponderancia al método de resistencia y sólo mencionó brevemente el método por esfuerzos de trabajo. Desde 1971 hasta 1999 cada edición del código permitió a los proyectistas usar el diseño de esfuerzos de trabajo y estableció ciertas disposiciones para su aplicación. *Sin embargo, a partir del código de 2002, no hay permiso para usar el método.*

El método de diseño de la actualidad se llamó durante varias décadas *diseño por resistencia última;* pero como se mencionó, el código ahora usa el término *diseño por resistencia*. La resistencia de un miembro específico de concreto reforzado es un valor dado por el código y no es necesariamente la verdadera resistencia última del miembro. Por consiguiente, se usa el término más general *diseño por resistencia*, ya sea referido a la resistencia de vigas, a la resistencia de columnas, a la resistencia al cortante u otras.

3.2 VENTAJAS DEL DISEÑO POR RESISTENCIA

Algunas de las ventajas que tiene el método de diseño por resistencia en comparación con el método de diseño de esfuerzos de trabajo, que ya no está permitido, son las siguientes:

1. La obtención de las expresiones del diseño por resistencia toma en cuenta la forma no lineal del diagrama esfuerzo-deformación unitaria. Cuando se aplican las ecuaciones resultantes, decididamente se obtienen mejores estimaciones de la capacidad de carga.
2. Con el diseño por resistencia, se usa una teoría más consistente para el diseño de estructuras de concreto reforzado. Por ejemplo, en el diseño por esfuerzos de trabajo se usaban el método de área transformada o el de línea recta para diseño de vigas y se usaba un procedimiento de diseño por resistencia para las columnas.
3. En el diseño por resistencia se usa un factor de seguridad más realista. El proyectista ciertamente puede estimar las magnitudes de las cargas muertas que una estructura tendrá que soportar con más exactitud que al estimar las cargas vivas y ambientales. Con el método de diseño por esfuerzos de trabajo se usaba el mismo factor de seguridad para cargas muertas, vivas y ambientales. Éste no es el caso para el diseño por resistencia. Por esta razón, el uso de diferentes factores de carga o de seguridad en el diseño por resistencia para los diferentes tipos de cargas es una mejoría definitiva.
4. Una estructura diseñada con el método de resistencia tendrá un factor de seguridad más uniforme contra el colapso. El método de resistencia aprovecha ventajosamente los aceros de alta resistencia, mientras que el diseño por esfuerzos de trabajo sólo lo hacía parcialmente. El resultado es una mayor economía al emplear el diseño por resistencia.
5. El método por resistencia permite diseños más flexibles que el método por esfuerzos de trabajo. Por ejemplo, el porcentaje de acero puede variar bastante. En consecuencia, se pueden usar grandes secciones con porcentajes pequeños de acero, o bien secciones pequeñas con grandes porcentajes de acero. Tales variaciones no tenían cabida en el método por esfuerzos de trabajo más rígido. Si se usa la misma cantidad de acero en el diseño por resistencia para una viga específica, tal como se habría usado con WSD, resultará una sección más pequeña. Si se usa el mismo tamaño de sección requerido por WSD, será requerida una cantidad más pequeña de acero.

3.3 SEGURIDAD ESTRUCTURAL

La seguridad estructural de una estructura de concreto reforzado puede calcularse con dos métodos. El primer método implica calcular los esfuerzos causados por las cargas de trabajo o de servicio y su comparación con ciertos esfuerzos permisibles. Usualmente, el factor de seguridad contra el colapso cuando se usaba el método por esfuerzos de trabajo era el menor de los valores f'_c/f_c o f_y/f_s.



Water Tower Place, Chicago, Illinois, el edificio más alto de concreto reforzado en Estados Unidos (74 niveles, 859 pies). (Cortesía de Symons Corporation.)

El segundo enfoque para la seguridad estructural es el que se usa en el diseño por resistencia, en el cual se considera la incertidumbre. Las cargas de trabajo se multiplican por ciertos factores de carga que son mayores que uno. Las cargas resultantes mayores o factorizadas se usan para diseñar la estructura. Los valores de los factores de carga varían de acuerdo con el tipo y combinación de las cargas.

Para calcular con precisión la resistencia última de una estructura, es necesario tomar en cuenta las incertidumbres en la resistencia de los materiales, las dimensiones y la mano de obra. Esto se hace multiplicando la resistencia última teórica (llamada aquí *resistencia nominal*) de cada miembro por *el factor ϕ de reducción de resistencia*, que es menor que uno. Estos valores generalmente varían de 0.90 para flexión hasta 0.65 para algunas columnas.

En resumen, el enfoque del diseño por resistencia con respecto a la seguridad, es seleccionar un miembro cuya capacidad última de carga calculada multiplicada por su factor de reducción de resistencia sea al menos igual a la suma de las cargas de servicio multiplicadas por sus factores de carga respectivos.

Las capacidades de los miembros obtenidas con el método de resistencia son sensiblemente más exactas que las obtenidas con el método de los esfuerzos de trabajo.

3.4 OBTENCIÓN DE EXPRESIONES PARA VIGAS

Las pruebas de vigas de concreto reforzado confirman que las deformaciones unitarias varían en proporción a las distancias del eje neutro, aun en los lados de tensión y aun en la cercanía de cargas últimas. Los esfuerzos de compresión varían aproximadamente en forma lineal hasta que el esfuerzo máximo es igual a aproximadamente $0.50f'_c$. Sin embargo, éste no es el caso cuando los esfuerzos son mayores. Cuando se alcanza la carga última, las variaciones de las deformaciones unitarias y de los esfuerzos son aproximadamente como se muestra en la figura 3.1.

Los esfuerzos de compresión varían desde cero en el eje neutro hasta un valor máximo en la fibra extrema o cerca de ella. La variación real del esfuerzo y la posición real del eje neutro varían de viga en

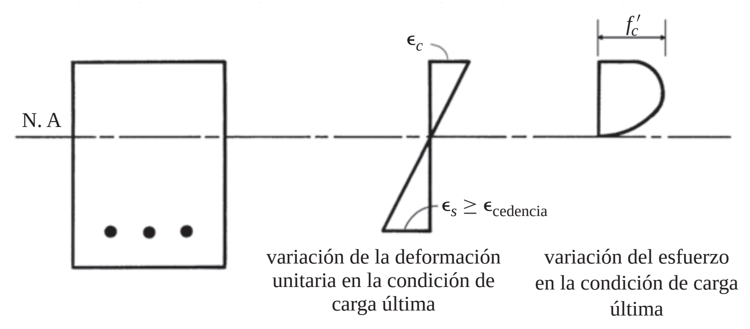


Figura 3.1 Carga última.

viga dependiendo de variables tales como la magnitud y el historial de las cargas pasadas, de la contracción y el revenimiento del concreto, del tamaño y la separación de las grietas de tensión, de la rapidez de carga, etcétera.

Si la forma del diagrama de esfuerzos fuera la misma para todas las vigas, no sería difícil deducir un solo conjunto de fórmulas para el comportamiento a flexión. Sin embargo, debido a estas variaciones de los esfuerzos, es necesario sustentar el diseño de resistencia en una combinación de teoría y resultados experimentales.

Aunque la distribución real de esfuerzos dada en la figura 3.2*b*) puede parecer importante, en la práctica cualquier forma supuesta (rectangular, parabólica, trapezoidal, etc.) se puede usar si las ecuaciones resultantes se comparan favorablemente con los resultados experimentales. Los perfiles más comunes propuestos son el rectángulo, la parábola y el trapecio, con el perfil rectangular usado en este texto como se muestra en la figura 3.2*c*) siendo el más común.

Si se supone que el concreto se aplasta bajo una deformación unitaria de aproximadamente 0.003 (valor un tanto conservador para la mayoría de los concretos) y que el acero cede bajo f_y, es posible obtener fórmulas de flexión para vigas, sin conocer la distribución exacta de los esfuerzos. Sin embargo, es necesario conocer el valor de la compresión total y su centroide.

Whitney[1] remplazó el bloque curvo de esfuerzos por un bloque rectangular equivalente de intensidad $0.85f'_c$ y altura $\alpha = \beta_1 c$, como se muestra en la figura 3.2*c*). El área de este bloque rectangular debe ser igual a la del bloque curvo de esfuerzos y los centroides de los dos bloques deben coincidir. Existen suficientes resultados de pruebas en vigas de concreto como para poder obtener la altura del bloque de

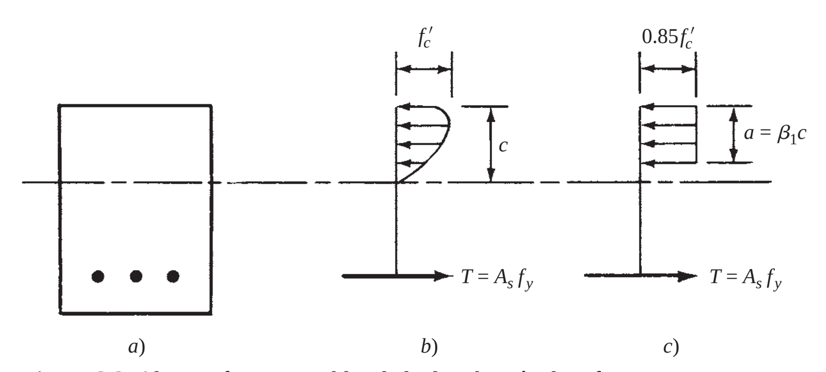


Figura 3.2 Algunas formas posibles de la distribución de esfuerzos.

[1]Whitney, C.S., 1942, "Plastic Theory of Reinforced Concrete Design", *Transactions ASCE,* 107, págs. 251-326.

esfuerzos rectangular equivalente. Por medio de los valores β_1 dados en el código (10.2.7.3) se puede obtener este resultado. Para valores f'_c de 4 000 lb/plg^2 o menores, $\beta_1 = 0.85$ y debe reducirse continuamente a razón de 0.05 por cada incremento de 1 000 lb/plg^2 en f'_c por arriba de 4 000 lb/plg^2. Su valor no debe ser menor que 0.65. Los valores de β_1 se reducen para concretos de alta resistencia, debido primordialmente a las formas de sus curvas esfuerzo-deformación unitaria (véase la figura 1.1).

Para concretos con $f'_c > 4\,000$ lb/plg^2, β_1 puede determinarse con la siguiente fórmula:

$$\beta_1 = 0.85 - \left(\frac{f'_c - 4\,000}{1\,000}\right)(0.05) \geq 0.65$$

En unidades SI, β_1 debe tomarse igual a 0.85 para resistencias del concreto de hasta 30 MPa inclusive. Para resistencias mayores a 30 MPa, β_1 se debe reducir continuamente a razón de 0.05 por cada 7 MPa de resistencia en exceso de 30 MPa, pero no se tomará menor que 0.65.

Para concretos con $f'_c > 30$ MPa; β_1 se puede determinar con la siguiente expresión:

$$\beta_1 = 0.85 - 0.008(f'_c - 30) \geq 0.65$$

Con base en estas hipótesis relativas al bloque de esfuerzos, se pueden escribir fácilmente las ecuaciones de estática para la suma de las fuerzas horizontales y para el momento resistente producido por el par interno. De estas ecuaciones pueden despejarse separadamente los valores de a y del momento M_n.

Aquí debemos hacer una aclaración referente al término M_n, porque de otra manera puede ser confuso para el lector. M_n se define como el momento resistente teórico o nominal de una sección. En la sección 3.3 se estableció que la resistencia útil de un miembro es igual a su resistencia teórica multiplicada por el factor de reducción de resistencia, o sea, ϕMn. La resistencia utilizable por flexión de un miembro, ϕM_n, al menos debe ser igual al momento factorizado calculado, M_u, causado por las cargas factorizadas

$$\phi M_n \geq M_u$$

Para la deducción de las expresiones de la viga, véase la figura 3.3. Igualando las fuerzas horizontales C y T y despejando a, se obtiene,

$$0.85 f'_c ab = A_s f_y$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{\rho f_y\, d}{0.85 f'_c}, \quad \text{donde } \rho = \frac{A_s}{bd} = \text{porcentaje de acero de tensión}$$

Como el acero de refuerzo está limitado a una cantidad tal que lo haga ceder antes de que el concreto alcance su resistencia última, el valor del momento nominal M_n puede escribirse como

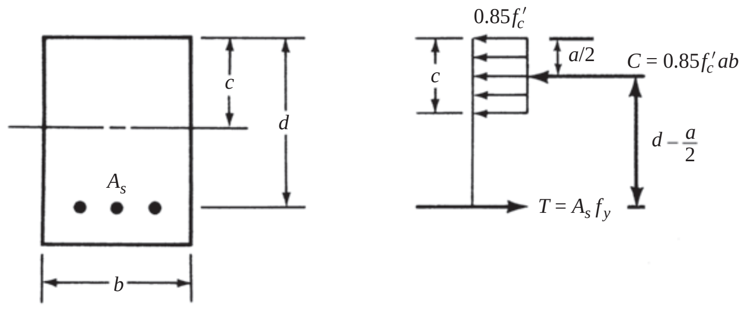


Figura 3.3

$$M_n = T\left(d - \frac{a}{2}\right) = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right)$$

y la resistencia útil a flexión es

$$\phi M_n = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) \quad \text{(Ecuación 3-1)}$$

Si sustituimos en esta expresión el valor previamente obtenido para a (fue $\rho f_y d/0.85 f'_c$), remplazamos A_s con ρbd e igualamos ϕM_n con M_u, obtenemos la siguiente expresión:

$$\phi M_n = M_u = \phi b d^2 f_y \rho \left(1 - \frac{\rho f_y}{1.7 f'_c}\right) \quad \text{(Ecuación 3-2)}$$

Reemplazando A_s con ρbd y haciendo $R_n = M_u/\phi b d^2$, podemos despejar esta expresión para obtener ρ (el porcentaje de acero requerido para una viga particular) con los siguientes resultados:

$$\rho = \frac{0.85 f'_c}{f_y}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2R_n}{0.85 f'_c}}\right) \quad \text{(Ecuación 3-3)}$$

En lugar de sustituir valores en esta ecuación para obtener ρ cuando se trata de secciones rectangulares, el lector encontrará que las tablas A.8 a A.13 en el apéndice A de este texto son realmente convenientes. (Para unidades SI remítase a las tablas B.8 y B.9 en el apéndice B.) Otra forma de obtener la misma información es remitirse a la gráfica 1 que está también localizada en el apéndice A. Sin embargo, el usuario tendrá alguna dificultad para leer con exactitud esta gráfica en pequeña escala. Esta expresión para ρ es también muy útil para las secciones rectangulares reforzadas a tensión que no están en las tablas. Más tarde en este capítulo se presenta también una técnica iterativa para la determinación del área de acero de refuerzo.

3.5 DEFORMACIONES UNITARIAS EN MIEMBROS SUJETOS A FLEXIÓN

Como se mencionó anteriormente, la sección 10.2.2 del código establece la hipótesis de que las deformaciones unitarias en miembros de concreto y su refuerzo varían en forma directamente proporcional a las distancias de sus ejes neutros. (Esta hipótesis no es aplicable a miembros sometidos a flexión profunda cuyas profundidades en sus tramos libres son mayores a 0.25.) Además, en la sección 10.2.3 el código establece que la deformación unitaria máxima útil en las fibras extremas de compresión de un miembro sometido a flexión debe ser 0.003. Finalmente, la sección 10.3.3 establece que para el refuerzo de Grado 60 y para todo el refuerzo presforzado podemos establecer que la deformación unitaria en el acero es igual a 0.002 en la condición de balance. (Teóricamente, para acero a 60 000 lb/plg^2 es igual a $\frac{f_y}{E_s} = \frac{60\,000}{29 \times 10^6} = 0.00207$.)

En la sección 3.4 se obtuvo un valor para a, la altura del bloque equivalente de esfuerzos de una viga. Puede relacionarse con c mediante el factor β_1 también dado en esa sección.

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \beta_1 c$$

Entonces la distancia c desde las fibras extremas del concreto en compresión al eje neutro es

$$c = \frac{a}{\beta_1}$$

En el ejemplo 3.1 los valores de a y c *se determinan para* la viga previamente considerada en el ejemplo 2.6, y se calcula la deformación unitaria ϵ_1 en el refuerzo por triángulos semejantes.

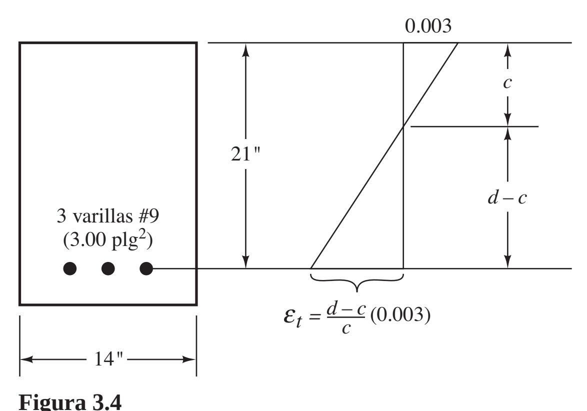


Figura 3.4

EJEMPLO 3.1

Determine los valores de a, c y ϵ_t para la viga mostrada en la figura 3.4. $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y $f'_c = 3\ 000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_C B} = \frac{(3.00)(60)}{(0.85)(3)(14)} = \underline{\underline{5.04''}}$$

$$\beta_1 = 0.85 \text{ para concreto de } 3\ 000 \text{ lb/plg}^2$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{5.04}{0.85} = \underline{\underline{5.93''}}$$

$$\epsilon_t = \frac{d-c}{c}(0.003) = \left(\frac{21 - 5.93}{5.93}\right)(0.003) = \underline{\underline{0.00762}}$$

Este valor de la deformación unitaria es mucho mayor que la deformación unitaria de cedencia de 0.002. Ésta es una indicación del comportamiento dúctil de la viga, ya que el acero está bien adentrado en la meseta de cedencia antes de que el concreto se aplaste.

3.6 SECCIONES BALANCEADAS, SECCIONES CONTROLADAS POR TENSIÓN Y SECCIONES CONTROLADAS POR COMPRESIÓN O SECCIONES FRÁGILES

Una viga que tiene una *proporción balanceada de acero* es aquella en la cual el acero en tensión teóricamente alcanzará justamente su punto de cedencia al mismo momento que las fibras extremas del concreto en compresión alcanzan una deformación unitaria igual a 0.003. Si un miembro sometido a flexión se diseña de modo que tenga una proporción balanceada de acero, o sea un miembro que esté controlado por su lado de compresión (es decir, si su deformación unitaria en compresión alcanza 0.003 antes de que el acero ceda), el miembro puede fallar repentinamente sin previo aviso. A medida que aumenta la carga en un miembro de este tipo, generalmente sus deflexiones no serán muy notables, aun cuando el concreto queda sometido a esfuerzos de compresión muy altos y la falla probablemente ocurrirá sin previo aviso para los usuarios de la estructura. Estos miembros están *controlados en compresión* y se llaman *miembros frágiles.* Obviamente, estos miembros deben ser evitados.

El código, en la sección 10.3.4, establece que los miembros cuyas deformaciones unitarias calculadas en tensión son iguales o mayores que 0.0050 al mismo tiempo que la deformación unitaria en el concreto es 0.003 se denominan *secciones controladas por tensión.* Para tales miembros el acero cederá antes de que el lado de compresión se aplaste y las deflexiones serán grandes, otorgando a los usuarios la advertencia de una falla inminente. Además, se considera que los miembros con $\epsilon_t \geq 0.005$ son totalmente dúctiles. El ACI seleccionó el valor para ϵ_t de 0.005 para aplicarse a todos los tipos de acero permitidos

por el código, ya sea normal o presforzado. El código establece además que los miembros que tienen deformaciones unitarias netas del acero o valores de ϵ_t entre ϵ_y y 0.005 están en una región de transición entre secciones controladas en compresión y controladas en tensión. Para el acero de refuerzo de Grado 60, el cual es muy común, ϵ_y tiene un valor aproximado de 0.002.

3.7 REDUCCIÓN DE RESISTENCIA O FACTORES ϕ

Los factores de reducción de resistencia se usan para tener en cuenta las incertidumbres respecto a la resistencia de los materiales, las inexactitudes en las ecuaciones de diseño, las aproximaciones del análisis, las variaciones posibles en las dimensiones de las secciones de concreto y la colocación del refuerzo, la importancia de los miembros en las estructuras de las cuales son en parte, etc. El código (9.3) prescribe valores de ϕ o factores de reducción de resistencia para la mayoría de las situaciones. Algunos de estos valores dados son:

0.90 para losas y vigas controladas por tensión

0.75 para cortante y torsión en vigas

0.65 o 0.75 para columnas

0.65 o 0.75 a 0.9 para columnas que sustentan cargas axiales muy pequeñas

0.65 para soporte en concreto

Los tamaños de estos factores son una buena indicación de nuestro conocimiento del tema en cuestión. Por ejemplo, las capacidades calculadas de momento nominal en miembros de concreto reforzado parecen ser muy exactas, mientras que las capacidades de carga calculadas son más dudosas.

Para vigas y losas dúctiles o controladas por tensión donde $\epsilon_t \geq 0.005$, el valor de ϕ para flexión es 0.90. Si ϵ_t es menor que 0.005, todavía es posible usar las secciones si ϵ_t no es menor que ciertos valores. Esta situación se muestra en la figura 3.5, que es similar a la figura R.9.3.2 en el Comentario ACI del código 2008. Un cambio significativo en el código 2008 se ilustra al comparar los factores ϕ para miembros espirales para los códigos 2005 y 2008 en la figura 3.5. Esta liberalización fue “reconocer el desempeño superior de las columnas con refuerzo en espiral cuando están sujetas a cargas extraordinarias”.[2]

Los miembros sujetos a cargas axiales iguales o menores que $0.10 f_c' A_g$ pueden usarse sólo cuando ϵ_t no sea menor que 0.004 (sección ACI 10.3.5). Una implicación importante de este límite es que las vigas de concreto reforzado deben tener una deformación unitaria en tensión de al menos 0.004. Si los miembros están sujetos a cargas axiales $\geq 0.10 f_c' A_g$ pueden usarse cuando ϵ_t es tan pequeño como 0.002. Cuando los valores de ϵ_t están situados entre 0.002 y 0.005, se dice que están en el intervalo de

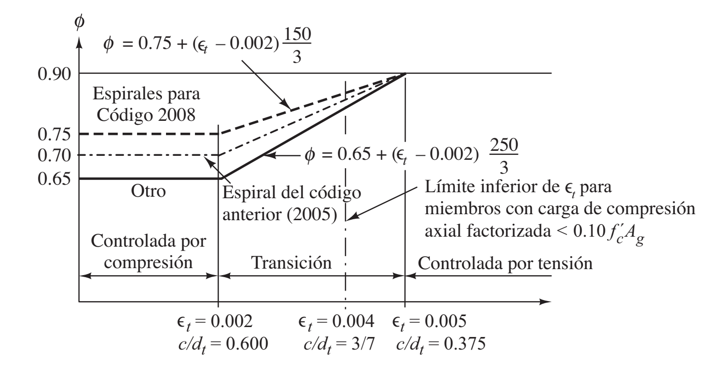


Figura 3.5 Variación de ϕ con deformación unitaria neta en tensión ε_t y c/d_t para refuerzo de Grado 60 y para acero de presfuerzo.

[2]Wight, James K., 2007, *Concrete International*, julio de 2007, Farmington Hills, Michigan.

transición entre las secciones controladas por tensión y las controladas por compresión. En este intervalo los valores de ϕ estarán situados entre 0.65 o 0.70 y 0.90 como se muestra en la figura.

El procedimiento para determinar los valores de ϕ en el intervalo de transición se describe posteriormente en esta sección. *El lector debe entender claramente que el uso de miembros a flexión en este intervalo es generalmente antieconómico y es probablemente mejor, si la situación lo permite, aumentar las profundidades del miembro y/o disminuir los porcentajes de acero hasta que ϵ_t sea igual o mayor que 0.005.* Si esto se hace, no sólo los valores de ϕ serán iguales a 0.9, sino que también los porcentajes de acero no serán tan grandes como para causar la aglomeración de las varillas de refuerzo. El resultado neto será secciones de concreto ligeramente mayores, con las consiguientes deflexiones más pequeñas. Además, como aprenderemos en capítulos subsiguientes, la adherencia del refuerzo con el concreto se incrementará en comparación con los casos donde se usan porcentajes más altos de acero.

Nosotros hemos calculado valores de porcentajes de acero para diferentes grados de concreto y acero para los cuales ϵ_t será exactamente igual a 0.005 y los presentamos en las tablas A.7 y B.7 del apéndice de este libro de texto. Por consiguiente es deseable, bajo condiciones comunes, diseñar vigas con porcentajes de acero que no sean mayores que estos valores y los hemos mostrado como porcentajes máximos sugeridos a ser usados.

La mitad inferior de la figura 3.5 da valores para las proporciones *c/d*. Si *c/d* para un miembro particular a flexión es ≤ 0.375, la viga será dúctil, y si es > 0.600 será frágil. En medio está el intervalo de transición. El lector puede preferir calcular *c/d* para una viga particular para comprobar su ductilidad en vez de calcular ρ o ϵ_t. En la región de transición, la interpolación para determinar ϕ usando c/d_t en lugar de ϵ_t puede realizarse usando las ecuaciones

$$\phi = 0.75 + 0.15\left[\frac{1}{c/d_t} - \frac{5}{3}\right] \quad \textit{para miembros espirales}$$

$$\phi = 0.65 + 0.25\left[\frac{1}{c/d_t} - \frac{5}{3}\right] \quad \textit{para otros miembros}$$

Las ecuaciones para ϕ arriba y en la figura 3.5 son para el caso especial donde $f_y = 60$ klb/plg^2 y para el concreto presforzado. Para otros casos, reemplace 0.002 con $\epsilon_y = f_y/E_s$. La figura 10.25 muestra a la figura 3.5 para el caso en general donde ϵ_y se supone diferente de 0.002.

Las ecuaciones generales resultantes son

$$\phi = 0.75 + (\epsilon_t - \epsilon_y)\frac{0.15}{(0.005 - \epsilon_y)} \quad \textit{para miembros espirales}$$

y

$$\phi = 0.65 + (\epsilon_t - \epsilon_y)\frac{0.25}{(0.005 - \epsilon_y)} \quad \textit{para otros miembros}$$

El impacto del factor ϕ variable sobre la capacidad de momento se muestra en la figura 3.6. Las dos curvas muestran la capacidad de momento con y sin la aplicación del factor ϕ. El punto A corresponde a una deformación unitaria por tensión, ϵ_t, de 0.005 y $\rho = 0.0181$ (tabla A7). Éste es el valor más grande de ρ para $\phi = 0.9$. Arriba de este valor de ρ, ϕ decrece tan bajo como 0.65, como lo muestra el punto B que corresponde a ϵ_t de ϵ_y. ACI 10.3.5 requiere que ϵ_t no exceda de 0.004 para miembros a flexión con cargas axiales bajas. Esta situación corresponde al punto C en la figura 3.6. El único intervalo permisible para ρ es debajo del punto C. De la figura, es claro que se gana muy poca capacidad de momento al añadir área de acero por encima del punto A. Las disposiciones del factor variable ϕ esencialmente permiten un valor constante de ϕM_n cuando ϵ_t es menor que 0.005. Es importante que el proyectista sepa esto porque a menudo las selecciones reales de las varillas resultan en más área de acero que lo teóricamente requerido. Si la pendiente entre los puntos A y C fuera negativa, el proyectista no podría usar un área mayor. Si sabe que la pendiente es ligeramente positiva, el proyectista puede usar el área mayor de la varilla con la confianza de que la capacidad de diseño no se reduce.

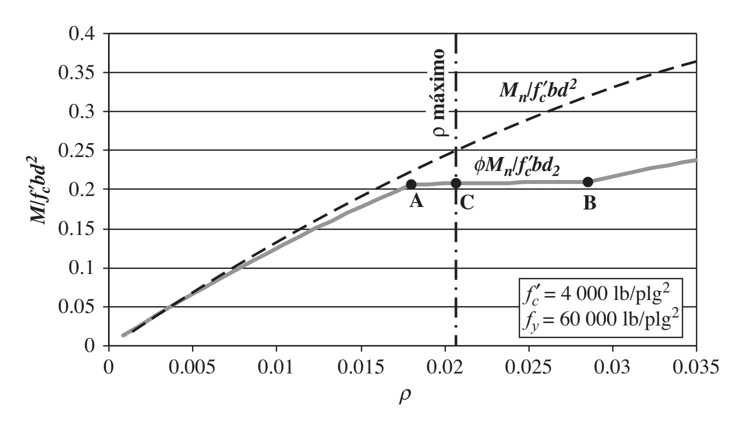


Figura 3.6 Capacidad de momento contra ρ.

Para los valores de f_y de 75 klb/plg^2 y mayores, la pendiente entre los puntos A y B en la figura 3.6 es negativa en realidad. Por consiguiente, es especialmente importante al usar acero de refuerzo de alta resistencia verificar su diseño final para estar seguros de que las varillas que usted ha seleccionado no resulten en una capacidad de momento menor que el valor de diseño.

Continuando nuestra consideración de la figura 3.5, podemos ver que cuando ϵ_t es menor que 0.005, los valores de ϕ varían a lo largo de una línea recta desde su valor de 0.90 para secciones dúctiles hasta 0.65 para condiciones de equilibrio en donde ϵ_t vale 0.002. Más tarde, aprenderemos que ϕ puede ser igual a 0.75 en lugar de 0.65 en esta última situación de deformación unitaria si se consideran secciones con refuerzo en espiral.

3.8 PORCENTAJE MÍNIMO DE ACERO

En la sección 3.6 fue presentado un breve análisis de los modos de falla que ocurren en diversas vigas reforzadas. Algunas veces, debido a requisitos arquitectónicos o funcionales, se seleccionan dimensiones para las vigas que son mucho mayores que las requeridas sólo por la flexión. Tales miembros requieren teóricamente muy poco refuerzo.

En realidad, existe otro modo de falla que puede ocurrir en vigas ligeramente reforzadas. Si el momento resistente último de la sección es menor que su momento de agrietamiento, la sección fallará tan pronto como se forme una grieta. Este tipo de falla puede ocurrir sin previo aviso. Para impedir tal posibilidad, el ACI (10.5.1) especifica cierta cantidad mínima de refuerzo que debe usarse en cada sección de los miembros a flexión donde se requiere esfuerzo de tensión de acuerdo con el análisis, ya sea por momento positivo o negativo. En las siguientes ecuaciones, b_w representa el ancho del alma de las vigas.

$$A_{s,\text{mín}} = \frac{3\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d \qquad \text{(ACI, ecuación10-3)}$$

$$\text{ni menor que } \frac{200 b_w d}{f_y}$$

[En unidades SI, estas expresiones son $\left(\frac{\sqrt{f'_c}}{4f_y}\right) b_w d$ y $\left(\frac{1.4 b_w d}{f_y}\right)$, respectivamente.]

El valor $\left(\frac{200 b_w d}{f_y}\right)$ se obtuvo calculando el momento de agrietamiento de una sección simple de concreto e igualándola a la resistencia de una sección de concreto reforzado del mismo tamaño, aplicando un factor de seguridad de 2.5 y despejando la cantidad de acero requerida. Ha sido encontrado, sin embargo, se ha encontrado que cuando f'_c es mayor que aproximadamente 5 000 lb/plg^2, este valor puede



Planta de tratamiento de aguas negras de Fountain Hills, Arizona. (Cortesía de Economy Forms Corporation.)

no ser suficiente. Por tanto, se requiere que el valor $\left(\frac{3\sqrt{f'_c}}{f_y}\right)b_w d$ también se satisfaga y será éste el que rija cuando f'_c sea mayor que 4 440 lb/plg^2.

Esta ecuación ACI (10-3) para la cantidad mínima de refuerzo por flexión se puede escribir como un porcentaje, como sigue:

$$\rho_{\text{mín}} \text{ para flexión} = \frac{3\sqrt{f'_c}}{f_y} \geq \frac{200}{f_y}$$

Los autores han calculado valores de $\rho_{\text{mín}}$ para la flexión, los cuales se muestran para varios grados de concreto y acero en la tabla A.7 del apéndice de este texto. También se incluyen en las tablas A.8 a A.13 del apéndice. (Para unidades SI, las tablas correctas son B.7 a B.9.)

La sección 10.5.3 del código establece que los mínimos anteriores no tienen que cumplirse si el área del refuerzo de tensión provisto en cada sección es por lo menos un tercio mayor que el área requerida por momento. Además, la sección 10.5.4 del ACI establece que para losas y zapatas de espesor uniforme, el área mínima de refuerzo de tensión en la dirección del claro es aquella especificada en la sección 7.12 del ACI para el acero por contracción y temperatura que es mucho más baja. Cuando las losas se sobrecargan en ciertas áreas hay una tendencia a que las cargas se distribuyan lateralmente a otras partes de la losa, reduciéndose así considerablemente la posibilidad de una falla repentina. Esto explica por qué se permite una reducción del porcentaje mínimo de refuerzo en losas de espesor uniforme. Las losas apoyadas, tales como las losas soportadas por el suelo, no se consideran en esta sección como losas estructurales, a menos que transmitan cargas verticales de otras partes de la estructura al suelo subyacente.

3.9 PORCENTAJE DE ACERO DE EQUILIBRIO

En esta sección se obtiene una expresión para ρ_b, el porcentaje de acero requerido en un diseño balanceado. Bajo carga última para tal viga, teóricamente el concreto fallará (a una deformación unitaria de 0.00300) y el acero cederá simultáneamente (véase la figura 3.7).

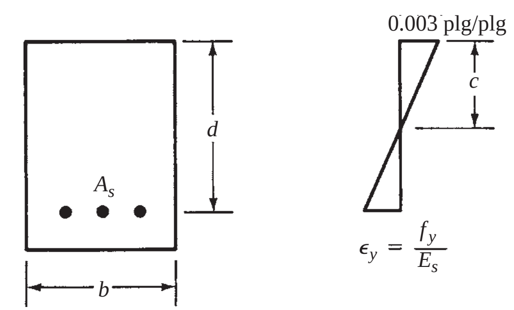


Figura 3.7 Condiciones balanceadas.

El eje neutro se localiza por medio de las relaciones triangulares de las deformaciones unitarias que siguen, observando que $E_s = 29 \times 10^6$ lb/plg^2 para las varillas de refuerzo:

$$\frac{c}{d} = \frac{0.00300}{0.00300 + (f_y/E_s)} = \frac{0.00300}{0.003 + (f_y/29 \times 10^6)}$$

Esta expresión se ordena y simplifica, dando

$$c = \frac{87\,000}{87\,000 + f_y} d$$

En la sección 3.4 de este capítulo se obtuvo una expresión para a al igualar los valores de C y T. Este valor puede convertirse en c dividiéndolo entre β_1

$$a = \frac{\rho f_y d}{0.85 f'_c}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{\rho f_y d}{0.85 \beta_1 f'_c}$$

Se tienen ahora dos expresiones para c y se igualan para despejar entonces el porcentaje de acero. Éste es el porcentaje balanceado ρ_b.

$$\frac{\rho f_y d}{0.85 \beta_1 f'_c} = \frac{87\,000}{87\,000 + f_y} d$$

$$\rho_b = \left(\frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y}\right)\left(\frac{87\,000}{87\,000 + f_y}\right)$$

o en unidades SI $\left(\frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y}\right)\left(\frac{600}{600 + f_y}\right)$.

Los valores de ρ_b se pueden calcular fácilmente para diferentes valores de f'_c y f_y y tabularse en las acostumbradas unidades inglesas, como se muestra en la tabla A.7 del apéndice. Para las unidades SI, es la tabla B.7 del apéndice.

Los códigos anteriores (1963-1999) limitaban los miembros a flexión a 75% de la proporción de acero de equilibrio, ρ_b. Sin embargo, este enfoque se cambió en el código 2002 a la nueva filosofía explicada en la sección 3.7, por medio de la cual la capacidad del miembro se penaliza reduciendo el factor ϕ cuando la deformación unitaria en el acero de refuerzo para la carga última es menor que 0.005.

3.10 PROBLEMAS DE EJEMPLO

Los ejemplos 3.2 a 3.4 presentan el cálculo de las capacidades de momento de diseño de tres vigas usando las limitaciones del código ACI. Recuerde que de acuerdo con el código (10.3.5) las vigas cuya

carga axial sea menor que $0.10 f'_c A_y$ no pueden, estando cargadas a sus resistencias nominales, tener deformaciones unitarias netas calculadas en tensión menores que 0.004.

EJEMPLO 3.2

Determine la capacidad de momento de diseño de ACI ϕM_n de la viga mostrada en la figura 3.8 si $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN **Revisión del porcentaje de acero**

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{4.00}{(15)(24)} = 0.0111$$

$$\left.\begin{array}{l} > \rho_{\text{mín}} = 0.0033 \\ < \rho_{\text{máx}} = 0.0181 \end{array}\right\} \text{ambos de la Tabla A.7 del apéndice}$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{(4.00)(60\,000)}{(0.85)(4\,000)(15)} = 4.71 \text{ plg}$$

$$\beta_1 = 0.85 \text{ para concreto de } 4\,000 \text{ lb/plg}^2$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{4.71}{0.85} = 5.54 \text{ plg}$$

Trazado del diagrama de deformaciones unitarias (figura 3.9)

$$\epsilon_t = \frac{d-c}{c}(0.003) = \frac{18.46}{5.54}(0.003) = 0.0100$$

$$> 0.005 \therefore \text{controlada en tensión}$$

$$M_n = A_s f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) = (4.00)(60)\left(24 - \frac{4.71}{2}\right)$$

$$= 5\,194.8 \text{ plg-klb} = 432.9 \text{ pie-klb}$$

$$\phi M_n = (0.9)(432.9) = \underline{\underline{389.6}} \text{ pie-klb}$$

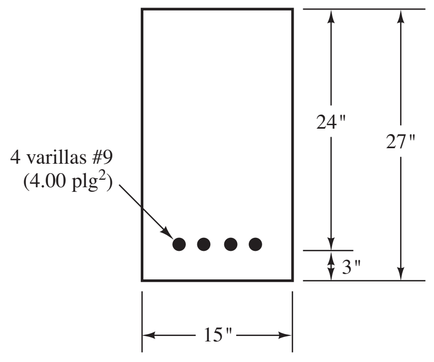


Figura 3.8

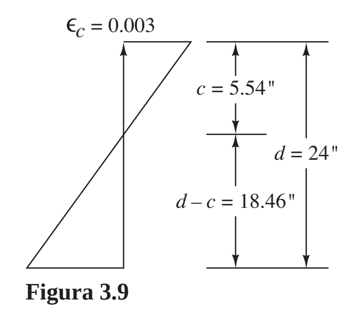


Figura 3.9

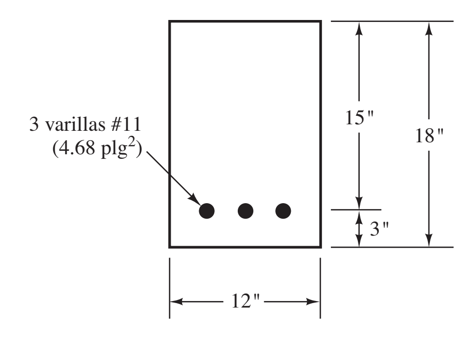


Figura 3.10

EJEMPLO 3.3

Determine la capacidad de momento de diseño ACI ϕM_n de la viga mostrada en la figura 3.10 si $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN **Revisión del porcentaje de acero**

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{4.68}{(12)(15)} = 0.026 > \rho_{\text{mín}} = 0.0033 \text{ y}$$

$> \rho_{\text{máx}} = 0.0181$ de la tabla A.7 del apéndice. Como consecuencia, se sabe que ϵ_t será < 0.005.

Cálculo del valor de ϵ_t

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{(4.68)(60\,000)}{(0.85)(4\,000)(12)} = 6.88 \text{ plg}$$

$$\beta_1 = 0.85 \text{ para concreto de } 4\,000 \text{ lb/plg}^2$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{6.88}{0.85} = 8.09 \text{ plg}$$

$$\epsilon_t = \frac{d-c}{c}(0.003) = \frac{15-8.09}{8.09}(0.003)$$

$$= 0.00256 < 0.004$$

∴ *La sección no es dúctil y no puede usarse según la sección 10.3.5 del ACI.*

EJEMPLO 3.4

Determine la capacidad de momento de diseño y ACI ϕM_n para la viga de la figura 3.11 si $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN **Revisión del porcentaje de acero**

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{3.00}{(10)(15)} = 0.020 > \rho_{\text{mín}} = 0.0033$$

$$\text{pero también} < \rho_{\text{máx}} = 0.0181 (\text{para } \epsilon_t = 0.005)$$

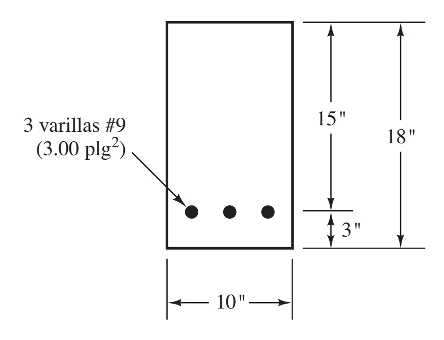


Figura 3.11

Cálculo del valor de ϵ_t

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f_c' b} = \frac{(3.00)(60\ 000)}{(0.85)(4\ 000)(10)} = 5.29 \text{ plg}$$

$$\beta_1 = 0.85 \text{ para concreto de } 4\ 000 \text{ lb/plg}^2$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{5.29}{0.85} = 6.22 \text{ plg}$$

$$\epsilon_t = \frac{d-c}{c}(0.003) = \left(\frac{15-6.22}{6.22}\right)(0.003) = 0.00423 > \ 0.004 < \ 0.005$$

$\therefore$ La viga está en la zona de transición y

$$\phi \text{ de la figura 3.5} = 0.65 + (0.00423 - 0.002)\left(\frac{250}{3}\right) = 0.836$$

$$M_n = A_s f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) = (3.00)(60)\left(15 - \frac{5.29}{2}\right) = 2\ 223 \text{ plg-klb} = 185.3 \text{ pie-klb}$$

$$\phi M_n = (0.836)(185.3) = \underline{\underline{154.9 \text{ pie-klb}}}$$

3.11 EJEMPLOS CON COMPUTADORA

EJEMPLO 3.5

Repita el ejemplo 3.2 usando la hoja de cálculo Excel proporcionada para el capítulo 3.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo del capítulo 3 y abra la hoja de trabajo para Viga Rectangular. Introduzca valores sólo en las celdas sombreadas con amarillo. El resultado final es $\phi M_n = 389.6$ pie-klb (la misma respuesta del ejemplo 3.2).

EJEMPLO 3.6

Repita el ejemplo 3.3 usando la hoja de cálculo de Excel proporcionada para el capítulo. 3.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo del capítulo 3 y abra la hoja de trabajo para Viga Rectangular. Introduzca valores sólo en las celdas sombreadas con amarillo. La hoja de cálculo exhibe un mensaje, “violación del código… demasiado acero”. Ésta es una indicación de que la viga viola la sección 10.3.5 ACI y no es dúctil. Esta viga no está permitida por el código ACI.

EJEMPLO 3.7

Repita el ejemplo 3.4 usando la hoja de cálculo de Excel proporcionada para el capítulo 3.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo del capítulo 3 y abra la hoja de trabajo para Viga Rectangular. Introduzca valores sólo en las celdas sombreadas con amarillo. El resultado final es $\phi M_n = 154.5$ pie-klb (casi la misma respuesta del ejemplo 3.4). El factor ϕ también es casi el mismo del ejemplo 3.4 (0.0834 comparado con 0.0836). La diferencia es el resultado de la hoja de cálculo que usa el valor más general para ϵ_y de $f_y/E_s = 0.00207$, en vez del valor aproximado de 0.002 permitido por el código para el acero de refuerzo de Grado 60. Una diferencia de esta magnitud no es importante, como se estudia en la sección 1.25, Exactitud de los cálculos.

PROBLEMAS

3.1 ¿Cuáles son las ventajas del método de diseño por resistencia en comparación con el método de diseño alternativo por esfuerzos permisibles?

3.2 ¿Cuál es el propósito de los factores de reducción de resistencia? ¿Por qué son ellos menores para columnas que para vigas?

3.3 ¿Cuáles son las hipótesis básicas de la teoría de diseño por resistencia?

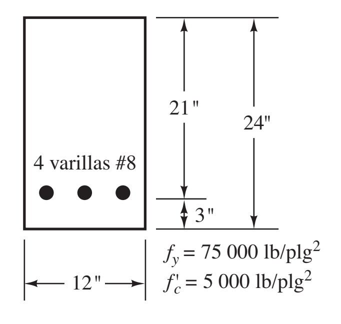
3.4 ¿Por qué especifica el código ACI que un cierto porcentaje mínimo de refuerzo sea usado en vigas?

3.5 Distinga entre vigas controladas por tensión y controladas por compresión.

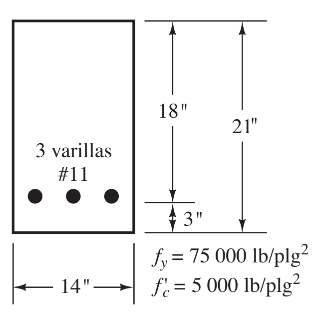
3.6 Explique el propósito de los requisitos mínimos de recubrimiento para el refuerzo especificado por el código ACI.

3.7 Para los problemas 3.7 a 3.9 determine los valores de ϵ_t, ϕ y ϕM_n para las secciones mostradas.

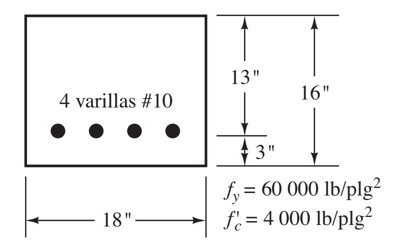
Problema 3.7 (*Resp.* $\phi M_n = 264.1$ pie-klb)



Problema 3.8



Problema 3.9 (*Resp.* La sección tiene $\epsilon_t = 0.00368 < 0.004$. Por tanto no puede ser usada.)



4

Diseño de vigas rectangulares y losas en una dirección

4.1 FACTORES DE CARGA

Los factores de carga son números, casi siempre mayores que 1.0, que se usan para aumentar las cargas estimadas aplicadas a las estructuras. Se usan para cargas aplicadas a todos los tipos de miembros, no solamente vigas y losas. Las cargas se aumentan para considerar las incertidumbres involucradas al estimar sus magnitudes. ¿Con qué precisión puede estimar las mayores cargas eólicas o sísmicas que alguna vez se aplicarán al edificio que ahora ocupa usted? ¿Cuál es el grado de incertidumbre que está presente en su respuesta?

Usted debe observar que los factores de carga para cargas muertas son mucho más pequeños que los usados para cargas vivas y ambientales. Obviamente, la razón es que podemos estimar las magnitudes de las cargas muertas más exactamente que las magnitudes de las otras cargas. En este aspecto, usted notará que las magnitudes de las cargas que permanecen en su lugar por largos periodos son mucho menos variables que las cargas aplicadas por periodos breves tales como el viento y la nieve.

La sección 9.2 del código presenta los factores de carga y las combinaciones que se deben usar para el diseño de concreto reforzado. La resistencia requerida U, o la capacidad de carga de un miembro específico de concreto reforzado, debe ser igual cuando menos al valor más grande obtenido al sustituir valores en las ecuaciones 9-1 a 9-7 del ACI. Las siguientes ecuaciones se conforman a los requisitos del International Building Code (IBC)[1] así como también a los valores requeridos por el estándar 7 de ASCE.[2]

$$U = 1.4(D + F) \qquad \text{(Ecuación ACI 9-1)}$$

$$U = 1.2(D + F + T) + 1.6(L + H) + 0.5(L_r \text{ o } S \text{ o } R) \qquad \text{(Ecuación ACI 9-2)}$$

$$U = 1.2D + 1.6(L_r \text{ o } S \text{ o } R) + (1.0L \text{ o } 0.8W) \qquad \text{(Ecuación ACI 9-3)}$$

$$U = 1.2D + 1.6W + 1.0L + 0.5(L_r \text{ o } S \text{ o } R) \qquad \text{(Ecuación ACI 9-4)}$$

$$U = 1.2D + 1.0E + 1.0L + 0.2S \qquad \text{(Ecuación ACI 9-5)}$$

$$U = 0.9D + 1.6W + 1.6H \qquad \text{(Ecuación ACI 9-6)}$$

$$U = 0.9D + 1.0E + 1.6H \qquad \text{(Ecuación ACI 9-7)}$$

[1]International Code Council, 2006 *International Building Code Falls Church*, Virginia 22041-3401, 755 páginas.
[2]American Society of Civil Engineers, *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures.* ASCE 7-05 (Reston, VA: American Society of Civil Engineers), pág. 5.

En las expresiones precedentes se usaron los siguientes valores:

U = carga de diseño o última que la estructura necesita poder resistir
D = carga muerta
F = cargas debidas al peso y presión de fluidos
T = efectos totales de la temperatura, flujo, contracción, asentamientos diferenciales y concreto compensador de la contracción
L = carga viva
H = cargas debidas al peso y a la presión lateral del suelo, presión del agua subterránea o presión de materiales a granel
L_r = carga viva de techo
S = carga de nieve
R = carga pluvial
W = carga eólica
E = efectos sísmicos o de carga de terremoto

Cuando sea necesario considerar los efectos de impacto, deberán incluirse con las cargas vivas según la sección 9.2.2 del ACI. Tales situaciones ocurren cuando esas cargas se aplican rápidamente, tal como los garajes de estacionamiento, elevadores, muelles de carga y otros.

Las combinaciones de carga presentadas en las ecuaciones. 9-6 y 9-7 del ACI contienen un valor de $0.9D$. Este factor 0.9 considera los casos en donde las cargas muertas mayores tienden a reducir los efectos de otras cargas. Un ejemplo obvio de tal situación puede ocurrir en edificios altos que están sujetos a viento lateral y a fuerzas sísmicas donde el volteo puede ser una posibilidad. Como consecuencia, las cargas muertas se reducen aproximadamente 10% para tener en cuenta situaciones donde pudieron haber sido sobreestimadas.

El lector debe darse cuenta que los tamaños de los factores de carga no varían en proporción a la importancia de la falla. Usted puede pensar que deberían usarse factores de carga mayores para hospitales o edificios altos que para establos de ganado, pero ése no es el caso. Los factores de carga se desarrollaron con la hipótesis de que los proyectistas considerarían la seriedad de una posible falla al especificar la magnitud de sus cargas de servicio. Además, los factores de carga del ACI son valores mínimos y los proyectistas tienen toda la libertad de usar factores mayores si así lo desean. Sin embargo, la magnitud de las cargas eólicas y las cargas sísmicas, reflejan la importancia de la estructura. Por ejemplo, en ASCE7[3] un hospital debe diseñarse para una carga de terremoto 50% mayor que para un edificio comparable con menos consecuencias serias de la falla.

Para algunas situaciones especiales, la sección 9.2 del ACI permite reducciones en los factores de carga especificados. Estas situaciones son las siguientes:

a) En las ecuaciones 9-3 a 9-5 del ACI el factor usado para las cargas vivas se puede reducir a 0.5, excepto para los garajes, para las áreas destinadas a asambleas públicas y todas las áreas donde las cargas vivas exceden de 100 lb/pie^2.

b) Si la carga eólica de diseño se ha obtenido sin usar el factor de direccionalidad del viento, se permite al proyectista usar $1.3W$ en lugar de $1.6W$ en las ecuaciones 9-4 y 9-6.

c) Frecuentemente, los códigos de construcciones y las referencias de carga de diseño convierten las cargas sísmicas a valores de nivel de resistencia (es decir, efectivamente ya se han multiplicado por un factor de carga). Ésta es la situación supuesta en las ecuaciones 9-5 y 9-7 del ACI. Sin embargo, si se especifican fuerzas sísmicas como cargas de servicio, será necesario usar $1.4E$ en estas dos ecuaciones.

[3]American Society of Civil Engineers, *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures.* ASCE 7-05 (Reston, VA: American Society of Civil Engineers), pág. 116.

El ejemplo 4.1 presenta el cálculo de cargas factorizadas para una columna de concreto reforzado usando las combinaciones de carga del ACI. El valor más grande obtenido se llama la combinación de carga crítica o gobernante y es el valor que debe usarse en diseño. *Observe que los valores de las cargas eólicas y sísmicas pueden ser diferentes, dependiendo de la dirección de esas fuerzas y puede ser posible que el signo de esas cargas sea diferente (es decir, compresión o tensión).* Ésta es la situación que se supone que existe en la columna de este ejemplo. Estos cálculos más bien tediosos pueden manejarse fácilmente con la hoja de cálculo Excel titulada Load Combinations (combinaciones de carga) en el sitio web de este libro: http://virtual.alfaomega.com.mx/

EJEMPLO 4.1

Las cargas axiales de compresión por gravedad para una columna de edificio se han estimado con los siguientes resultados: $D = 150$ klb, carga viva de techo $L_r = 60$ klb y cargas vivas de pisos $L = 300$ klb. Viento a compresión $W = 70$ klb, viento a tensión $W = 60$ klb, carga sísmica de compresión = 50 klb y carga sísmica de tensión = 40 klb. Determine la carga crítica de diseño usando las combinaciones de carga del ACI.

SOLUCIÓN

(9-1) $U = (1.4)(150 + 0) = 210$ klb

(9-2) $U = (1.2)(150 + 0 + 0) + (1.6)(300 + 0) + (0.5)(60) = 690$ klb

(9-3*a*) $U = (1.2)(150) + (1.6)(60) + (1.0)(300) = 576$ klb

b) $U = (1.2)(150) + (1.6)(60) + (0.8)(70) = 332$ klb

c) $U = (1.2)(150) + (1.6)(60) + (0.8)(-60) = 228$ klb

(9-4*a*) $U = (1.2)(150) + (1.6)(70) + (1.0)(300) + (0.5)(60) = 622$ klb

b) $U = (1.2)(150) + (1.6)(-60) + (1.0)(300) + (0.5)(60) = 414$ klb

(9-5*a*) $U = (1.2)(150) + (1.0)(50) + (1.0)(300) + (0.2)(0) = 530$ klb

b) $U = (1.2)(150) + (1.0)(-40) + (1.0)(300) + (0.2)(0) = 440$ klb

(9-6*a*) $U = (0.9)(150) + (1.6)(70) + (1.6)(0) = 247$ klb

$U = (0.9)(150) + (1.6)(-60) + (1.6)(0) = 39$ klb

(9-7*a*) $U = (0.9)(150) + (1.0)(50) + (1.6)(0) = 185$ klb

b) $U = (0.9)(150) + (1.0)(-40) + (1.6)(0) = 95$ klb

Respuesta: valor mayor = 690 klb. Observe que el volteo no es un problema.

Para la mayor parte de los problemas de ejemplo presentados en este libro de texto, en el interés de reducir el volumen de los cálculos, sólo se especifican cargas muertas y vivas. Como consecuencia, la única combinación de factores de carga usualmente aplicada en este punto es la presentada por la ecuación 9-2 del ACI. Ocasionalmente, cuando la carga muerta es muy grande comparada con la carga viva, también es necesario considerar la ecuación 9-1.

4.2 DISEÑO DE VIGAS RECTANGULARES

Antes de abordar el diseño de una viga real, es conveniente que analicemos algunos temas asociados con el diseño. Éstos incluyen lo siguiente:

1. *Dimensiones de la viga.* A menos que los requisitos arquitectónicos o de otra índole dicten las dimensiones de las vigas de concreto reforzado, las secciones más económicas para vigas cortas (hasta 20 o 25 pies de longitud), se obtienen cuando la relación de d a b tiene un valor de entre $1\frac{1}{2}$ a 2. Para claros mayores, usualmente se obtiene una mayor economía si se usan secciones altas y estrechas. Las alturas pueden ser 3 o 4 veces los anchos. Sin embargo, el proyectista actual de concreto reforzado a menudo se enfrenta con la necesidad de conservar los miembros con poca longitud para reducir la altura del entrepiso. Como consecuencia, frecuentemente se usan vigas más anchas y de menor longitud que en el pasado. Observe que las dimensiones de las vigas se escogen en pulgadas enteras. Esto se hace en aras

de la simplicidad en la construcción de la cimbra o en la renta de ésta, que generalmente está disponible en incrementos de 1 o 2 plg. Además, los anchos de las vigas a menudo se seleccionan en múltiplos de 2 o 3 pulgadas.

2. *Deflexiones.* Un espacio considerable se dedica en el capítulo 6 al tema de deflexiones en los miembros de concreto reforzado sujetos a flexión. Sin embargo, el código ACI proporciona espesores mínimos de vigas y losas en una sola dirección para las cuales tales cálculos de deflexión no se requieren. Estos valores se muestran en la tabla 4.1. El propósito de tales limitaciones es prevenir deflexiones de magnitudes tales que interfieran con el uso de la estructura o que le causen algún daño. Si se calculan deflexiones para miembros de espesores menores que los listados en la tabla y se encuentran satisfactorios, no es necesario acatar las reglas de los espesores. Para losas simplemente apoyadas, de concreto de peso normal, y acero de grado 60, la altura mínima dada cuando no se calculan deflexiones es igual a $\ell/20$, donde ℓ es la longitud de claro de la losa. *Para concretos de otros pesos y para aceros de límites de elasticidad diferentes, las alturas mínimas requeridas por el código ACI están algo revisadas como se indica en los pies de página de la tabla 4.1.* El ACI no especifica cambios en la tabla para concretos que pesen entre 120 y 145 lb/pie porque la sustitución en la expresión de corrección dada provee factores de corrección casi exactamente iguales a 1.0.

Los espesores mínimos proporcionados se aplican sólo a miembros que no son de soporte o adheridos a muros divisorios u otra construcción susceptible de ser dañada por deflexiones grandes.

3. *Estimación del peso de la viga.* El peso de la viga por diseñar debe incluirse en el cálculo del momento flexionante que ésta va a resistir, ya que la viga debe soportar su propio peso así como las cargas externas. Las estimaciones del peso de las vigas seleccionadas en este texto resultan generalmente muy cercanas a los pesos reales porque los autores pudieron realizar algunos cálculos preliminares antes de proceder con la estimación. No se espera que usted pueda estimar con exactitud el peso de la viga requerida con sólo ver los datos del problema. Sin embargo, siguiendo el mismo procedimiento de los autores se podrán hacer estimaciones razonables. Por ejemplo, se puede calcular el momento que sólo se debe a las cargas externas, seleccionar el tamaño de una viga y calcular su peso. Partiendo del tamaño de esta viga se puede hacer una buena estimación del peso de la sección de viga requerida.

Otro método práctico para estimar el tamaño de la viga es suponer una altura mínima total h igual a la altura mínima especificada por el ACI si las deflexiones no se deben calcular. El mínimo según el ACI para la viga en estudio puede determinarse consultando la tabla 4.1. Entonces se estima en forma

Tabla 4.1 Espesor mínimo de vigas no presforzadas o losas en una dirección a menos que se calculen deflexiones[1,2]

	Espesor mínimo, h			
	Simplemente apoyado	Un borde continuo	Ambos bordes continuos	Viga en voladizo
Miembro	Miembros que no son de carga o adjuntados a muros divisorios u otra construcción susceptible de ser dañada por deflexiones grandes			
Losas sólidas en una dirección	$\ell/20$	$\ell/24$	$\ell/28$	$\ell/10$
Vigas o losas en una dirección con costilla	$\ell/16$	$\ell/18.5$	$\ell/21$	$\ell/8$

[1]La longitud del claro ℓ está en pulgadas.

[2]Los valores dados serán usados directamente para miembros con concreto de peso normal y refuerzo de Grado 60. Para otras condiciones, los valores serán modificados como sigue:

a) Para concreto ligero que tenga una densidad de equilibrio en el intervalo de 90 a 115 lb/pie^3, los valores se multiplicarán por $(1.65 - 0.005w_c)$ pero no menor que 1.09, donde w_c es el peso unitario en lb/pie^3.

b) Para f_y *diferente* de 60 000 lb/plg^2, los valores se multiplicarán por $(0.4 + f_y/100\,000)$.

preliminar el ancho de la viga siendo igual a aproximadamente la mitad del valor supuesto de h y el peso de esta viga estimada puede calcularse como $= \frac{bh}{144}$ veces el peso de concreto por pie cúbico. Como el concreto pesa aproximadamente 150 lb/pie^3 (si se incluye el peso del acero), un cálculo preliminar del peso propio de la viga es simplemente $b \times h$, ya que el peso del concreto cancela aproximadamente al factor de conversión 144.

Después que se determina M_u para todas las cargas, incluyendo el peso estimado de la viga, se escoge la sección. Si las dimensiones de esta sección son significativamente diferentes a las inicialmente supuestas, será necesario recalcular el peso así como M_u y repetir la selección de la viga. En este punto usted puede preguntar muy lógicamente, ¿cuánto es un cambio significativo? Pues bien, usted debe percatarse de que no estamos interesados académicamente en qué tan cercano es nuestro peso estimado del peso final, sino que nosotros estamos muy interesados en qué tan cercano está nuestro M_u calculado del M_u real. En otras palabras, nuestro peso estimado puede tener un error considerable, pero si no afecta a M_u por más que por ejemplo 1 o $1\frac{1}{2}$ %, no importa.

En el ejemplo 4.2 las proporciones de la viga se estiman tal como se ha descrito y las dimensiones así seleccionadas se toman como las definitivas. Como consecuencia, usted puede ver que no es necesario revisar el peso de la viga y recalcular M_u y repetir el diseño.

En el ejemplo 4.3 se diseña una viga para la cual se ha suministrado el valor total de M_u (incluyendo el peso de la viga), así como también un porcentaje sugerido de acero.

Finalmente, con el ejemplo 4.4, los autores han seleccionado una viga cuyo peso es desconocido. Indudablemente que muchos estudiantes inicialmente tienen un poco de dificultad en entender cómo hacer estimaciones razonables del peso del miembro para casos como éste. Para mostrar qué tan fácil, rápida y exactamente puede hacerse esto con las vigas, se incluye este ejemplo.

Imaginamos un peso de la viga estimado inesperadamente igual a 400 lb/pie. (Igual pudimos haber escogido un valor de 10 lb/pie o 1 000 lb/pie.) Con este valor se escogió una sección de viga y se calculó su peso igual a 619 lb/pie. Con este valor se hizo un buen estimado del peso. Obviamente la nueva sección sería un poco más grande que la primera. Así que estimamos el peso un poco mayor que el valor de 619 lb/pie, recalculamos el momento, seleccionamos una sección nueva y determinamos su peso. Los resultados fueron muy satisfactorios.

4. *Selección de las varillas.* Después de calcular el área requerida de refuerzo, puede usarse la tabla A.4 del apéndice para seleccionar las varillas que proporcionen el área necesaria. En los casos usuales son funcionales las varillas #11 y menores. Usualmente es conveniente usar varillas de sólo un tamaño en una viga, aunque ocasionalmente se usan dos tamaños. Sin embargo, las varillas para el acero de compresión y los estribos son usualmente de diferente tamaño. De otra manera los trabajadores pueden confundirse.

5. *Recubrimiento.* El refuerzo de los miembros de concreto debe protegerse del ambiente circundante; es decir, debe suministrarse protección contra el fuego y la corrosión. Para lograr esto, el refuerzo se coloca a ciertas distancias mínimas de la superficie del concreto, de manera que haya una capa protectora de concreto, llamada *recubrimiento*. Además, el recubrimiento mejora la adherencia entre el concreto y el acero. En la sección 7.7 del código ACI, se proporciona el recubrimiento mínimo permisible para varillas de refuerzo bajo diferentes condiciones. Los valores se dan para vigas, columnas y losas de concreto, para miembros colados en la obra, para miembros prefabricados, para miembros presforzados, para miembros expuestos y no expuestos a suelos y a la intemperie, etc. El concreto de los miembros que van a estar expuestos a sales descongelantes, aguas salobres, agua de mar o rocío de estas fuentes, debe tener las proporciones especiales que satisfagan los requisitos del capítulo 4 del código, en cuanto a la exposición a lo anterior. Estos requisitos se refieren al aire atrapado, las proporciones de agua y cemento, los tipo de cemento, la resistencia del concreto, etcétera.

Se supone que las vigas diseñadas en los ejemplos 4.2, 4.3 y 4.4 se encuentran dentro de un edificio, y por tanto, protegidas de la intemperie. En este caso el código requiere un recubrimiento mínimo de $1\frac{1}{2}$ plg de concreto exterior en todo refuerzo.

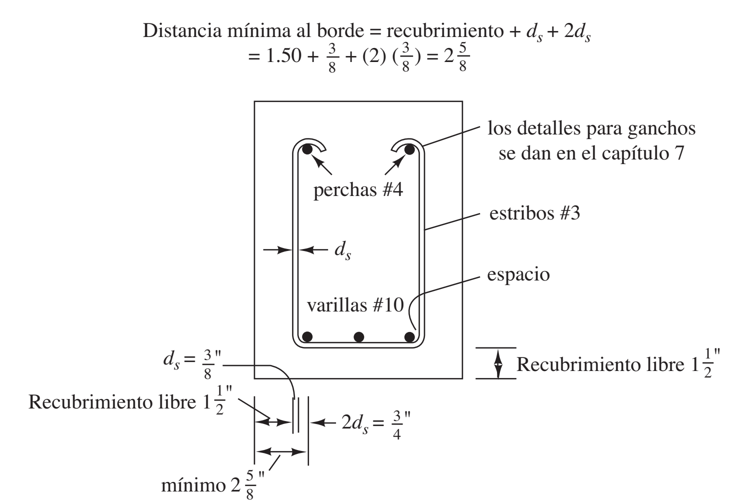


Figura 4.1 Determinación de la distancia mínima al borde.

En el capítulo 8 veremos que se usan estribos verticales para el refuerzo por cortante en la mayoría de las vigas. En la viga de la figura 4.1 se muestra un croquis de un estribo. El diámetro mínimo de estribo (d_s) que permite el código es de $\frac{3}{8}$ plg cuando las varillas longitudinales son del #10 o menores, mientras que para las varillas del #11 y mayores, el diámetro mínimo de estribo es de $\frac{1}{2}$ plg. El radio interior mínimo del estribo de 90 grados, doblado alrededor de las varillas longitudinales exteriores, es dos veces el diámetro del estribo ($2d_s$). Como consecuencia, cuando las varillas longitudinales son del #14 o menores, habrá un espacio entre las varillas y los estribos, como se muestra en la figura. Esto se basa en la hipótesis de que cada varilla longitudinal exterior está centrada sobre el punto horizontal de tangencia del doblez en la esquina del estribo. Sin embargo, para varillas del #18, el diámetro de media varilla es mayor que $2d_s$ y rige.

En la viga de la figura 4.1 se supone que se usan 1.50 plg de recubrimiento libre, estribos del #3 y varillas longitudinales del #10. La distancia horizontal mínima desde el centro de las varillas longitudinales exteriores al borde del concreto se puede determinar como sigue:

$$\text{Distancia mínima al borde} = \text{recubrimiento} + d_s + 2d_s = 1.50 + \frac{3}{8} + (2)\left(\frac{3}{8}\right) = 2\,\frac{5}{8}\ \text{plg}$$

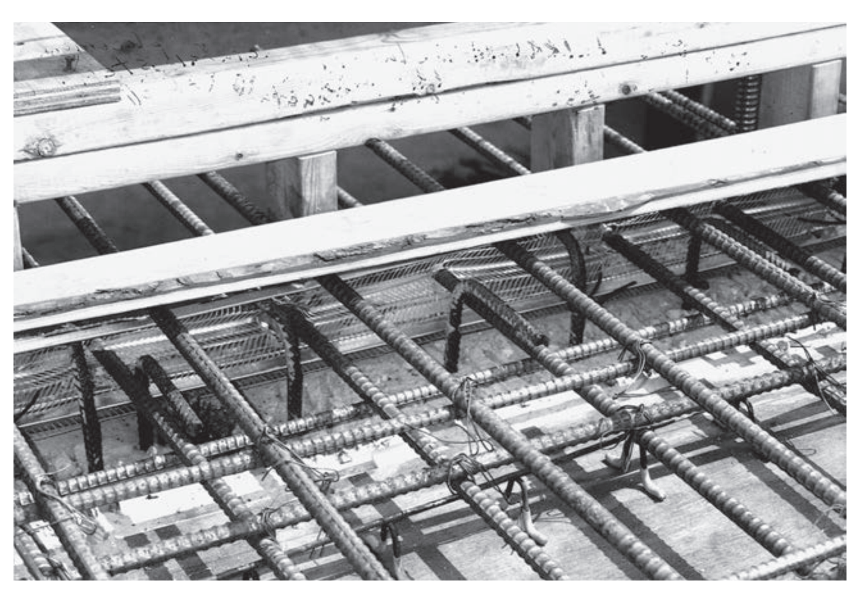
El recubrimiento mínimo requerido para concreto colado sobre tierra, como en el caso de una zapata, es de 3 plg y para concreto no colado sobre tierra pero luego expuesto a ella, como en el caso de un relleno, es de 2 plg. El concreto prefabricado y presforzado, u otro concreto colado bajo condiciones de control de planta, requieren menos recubrimiento, como se describe en las secciones 7.7.2 y 7.7.3 del código ACI.

Observe las dos varillas del #4 llamadas *perchas* colocadas en el lado de compresión de esta viga. Su propósito es proveer soporte para los estribos y sujetar los estribos en posición correcta.

Si los miembros de concreto están expuestos a medios muy severos, como a sales descongelantes, humo o vapores de ácido, los recubrimientos mínimos deben incrementarse.

6. *Separación mínima entre varillas.* El código (7.6) establece que la distancia libre entre varillas paralelas no debe ser menor que 1 plg* o menor que el diámetro nominal de la varilla. Si las varillas se colocan en más de una capa, las de las capas superiores deben colocarse directamente sobre las de las capas inferiores y la distancia libre entre las capas no debe ser menor de 1 plg.

* 25 mm en SI.



Varillas de refuerzo. Note las silletas metálicas de soporte. (Cortesía de Alabama Metal Industries Corporation.)

Uno de los fines principales de estos requisitos es permitir que el concreto pase entre las varillas. Con el mismo fin, el código ACI relaciona además la separación de las varillas con los tamaños máximos del agregado. En la sección 3.3.2 del código, los tamaños máximos permisibles del agregado se limitan al menor valor de los siguientes: *a*) un quinto de la distancia más corta entre los tablones de la cimbra, *b*) un tercio de la altura de la losa y *c*) tres cuartos de la separación libre mínima entre las varillas.

Una varilla de refuerzo debe sobresalir apreciablemente en ambas direcciones, desde su punto de máximo esfuerzo con el propósito de desarrollar su esfuerzo mediante la adherencia al concreto. La longitud más corta en que el esfuerzo de una varilla puede aumentar de 0 a f_y se llama *longitud de desarrollo* o bien *longitud de anclaje.*

Si la distancia desde el extremo de una varilla a un punto donde ésta tiene teóricamente un esfuerzo igual a f_y es menor que su longitud de desarrollo requerida, la varilla se desprenderá del concreto. Las longitudes de desarrollo se ven en detalle en el capítulo 7. Allí veremos que las longitudes requeridas de desarrollo para las varillas de refuerzo varían considerablemente con sus separaciones y su recubrimiento. *En consecuencia, conviene a veces usar recubrimientos y separaciones mayores entre las varillas que los valores mínimos especificados, para reducir así las longitudes de desarrollo.*

Al seleccionar la separación real entre varillas, el proyectista debe cumplir con los requisitos del código y, además, dar las separaciones y las otras dimensiones en pulgadas y fracciones comunes, no en decimales. Los albañiles están acostumbrados a trabajar con fracciones y se confundirían con el empleo de decimales; por ejemplo, con 3 varillas a 1.45 plg. El proyectista debe tender siempre a dar separaciones sencillas, con el fin de lograr mayores ahorros.

Cada vez que se diseña una viga, es necesario seleccionar la separación y la disposición de las varillas. Para simplificar estos cálculos se da la tabla A.5 en el apéndice. La información correspondiente se proporciona en unidades SI en la tabla B.5 del apéndice. En éstas se muestran los anchos mínimos de viga requeridos para diferentes números de varillas. Los valores dados se basan en las hipótesis de que se requieren estribos de $\frac{3}{8}$ plg y un recubrimiento de $1\frac{1}{2}$ plg, excepto para varillas del #18 donde el diámetro del estribo es $\frac{1}{2}$ plg. Si se requieren tres varillas del #10, puede verse en la tabla que se necesita entonces

un ancho mínimo de viga de 10.4 plg (digamos 11 plg). Este valor se puede revisar como sigue, notando que $2d_s$ es el radio de doblez de la varilla y el espacio libre mínimo entre varillas en este caso es d_b:

$$\text{Ancho mínimo de viga} = \text{recubrimiento} + d_s + 2d_s + \frac{d_b}{2} + d_b + d_b + d_b + \frac{d_b}{2} + 2d_s + d_s + \text{recubrimiento}$$

$$= 1.50 + \frac{3}{8} + (2)\left(\frac{3}{8}\right) + \frac{1.27}{2} + (3)(1.27) + \frac{1.27}{2}$$

$$+ (2)\left(\frac{3}{8}\right) + \frac{3}{8} + 1.50$$

$$= 10.33 \text{ plg, redondeado a } 10.4 \text{ plg}$$

4.3 EJEMPLOS DE DISEÑO DE VIGAS

El ejemplo 4.2 ilustra el diseño de una viga rectangular de un solo claro. Para este ejemplo introductorio, se suponen dimensiones aproximadas para la sección transversal de la viga. Se supone que la altura h es igual a aproximadamente un décimo del claro de la viga, mientras que se supone su ancho b igual a aproximadamente 1/2 h. En seguida se determina el porcentaje de refuerzo necesario con la ecuación obtenida en la sección 3.4, y se escogen varillas de refuerzo para satisfacer ese porcentaje. Finalmente, se calcula ϕM_n para el diseño final.

EJEMPLO 4.2

Diseñar una viga rectangular con claro simple de 22 pies para soportar una carga muerta de 1 klb/pie (sin incluir el peso de la viga) y una carga viva de 2 klb/pie. Use $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN **Estimación de las dimensiones y el peso de la viga**

$$\text{Suponga } h = (0.10)(22) = 2.2 \text{ pies} \quad \underline{\text{Tomar 27 plg}}\ (d = 24.5 \text{ plg})$$

$$\text{Suponga } b = \frac{1}{2}h = \frac{27}{2} \quad \underline{\text{Tomar 14 plg}}$$

$$wt \text{ de la viga} = \frac{(14)(27)}{144}(150) = 394 \text{ lb/pie}$$

Cálculo de w_u y M_u

$$w_u = (1.2)(1 + 0.394) + (1.6)(2) = 4.873 \text{ klb/pie}$$

$$M_u = \frac{w_u L^2}{8} = \frac{(4.873)(22)^2}{8} = 294.8 \text{ pie-klb}$$

Suponiendo $\phi = 0.90$ y calculando ρ con la siguiente expresión que se obtuvo en la sección 3.4.

$$\rho = \frac{0.85 f'_c}{f_y}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2R_n}{0.85 f'_c}}\right)$$

$$R_n = \frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{(12)(294\ 800)}{(0.90)(14)(24.5)^2} = 467.7$$

$$\rho = \frac{(0.85)(4\ 000)}{60\ 000}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{(2)(467.7)}{(0.85)(4\ 000)}}\right) = 0.00842$$

Selección del refuerzo

$$A_s = \rho bd = (0.00842)(14)(24.5) = 2.89 \text{ plg}^2$$

Use tres varillas del #9 ($A_s = 3.00 \text{ plg}^2$)

El apéndice A.5 indica un ancho mínimo de viga de 9.8 plg para la exposición interior para tres varillas del #9. Si se hubieran seleccionado cinco varillas del #7, se requeriría un ancho mínimo de 12.8 plg. Cualquiera de las dos selecciones sería aceptable, ya que el ancho de viga de 14 plg excede cualquiera de los dos requisitos. Si hubiéramos seleccionado un ancho de viga de 12 plg anteriormente en el proceso de diseño, pudimos haber estado limitados a las varillas del #9 más grandes por este requisito de ancho mínimo de viga.

Revisión de la solución

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{3.00}{(14)(24.5)} = 0.00875 > \rho_{\text{mín}} = 0.0033$$

$$< \rho_{\text{máx}} = 0.0181 (\text{valores de } \rho \text{ de la tabla A7 del apéndice}). \quad \therefore \text{la sección es dúctil y } \phi = 0.90.$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{(3.00)(60)}{(0.85)(4)(14)} = 3.78 \text{ plg}$$

$$\phi M_n = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) = (0.90)(3.00)(60)\left(24.5 - \frac{3.78}{2}\right)$$

$$= 3\ 662 \text{ plg-klb} = 305.2 \text{ pie-klb} > 294.8 \text{ pie-klb} \quad \underline{\text{OK}}$$

Sección final (figura 4.2)

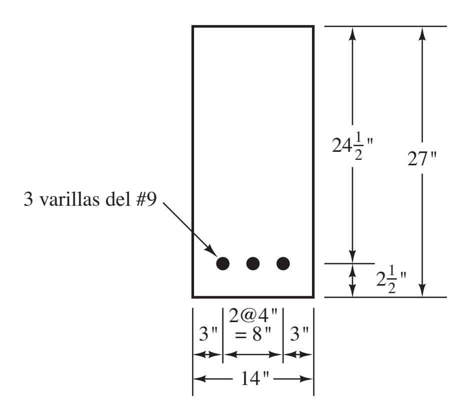


Figura 4.2

Uso de gráficas y tablas

En la sección 3.4 se obtuvo la siguiente ecuación:

$$M_u = \phi A_s f_y d\left(1 - \frac{1}{1.7}\frac{\rho f_y}{f'_c}\right)$$

Si A_s se remplaza en esta ecuación con ρbd, puede despejarse el valor de $M_u/\phi bd^2$ de la expresión resultante.

$$M_u = \phi \rho bd f_y d\left(1 - \frac{1}{1.7}\frac{\rho f_y}{f'_c}\right)$$

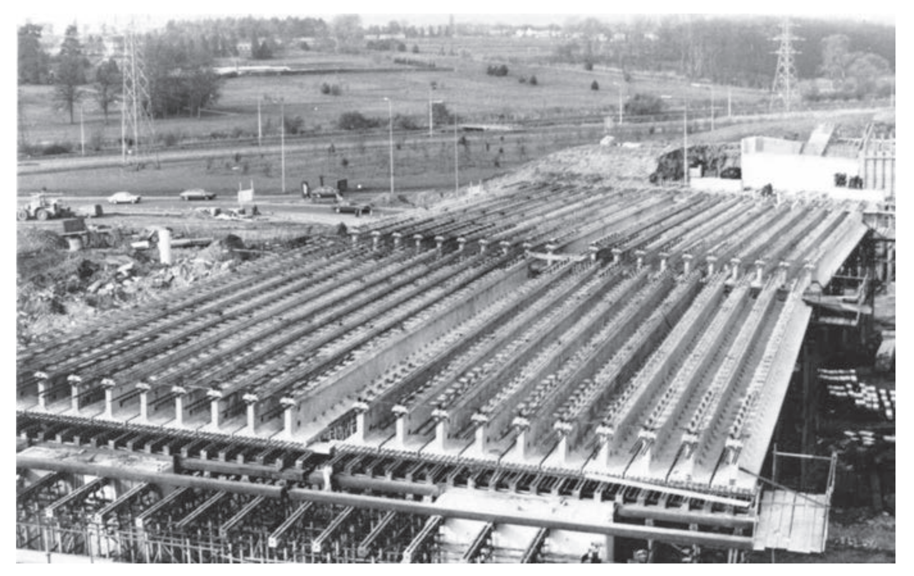
y de esto

$$\frac{M_u}{\phi bd^2} = \rho f_y\left(1 - \frac{1}{1.7}\frac{\rho f_y}{f'_c}\right)$$

Para un porcentaje ρ dado de acero y para un cierto concreto f'_c y cierto acero f_y, el valor de $M_u/\phi bd^2$ se puede calcular y graficar en tablas, como se ilustra en las tablas A.8 a A.13 o en las gráficas del apéndice (véase la gráfica 1 del apéndice A). Los valores SI se proporcionan en las tablas B.8 a B.9 del apéndice. Es mucho más fácil leer exactamente las tablas que las gráficas (al menos para la escala para la cual se muestran las gráficas en este texto). Por esta razón las tablas se usan para los ejemplos aquí. Las unidades de $M_u/\phi bd^2$ tanto en las tablas como en las gráficas del apéndice A son libras por pulgada cuadrada. En el apéndice B, las unidades son MPa.

Una vez que se determina el valor de $M_u/\phi bd^2$ para una viga particular, el valor de M_u *se* puede calcular como se ilustra en la solución alterna para el ejemplo 3.1. Las mismas tablas y gráficas se pueden usar ya sea para el diseño o el análisis de vigas.

El valor de ρ, determinado en el ejemplo 4.2, sustituyendo en esa ecuación larga y tediosa, puede seleccionarse directamente de la tabla A.13 del apéndice. Entramos a esa tabla con el valor de $\frac{M_u}{\phi bd^2}$ previamente calculado en el ejemplo, y leemos un valor de ρ entre 0.0084 y 0.0085. La interpolación se puede usar para encontrar el valor real de 0.00842, pero tal exactitud no es realmente necesaria. Es conservador usar el valor mayor (0.0085) para calcular el área de acero.



Intersección Barnes Meadow en Northampton, Inglaterra. (Cortesía de Cement and Concrete Association.)

En el ejemplo 4.3, a continuación, se especificó un valor de ρ en el enunciado del problema y la larga ecuación se usó para determinar las dimensiones requeridas de la estructura tal como están representadas por bd^2. Otra vez es mucho más fácil usar la tabla correcta del apéndice para determinar este valor. En casi todos los demás casos en este libro de texto las tablas se usan para propósitos de diseño o de análisis.

Una vez que se determina bd^2, el autor toma lo que le parece a él como valores razonables para b (en este caso 12, 14 y 16 plg.) y calcula la d requerida para cada ancho a fin de que se satisfaga el bd^2 requerido. Finalmente, se selecciona una sección en la cual b es aproximadamente $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{3}$ de d. (Para claros grandes d puede ser $2\frac{1}{2}$ o 3 o más veces b por razones económicas.)

EJEMPLO 4.3

Una viga debe seleccionarse con $\rho = 0.0120$, $M_u = 600$ pie-klb, $f_y = 60\,000$ lb/plg^2 y $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN Suponiendo $\phi = 0.90$ y sustituyendo en la siguiente ecuación de la sección 3.4:

$$\frac{M_u}{\phi bd^2} = \rho f_y\left(1 - \frac{1}{1.7}\frac{\rho f_y}{f'_c}\right)$$

$$\frac{(12)(600\,000)}{(0.9)(bd^2)} = (0.0120)(60\,000)\left[1 - \left(\frac{1}{1.7}\right)\frac{(0.0120)(60\,000)}{4\,000}\right]$$

$$bd^2 = 12\,427\begin{cases} b \times d \\ 12 \times 32.18 \\ 14 \times 29.79 \leftarrow \\ 16 \times 27.87 \end{cases}\begin{cases}\text{Ésta parece} \\ \text{bastante razonable} \\ \text{a los autores.}\end{cases}$$

Nota: como alternativa, pudimos haber usado tablas para ayudar a calcular bd^2. Al entrar en la tabla A.13 del apéndice, encontramos $\frac{M_u}{\phi bd^2} = 643.5$ cuando $\rho = 0.0120$.

$$\therefore\ bd^2 = \frac{(12)(600\,000)}{(0.90)(643.5)} = 12\,432 \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$\underline{\text{Intente } 14 \times 33 (d = 30.00 \text{ plg})}$

$$A_s = \rho bd = (0.0120)(14)(30) = 5.04 \text{ plg}^2$$

$$\underline{\underline{\text{use } 4\#10 (A_s = 5.06 \text{ plg}^2)}}$$

Nota: el apéndice A.5 indica un ancho mínimo de viga de 12.9 plg para esta selección de varilla. Como nuestro ancho es 14 plg las varillas son adecuadas.

Revisión de la solución

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{5.06}{(14)(30)} = 0.01205 > \rho_{\text{mín}} = 0.0033$$

$$< \rho_{\text{máx}} = 0.0181 \text{ de la Tabla A.7 del Apéndice}$$

Nota: el código permite un valor de 0.0206, pero el valor correspondiente de ϕ sería menor que 0.9 (véase la figura 3.5 y la tabla A.7). Como se usó un valor de ϕ de 0.9 en los cálculos anteriores, es necesario usar 0.0181.

Con $\rho = 0.01205$, $\frac{M_u}{\phi bd^2}$ por interpolación de la tabla A.13 del apéndice es igual a 645.85.

$$\phi M_n = 645.85\ \phi bd^2 = (645.85)(0.9)(14)(30)^2$$

$$= 7\,323\,939 \text{ plg-lb} = 610.3 \text{ pie-klb} > 600 \text{ pie-klb}$$

Sección final (figura 4.3)

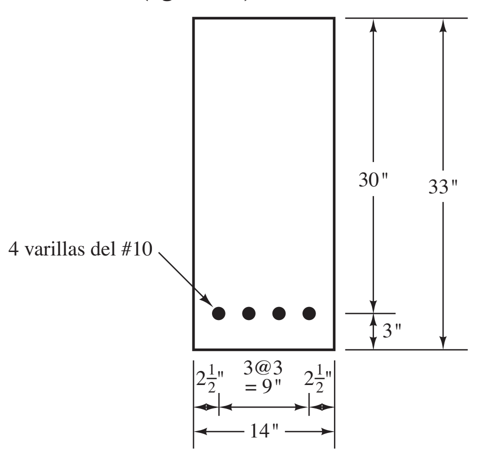


Figura 4.3

Gracias a varias décadas de experiencia en el diseño de concreto reforzado, se ha encontrado que si el porcentaje de acero se mantiene más bien pequeño, por ejemplo alrededor de $0.18f_c'/f_y$ o tal vez $0.375\rho_b$, las secciones transversales de la viga serán suficientemente grandes como para que las deflexiones rara vez sean un problema. Como las áreas de acero requerido serán bastante pequeñas, será poco problemático acomodarlas en las vigas sin hacinamiento.

Si se usan estos porcentajes relativamente pequeños de acero, habrá poca dificultad en colocar las varillas y en colar el concreto. Por supuesto, desde el punto de vista de la deflexión, pueden usarse mayores porcentajes de acero y secciones más pequeñas de vigas en claros cortos donde las deflexiones no presentan problema. Cualquiera que sea el porcentaje de acero utilizado, los miembros resultantes deberán revisarse cuidadosamente para detectar deflexiones en vigas de grandes claros, en vigas en voladizo y en vigas y losas poco profundas. Por supuesto que estas revisiones de deflexión no se requieren si se respetan las alturas mínimas especificadas en la tabla 4.1 de este capítulo.

Otra razón para usar porcentajes más pequeños de acero se da en la sección 8.4 del código ACI donde se permite una redistribución plástica de momentos (tema que se analizará en el capítulo 14) en miembros continuos cuyos valores de ϵ_t son de 0.0075 o mayores. Se presentan estas deformaciones unitarias de tensión cuando se usan porcentajes más pequeños de acero. Por las varias razones mencionadas aquí, los proyectistas estructurales piensan que mantener el porcentaje de acero medianamente bajo dará como resultado buena economía.

EJEMPLO 4.4

Una viga rectangular se debe dimensionar con $f_y = 60\,000$ lb/plg², $f_c' = 3\,000$ lb/plg², y ρ es igual a $0.18f_c'/f_y$. Debe tener un claro simple de 25 pies y soportar una carga muerta adicional a su propio peso igual a 2 klb/pie y una carga viva igual a 3 klb/pie.

SOLUCIÓN **Suponga *wt* de la viga = 400 lb/pie**

$$w_u = (1.2)(2 + 0.400) + (1.6)(3) = 7.68 \text{ klb/pie}$$

$$M_u = \frac{(7.68)(25)^2}{8} = 600 \text{ pie-klb}$$

$$\rho = \frac{(0.18)(3)}{60} = 0.009$$

$$\frac{M_u}{\phi bd^2} = 482.6 \text{ de la tabla A.12 del apéndice}$$

$$bd^2 = \frac{M_u}{\phi\, 482.6} = \frac{(12)(600\,000)}{(0.9)(482.6)}$$

Solucionando esta expresión para bd^2 y probando con varios valores de b y d.

$$b \times d$$

$$= 16\,577 \begin{cases} 16 \times 32.19 \\ 18 \times 30.35 \quad \leftarrow \text{ parece razonable} \\ 20 \times 28.79 \end{cases}$$

Intente con una viga de 18 × 33 (*d* = 30.50 plg)

$$wt \text{ de la viga } = \frac{(18)(33)}{144}(150) = 619 \text{ lb/pie}$$
$$> \text{ la estimación de } 400 \text{ lb/pie} \qquad \underline{\underline{\text{No sirve}}}$$

Suponga *wt* de la viga un poco mayor que 619 lb/pie

$$wt \text{ estimado } = 650 \text{ lbs/pie}$$
$$w_u = (1.2)(2 + 0.650) + (1.6)(3) = 7.98 \text{ klb/pie}$$
$$M_u = \frac{(7.98)(25)^2}{8} = 623.4 \text{ pie-klb}$$
$$bd^2 = \frac{M_u}{\phi 482.6} = \frac{(12)(623\,400)}{(0.9)(482.6)}$$
$$= 17\,223 \begin{cases} 16 \times 32.81 \\ 18 \times 30.93 \quad \leftarrow \text{ parece razonable} \\ 20 \times 29.35 \end{cases}$$

Intente con una viga de 18 × 34 (*d* = 31.00 plg)

$$wt \text{ de la viga } = \frac{(18)(34)}{144}(150) = 637.5 \text{ lbs/pie} < 650 \text{ lbs/pie} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$
$$A_s = \rho bd = (0.009)(18)(31) = 5.02 \text{ plg}^2$$

Intente con cinco varillas del #9 (el ancho mínimo es 14.3 plg del apéndice A.5) OK

Normalmente una selección de varilla debería exceder el valor teórico de A_s. En este caso, el área escogida fue menor que, pero muy cercana al área teórica y se revisará para asegurarse de que tiene suficiente capacidad.

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{5.00(60)}{(0.85)(3)(18)} = 6.54 \text{ plg}$$
$$\phi M_n = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) = 0.9(5.00)(60)\left[31 - \frac{6.54}{2}\right] = 7\,487.6 \text{ plg-lb} = 623.9 \text{ pie-klb} > M_u$$

La razón por la cual una viga con menos acero de refuerzo que lo calculado es aceptable es porque se seleccionó un valor de d que excede el valor teórico ($d = 31$ plg > 30.93 plg). Siempre que el valor de b y d seleccionado resulta en un valor de bd^2 que excede el valor calculado basándose en el valor supuesto de ρ, el valor real de ρ será más bajo que el valor supuesto.

Si se hubiese seleccionado un valor de $b = 18$ plg y $d = 30$ plg , el resultado habría sido que el valor real de ρ sería mayor que el valor supuesto de 0.009. Usando los valores reales de b y d para recalcular ρ

$$\frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{(12)(623\,400)}{0.9(18)(30)^2} = 513.1$$

De la tabla A.12 del apéndice, $\rho = 0.00965$ que excede el valor supuesto de 0.009. El valor requerido de A_s será mayor que el requerido para $d = 31$ plg.

$$A_s = \rho bd = (0.00965)(18)(30) = 5.21 \text{ plg}^2$$

Los dos diseños son aceptables. Esta clase de flexibilidad algunas veces deja perplejo al estudiante que simplemente quiere saber la respuesta correcta. Una de las mejores características del concreto reforzado es que hay mucha flexibilidad en las decisiones que pueden tomarse.

4.4 CONSIDERACIONES DIVERSAS EN EL DISEÑO DE VIGAS

Esta sección introduce dos limitaciones generales referentes al diseño de vigas: el soporte lateral y las vigas profundas.

Soporte lateral

Es improbable que las vigas de concreto reforzado de cualquier sección normal sin soporte lateral se pandeen lateralmente, aun cuando sean muy profundas y estrechas, a menos que estén sometidas a una torsión lateral considerable. Por ello, el código ACI (10.4.1) establece que el soporte lateral de una viga no tiene que quedar a menos de 50 veces el ancho mínimo *b* del patín o cara de compresión. Sin embargo, si se da una torsión significativa, ésta debe considerarse en la determinación del espaciamiento máximo de los soportes laterales.

Refuerzo superficial para vigas profundas

Las vigas con alturas del alma mayores a 3 pies tienen tendencia a desarrollar grietas excesivamente anchas en la parte superior de sus zonas de tensión. Para reducir estas grietas, es necesario agregar algo de refuerzo longitudinal adicional en la zona de tensión por flexión cerca de las caras verticales del alma, como se muestra en la figura 4.4. El código (10.6.7) estipula que el refuerzo adicional superficial debe distribuirse uniformemente a lo largo de ambas caras de los miembros con $d > 36$ plg en las porciones de altura $d/2$ más cercanas al refuerzo de flexión.

La separación s_{sk} entre este refuerzo superficial no debe ser mayor que el valor mínimo de $d/6$,12 plg o $1\,000A_b/(d - 30)$. En esta última expresión A_b es el área de un alambre o una varilla individual. Estas varillas adicionales pueden tomarse en cuenta para calcular la resistencia a flexión de los miembros, sólo si se consideran las deformaciones unitarias correspondientes a sus posiciones relativas al eje neutro en la determinación de los esfuerzos en las varillas. El área total del refuerzo superficial en ambas caras de la viga no debe exceder la mitad del refuerzo a tensión requerido por flexión en la viga. El código

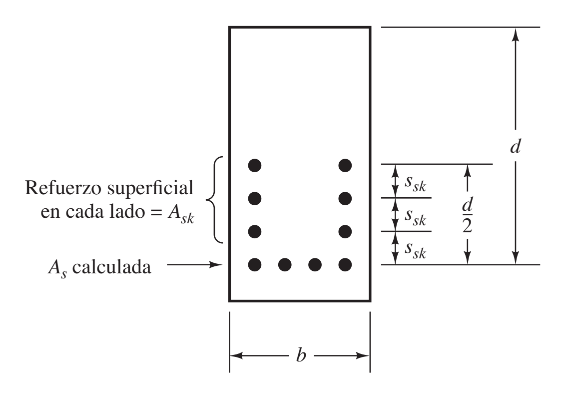


Figura 4.4 Refuerzo superficial para vigas profundas con $d > 36$ plg, según se requiera por la sección 10.6.7 del código ACI.

ACI no especifica el área real del refuerzo superficial; simplemente establece que debe colocarse algún refuerzo adicional cerca de las caras verticales de la zona de tensión para evitar el agrietamiento en el alma de la viga.

Deben considerarse algunos requisitos especiales relativos al esfuerzo cortante en vigas profundas, tales como se describen en el código ACI (11.7) y en la sección 8.14 de este texto. Si estas últimas disposiciones requieren más refuerzo que el requerido por la sección 10.6.7 del ACI, los valores mayores gobernarán.

Para una viga diseñada con unidades SI con una altura efectiva > 1 m, debe determinarse un refuerzo superficial adicional con la siguiente expresión en la cual A_{sk} es el área del refuerzo superficial por metro de altura a cada lado de la viga:

Su separación máxima no debe exceder a $d/6$ en 300 mm o 1 000$A_b/(d - 750)$.

Otras consideraciones

Los siguientes cuatro capítulos de este libro están dedicados a otros temas importantes referentes a vigas. Éstos incluyen vigas de diferentes secciones, refuerzo de compresión, grietas, longitud de desarrollo de las varillas de refuerzo y esfuerzo cortante.

Notas adicionales sobre los tamaños de vigas

Desde los puntos de vista de la economía y la apariencia, sólo algunos tamaños diferentes de vigas deberán usarse en un sistema de piso específico. Tal práctica ahorrará cantidades considerables de dinero al simplificar la cimbra y al mismo tiempo proporcionará un sistema de piso con una apariencia más uniforme y atractiva.

Si un grupo de estudiantes universitarios estudiando el tema de concreto reforzado tuviera que diseñar un sistema de piso y luego compararan su diseño con el de un proyectista estructural experimentado, lo más probable es que la diferencia principal entre los dos diseños estaría en el número de vigas utilizadas de diferente tamaño. El proyectista probablemente usaría sólo unas cuantas vigas de diferente tamaño, mientras que un estudiante promedio probablemente usaría un mayor número de ellas.

El proyectista probablemente examinaría la planta del edificio para decidir dónde colocar las vigas y luego haría la viga sujeta al mayor momento flexionante tan pequeña como fuese prácticamente posible (es decir, con un porcentaje moderadamente alto de refuerzo). Luego dimensionaría el mayor número de vigas similares con las mismas dimensiones externas. Los porcentajes de refuerzo para estas vigas podrían variar considerablemente debido a sus diferentes momentos.

4.5 DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE ACERO CUANDO LAS DIMENSIONES DE LA VIGA SON PREDETERMINADAS

Algunas veces las dimensiones externas de una viga están predeterminadas por factores que no tienen que ver con los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes. La longitud de un miembro se pudo haber seleccionado con base en los requisitos de espesor mínimo para deflexiones discutidos en la sección 4.2. El tamaño de un grupo entero de vigas pudo haberse escogido para simplificar el trabajo de cimbrado, como se vio en la sección 4.4. Finalmente, un tamaño específico pudo haberse escogido por razones arquitectónicas. Después mencionamos brevemente tres métodos para calcular el refuerzo requerido. El ejemplo 4.5 ilustra la aplicación de cada uno de estos métodos.

Tablas del apéndice

El valor de $M_u/\phi bd^2$ se puede calcular y escogerse ρ en las tablas. En la mayoría de los casos éste es el método más rápido y práctico. *Las tablas dadas en los apéndices A y B de este texto se aplican sólo a secciones rectangulares reforzadas por tensión. Además, debemos acordarnos de inspeccionar los valores de ϕ.*

Uso de la fórmula para ρ

La siguiente ecuación se desarrolló previamente en la sección 3.4 para secciones rectangulares.

$$\rho = \frac{0.85f'_c}{f_y}\left(1-\sqrt{1-\frac{2R_n}{0.85f'_c}}\right)$$

Método de tanteo

Puede suponerse un valor de a, calcularse el valor de A_s, determinarse luego el valor de a para este valor de A_s, suponer otro valor para a, etc. Alternativamente, puede estimarse un valor del brazo de palanca entre C y T (es $d - a/2$ para secciones rectangulares) y usarse en el procedimiento de tanteo. *Este método es general y funciona para toda sección transversal con refuerzo de tensión.* Es particularmente útil en vigas T, como se ilustrará en el siguiente capítulo.

EJEMPLO 4.5

Las dimensiones de la viga mostrada en la figura 4.5 han sido escogidas por razones arquitectónicas. Determinar el área del acero de refuerzo por medio de cada uno de los métodos descritos en esta sección.

SOLUCIÓN **Usando las tablas del apéndice**

$$\frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{(12)(160\,000)}{(0.9)(16)(21)^2} = 302.3 \text{ lb/plg}^2$$

$$\rho \text{ de la tabla A.12} = 0.0054$$

$$A_s = (0.0054)(16)(21) = 1.81 \text{ plg}^2$$

Use 3 varillas del #7 (1.80 plg^2)

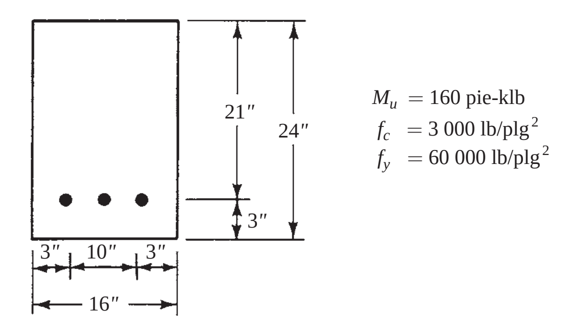


Figura 4.5

Usando ρ para la fórmula

$$R_R = \frac{M_u}{\phi bd^2} = 302.3$$

$$\rho = \frac{(0.85)(3\,000)}{60\,000}\left(1-\sqrt{1-\frac{(2)(302.3)}{(0.85)(3\,000)}}\right)$$

Método de tanteo

Aquí es necesario estimar el valor de a. Probablemente el estudiante no tenga idea de un valor razonable para esta cantidad, pero la exactitud de la estimación carece de importancia. Se puede suponer algún valor probable considerablemente menor que $\frac{d}{2}$ y después calcular $d - \frac{a}{2}$ y A_s. Con este valor de A_s, se puede calcular un nuevo valor de a y el ciclo se repite. Después de dos o tres ciclos, se habrá obtenido un buen valor de a.

Suponga $a = 2''$:

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y\left(d-\frac{a}{2}\right)} = \frac{(12)(160\,000)}{(0.9)(60\,000)\left(21-\frac{2}{2}\right)} = 1.78 \text{ plg}^2$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c} = \frac{(1.78)(60\,000)}{(0.85)(3\,000)(16)} = 2.62''$$

Suponga $a = 2.6''$:

$$A_s = \frac{(12)(160\,000)}{(0.9)(60\,000)\left(21-\frac{2.62}{2}\right)} = 1.81 \text{ plg}^2$$

$$a = \frac{(1.81)(60\,000)}{(0.85)(3\,000)(16)} = 2.66 \text{ plg} \quad \underline{\underline{\text{(valor bastante cercano)}}}$$

4.6 VARILLAS EN RACIMO

Algunas veces cuando se requieren cantidades grandes de refuerzo de acero en una viga o una columna, es muy difícil acomodar todas las varillas en la sección transversal. En tales situaciones, pueden colocarse grupos de varillas paralelas en racimos. Pueden formarse racimos hasta con cuatro varillas, siempre que queden unidas entre sí. El código del ACI (7.6.6.3) establece que ni en vigas ni en trabes deben agruparse en racimos varillas mayores al #11. Esto es primordialmente por problemas de control de grietas, tema que se estudiará en el capítulo 6 de este texto. Es decir, si se cumplen las restricciones de control de grietas del ACI, las varillas mayores de #11 no pueden ser utilizadas prácticamente. La AASHTO permite el uso de racimos de 2, 3 y 4 varillas, hasta el tamaño del #11. Sin embargo, para varillas mayores a #11, AASHTO limita el racimo a dos varillas (AASHTO, secciones 8.21.5 ASD y 5.10.3.1.5 de diseño por resistencia).

En la figura 4.6 se muestran configuraciones típicas para racimos de 2, 3 y 4 varillas. Cuando los racimos de más de una varilla se usan verticalmente en el plano de flexión, prácticamente no pueden hacerse gancho o doblarse como si fueran una unidad. Si se requieren ganchos en los extremos, es preferible escalonar los ganchos de las varillas individuales dentro del racimo.

Aunque el ACI permite el uso de varillas en racimo, su uso en las áreas de tensión de las vigas puede muy bien ser contraproducente por motivo de otras restricciones del código aplicables como resultado de su uso.



Figura 4.6 Configuraciones de varillas en racimo.

Cuando las limitaciones de separación y recubrimiento de las varillas se basan en el tamaño de éstas, las varillas en racimo se pueden considerar como varillas individuales para fines de cálculo; el diámetro de la varilla ficticia debe calcularse en función del área total equivalente del grupo. Cuando las varillas individuales de un racimo se cortan dentro del claro de vigas o trabes, deben terminar en puntos diferentes. El código (7.6.6.4) requiere que haya un escalonamiento mínimo igual a 40 diámetros de la varilla.

4.7 LOSAS EN UNA DIRECCIÓN

Las losas de concreto reforzado son grandes placas planas soportadas por vigas, muros o columnas de concreto reforzado, por muros de mampostería, por vigas o columnas de acero estructural, o por el suelo. Si están soportadas sólo en dos lados opuestos, se denominan *losas en una dirección* porque la flexión es en sólo una dirección, es decir, perpendicular a los bordes de soporte. Si la losa está soportada por vigas en sus cuatro bordes, se denomina *losa en dos direcciones* porque la flexión se da en ambas direcciones. En realidad, si una losa rectangular está soportada en los cuatro bordes, pero el lado largo es dos o más veces mayor que el lado corto, la losa se comportará, para todo fin práctico, como una losa en una dirección, con la flexión desarrollándose primordialmente en la dirección corta. Tales losas se diseñan como losas en una dirección. Se pueden verificar fácilmente estas afirmaciones sobre el momento de flexión, haciendo soportar una hoja de papel en dos lados opuestos o en sus cuatro lados de la manera descrita. Esta sección se ocupa de las losas en una dirección; las losas en dos direcciones se estudiarán en los capítulos 16 y 17. Un gran porcentaje de losas de concreto reforzado caen dentro de la clasificación de losas en una dirección.

Se hace la suposición de que una losa en una dirección es una viga rectangular con una relación grande de ancho a longitud. Normalmente, una porción de 12 plg de ancho de la losa se diseña como una viga (véase la figura 4.7), suponiendo que la losa consiste en una serie de tales vigas colocadas una al lado de la otra. El método de análisis es algo conservador, debido a la restricción lateral proporcionada por las partes adyacentes de la losa. Normalmente, una viga tiende a dilatarse lateralmente al flexionarse, pero esta tendencia a dilatarse de cada una de las tiras de 12 plg es resistida por las tiras adyacentes de 12 plg de ancho, que también tienden a expandirse. En otras palabras, se supone que el módulo de Poisson es igual a cero. En realidad, la tendencia a la expansión lateral ocasiona una ligera rigidez de las tiras de la viga, que no se toma en cuenta en el procedimiento de diseño usado aquí.

La viga de 12 plg de ancho es muy conveniente al hacer los cálculos de carga, ya que las cargas normalmente se especifican en libras por pie cuadrado, y por ende la carga sustentada por pie de longitud de la viga de 12 plg de ancho es la carga por pie cuadrado soportada por la losa. La carga soportada por la losa en una dirección, incluyendo su propio peso, se transfiere a los miembros que soportan los bordes de la losa. Obviamente, el refuerzo por flexión se coloca perpendicularmente a estos soportes, es decir, paralelamente a la dirección larga de las vigas de 12 plg de ancho. Este refuerzo por flexión, según el

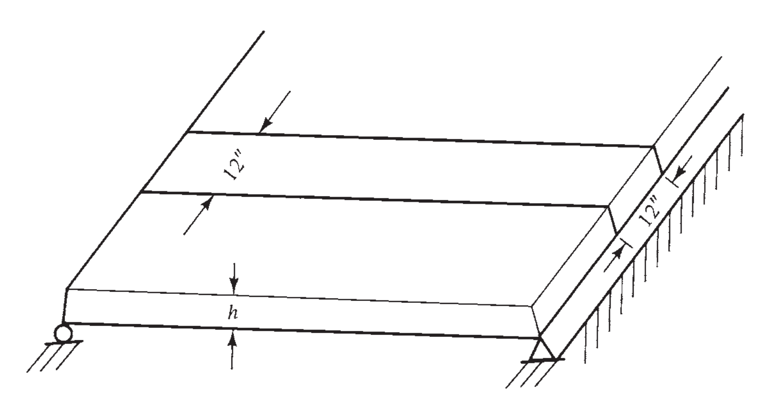


Figura 4.7 Tira de 12″ en una losa de una dirección, simplemente apoyada.

ACI (7.6.5), no debe estar separado entre centros a más de tres veces el espesor de la losa, o 18 plg. Por supuesto, se coloca también algo de refuerzo en la otra dirección para resistir los esfuerzos por contracción y por temperatura.

El espesor requerido para una losa de una dirección depende de la flexión, la deflexión y los requisitos de esfuerzo cortante. Como se vio en la sección 4.2, el código ACI (9.5.2.1) estipula ciertas limitaciones claro/longitud para los miembros a flexión de concretos en que no se calculan las deflexiones.

Por las cantidades de concreto empleadas en las losas de piso, las longitudes de éstas se redondean a valores más cercanos que en el caso de las longitudes de vigas. Los espesores de losas se redondean generalmente al $\frac{1}{4}$ de plg más cercano en el lado alto en losas de 6 plg o menores, y a la $\frac{1}{2}$ plg más cercana en el lado alto en losas de 6 plg de espesor.

El concreto se contrae al endurecerse. Además, ocurren cambios de temperatura que ocasionan expansión y contracción en el concreto. Cuando la temperatura desciende, el efecto de contracción y el acortamiento por temperatura se suman. El código (7.12) establece que el refuerzo por contracción y temperatura debe proporcionarse en una dirección perpendicular al refuerzo principal de las losas de una dirección. (En losas de dos direcciones, el refuerzo para la flexión se proporciona en ambas.) El código establece que para varillas corrugadas de grado 40 o 50, el porcentaje mínimo de este acero debe ser 0.002 veces el área total de la sección transversal de la losa. Nótese que el área total de la sección transversal es bh (en donde h es el espesor de la losa). El código (7.12.2.2) estipula que el esfuerzo por contracción y temperatura no debe estar separado más de cinco veces el espesor de la losa, o más de 18 plg. Cuando se usan varillas corrugadas grado 60 o malla soldada de alambre, el área mínima debe ser $0.0018bh$. Para losas con $f_y > 60\,000$ lb/plg^2, el valor mínimo es $\frac{(0.0018 \times 60\,000)}{f_y} \geq 0.0014$.

En unidades SI, los porcentajes mínimos de refuerzo son 0.002 para aceros de grados 300 y 350 y 0.0018 para acero de grado 420. Cuando $f_y > 420$ MPa, el porcentaje mínimo es igual a $\frac{(0.0018 \times 420)}{f_y}$. El refuerzo no debe estar separado más de cinco veces el espesor de la losa, o 500 mm.

Si los muros de la estructura o las columnas grandes ofrecen una resistencia apreciable a los movimientos de contracción y temperatura, muy bien puede ser necesario aumentar las cantidades mínimas señaladas.

El acero por contracción y temperatura sirve como una malla de acero al unirse perpendicularmente al refuerzo por flexión principal manteniéndolo firmemente en posición. Este acero sirve también para distribuir transversalmente las cargas concentradas en la losa. (De manera similar, la AASHTO estipula cantidades mínimas permisibles de refuerzo en losas, refuerzo transversal al refuerzo principal por flexión que distribuye lateralmente las cargas por ruedas de vehículos.)

Las áreas de acero suelen determinarse para anchos de 1 pie en losas, zapatas y muros de concreto reforzado. Una tabla de las “áreas de varillas en losas” como la tabla A.6 del apéndice es muy útil para la selección de las varillas que deben usarse. Se da a continuación una breve explicación de cómo se elaboró esta tabla.

Para un ancho de 1 pie de concreto, el área total de acero es obviamente igual al número total o promedio de varillas en un ancho de 1 pie, multiplicado por el área de la sección transversal de una varilla. Esto se puede expresar como (12″/separación centro a centro de varillas) (área de una varilla). Siguen algunos ejemplos, y los valores obtenidos podrán comprobarse en la tabla. Si se logra entender estos cálculos, se podrá extender la tabla a cualquier caso en consideración.

1. Varillas del #9, 6 plg entre centros. Área total en un pie de ancho $= \left(\frac{12}{6}\right)(1.00) = 2.00$ plg^2.
2. Varillas del #9, 5 plg entre centros. Área total en un pie de ancho $= \left(\frac{12}{5}\right)(1.00) = 2.40$ plg^2.

El ejemplo 4.6 ilustra el diseño de una losa en una dirección. Se observará que el requisito de recubrimiento del código (7.7.1.c) para el refuerzo en losas (varillas del #11 y menores) es de $\frac{3}{4}$ plg libre, a menos que los requisitos de corrosión o protección contra el fuego sean más severos.

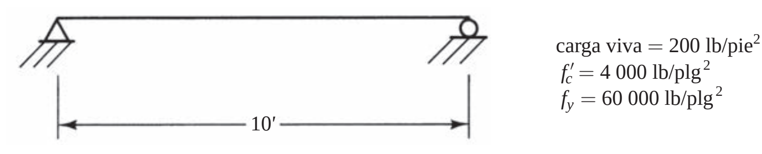


Figura 4.8

EJEMPLO 4.6

Diseñar una losa en una dirección para el interior de un edificio usando el claro, las cargas y los otros datos dados en la figura 4.8. Se especifica concreto con agregado de peso normal con una densidad especificada de 145 lb/pie^3.

SOLUCIÓN **Espesor mínimo total *h* de la losa si no se calculan deflexiones (Véase la tabla 4.7)**

$$h = \frac{\ell}{20} = \frac{(12)(10)}{20} = 6''$$

Suponga una losa de 6 plg (con *d* = aproximadamente $6''-\frac{3'}{4}$ de recubrimiento $-\frac{1'}{4}$ para un tamaño estimado del semidiámetro de la varilla = 5.0″). Se calcula el momento y luego se determina la cantidad de acero requerido. Si este valor no parece razonable, se ensaya un espesor diferente.

Diseñe una tira de 12 plg de ancho de la losa. Usualmente se agrega 5 lb/pie^3 para considerar el peso del refuerzo, de modo que se usa 150 lb/pie^3 al calcular el peso de un miembro de concreto de peso normal.

$$\textit{Carga muerta} = \text{peso de la losa} = \left(\frac{6}{12}\right)(150) = 75 \text{ lb/pie}^3$$

$$\textit{Carga viva} = 200 \text{ lb/pie}^2$$

$$w_u = (1.2)(75) + (1.6)(200) = 410 \text{ lb/pie}^3$$

$$M_u = \frac{(0.410)(10)^2}{8} = 5.125 \text{ pie-klb}$$

$$\frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{(12)(5\,125)}{(0.9)(12)(5.00)^2} = 227.8 \text{ lb/plg}^2$$

$$\rho = 0.00393 \text{ (de la tabla A.13 del apéndice)}$$

$$> \rho_{\text{mín}} = 0.0033$$

$$A_s = (0.00393)(12)(5.0) = 0.236 \text{ plg}^2\text{/pie}$$

Use varillas del #4 @ 10” de la tabla A.6 del apéndice (A_s = 0.24 plg^2/pie)

separación < máximo de 18 plg según el ACI 7.6.5

Dirección transversal: acero de contracción y temperatura

$$A_s = 0.0018bh = (0.0018)(12)(6) = 0.1296 \text{ plg}^2\text{/pie}$$

Use varillas del #3 @ 10″ (0.13 plg^2/pie) seleccionado esto de la tabla A.6 del apéndice

Separación < máximo de 18 plg según el ACI 7.12.2.2 OK

Las varillas del #4 se colocan debajo de las varillas del #3 en este caso. Las varillas del #4 son el refuerzo primario para la flexión y el valor de *d* se basa en esta hipótesis. Las varillas del #3 son para control de contracción y temperatura, y su longitud dentro de la losa no es tan crítica.

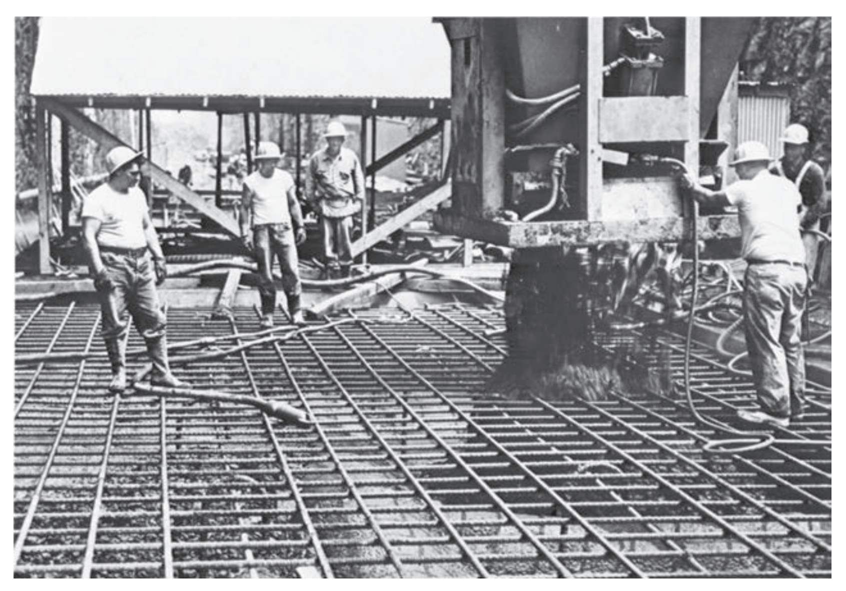
Los proyectistas de estructuras de concreto reforzado deben ser muy cuidadosos en cumplir con los requisitos de resistencia al fuego en los reglamentos de construcción. Si el reglamento aplicable requiere cierta clasificación de resistencia al fuego para los sistemas de piso, tal requisito puede obligar al

proyectista a usar losas de mayor espesor que las requeridas para satisfacer los requisitos del ACI para el diseño de resistencia. *En otras palabras, el proyectista de un edificio debe estudiar cuidadosamente las normas relativas a la resistencia al fuego del reglamento de construcciones vigente antes de proseguir con el diseño*. La sección 7.7.8 del ACI 318-08 incluye tal requisito.

4.8 VIGAS EN VOLADIZO Y VIGAS CONTINUAS

Las vigas en voladizo que soportan cargas de gravedad están sometidas a momentos negativos en toda su longitud. En consecuencia, sus varillas de refuerzo se colocan en su parte superior o lados de tensión, como se muestra en las figuras 4.9 y 4.10*a*). El lector observará que en tales miembros el momento máximo se presenta en las caras de los empotramientos. Como consecuencia, se requieren cantidades más grandes de refuerzo en esos puntos. También debe observar que las varillas no pueden interrumpirse en las caras de los empotramientos. Deben prolongarse o anclarse en el concreto a cierta distancia más allá de la pared del empotrado. Esta distancia se denomina longitud de desarrollo. La *longitud de desarrollo* no tiene que ser recta como se muestra en la figura, porque las varillas pueden doblarse a 90 o 180°. Las longitudes de desarrollo y las varillas con ganchos se estudian a fondo en el capítulo 7.

Hasta ahora, sólo se han considerado miembros estáticamente determinados. Sin embargo, el caso más común es que las vigas y losas sean continuas sobre varios apoyos, como en el caso representado en la figura 4.10. Puesto que el refuerzo es necesario en los lados de tensión de las vigas, se coloca en la parte inferior de las zonas de momentos positivos y en la parte superior de las zonas de momentos negativos. Hay varias maneras de colocar las varillas de refuerzo para resistir los momentos positivos y negativos en los miembros continuos. Un acomodamiento posible se muestra en la figura 4.10*a*). En el capítulo 14 se estudian en detalle estos miembros, incluyendo arreglos de varillas.



Colado de una losa de concreto. (Cortesía de Bethlehem Steel Corporation.)

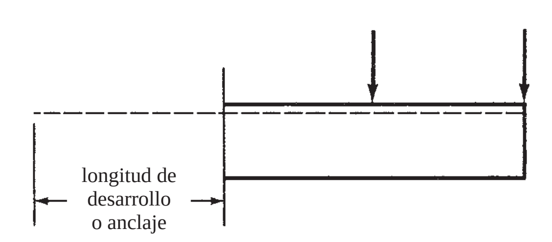


Figura 4.9 Viga en voladizo.

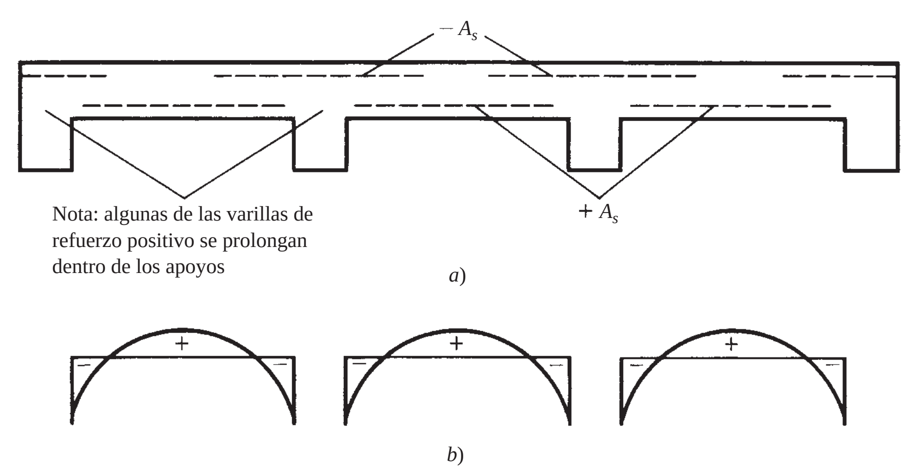


Figura 4.10 Losa continua con la colocación teórica de las varillas de refuerzo para un diagrama de momento dado.

4.9 EJEMPLO CON UNIDADES SI

El ejemplo 4.7 ilustra el diseño de una viga usando unidades SI.

EJEMPLO 4.7

Diseñar una viga rectangular para un claro simple de 10 m que soporte una carga muerta de 20 kN/m (no incluye el peso de la viga) y una carga viva de 30 kN/m. Use $\rho = 0.5\rho_b$, $f'_c = 28$ MPa, y $f_y = 420$ MPa y un peso para el concreto de 23.5 kN/m^3. No emplee el espesor límite del ACI.

SOLUCIÓN Suponga que el peso de la viga es de 10 kN/m y $\phi = 0.90$.

$$w_u = (1.2)(30) + (1.6)(30) = 84 \text{ kN/m}$$

$$M_u = \frac{(84)(10)^2}{8} = 1\,050 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\rho = \left(\frac{1}{2}\right)(0.0283) = 0.01415 \text{ de la tabla B.7 del apéndice}$$

$$M_u = \phi\rho f_y bd^2\left(1 - \frac{1}{1.7}\rho\frac{f_y}{f'_c}\right)$$

$$(10^6)(1\,050) = (0.9)(0.01415)(420)(bd^2)\left[1 - \left(\frac{1}{1.7}\right)(0.01415)\left(\frac{420}{28}\right)\right]$$

$$bd^2 = 2.2432 \times 10^8 \text{ mm}^3 \begin{cases} 400 \times 749 \\ 450 \times 706 \\ 500 \times 670 \leftarrow \end{cases}$$

Use una sección de 500 mm × 800 mm (*d* = 680 mm)

$$\text{Peso de la viga} = \frac{(500)(800)}{10^6}(23.5) = 9.4 \text{ kN/m}$$
$$< 10 \text{ kN/m supuesto}$$

$$A_s = (0.01415)(500)(680) = 4\,811 \text{ mm}^2$$ OK

Use seis varillas del #32 en dos filas (4 914 mm²). Una fila podría usarse aquí.

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{(4\,914)(420)}{(0.85)(28)(500)} = 173 \text{ mm}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{173}{0.85} = 204 \text{ mm}$$

$$\epsilon_t = \frac{680 - 204}{204}(0.003) = 0.0070 > 0.005 \therefore \underline{\phi = 0.90}$$

Nota: puede revisarse más fácilmente con valores de ρ.

$b_{mín} = 267$ mm de la tabla B.5 del apéndice para 3 varillas en una capa

< 500 mm OK

La sección final se muestra en la figura 4.11.

Nota: Este problema se puede resolver más rápidamente usando las tablas del apéndice. En la tabla B.9, con $f_y = 420$ MPa, $f'_c = 28$ MPa y $\rho = 0.01415>$

$$\frac{M_u}{\phi b d^2} = 5.201$$

$$bd^2 = \frac{M_u}{\phi(5.201)} = \frac{(1\,050)(10)^6}{(0.9)(5.201)} = 2.2432 \times 10^8 \text{ mm}^3$$

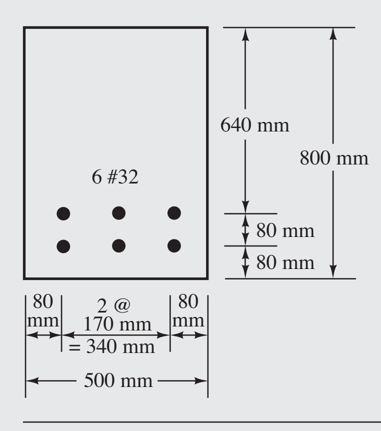


Figura 4.11

4.10 EJEMPLO CON COMPUTADORA

EJEMPLO 4.8

Repita el ejemplo 4.4 usando la Hoja de cálculo Excel para el capítulo 4.

SOLUCIÓN Use la Hoja de cálculo llamada Beam Design (Diseño de vigas). Ingrese las propiedades del material (f'_c, f_y) y M_u (puede tomarse del calce de la hoja de cálculo o simplemente ingresarse si usted ya lo sabe). Teclee $\rho = 0.009$ (dado en el ejemplo). Las dos tablas con encabezados b y d dan algunas elecciones para b y d basadas en el valor de ρ que usted escogió. Los valores supuestos más grandes de ρ conducen a valores más pequeños de b y d y viceversa. Seleccione $b = 18$ plg y $d = 31$ plg (muchas otras selecciones también son correctas). Añada 2.5 plg o más a d para obtener h e ingresar ese valor (usado únicamente para encontrar el peso de la viga en seguida). La hoja de cálculo recalcula ρ y A_s a partir de las valores reales b y d escogidos, por lo que debe observar que ρ no es el mismo originalmente supuesto (0.00895 en lugar de 0.009). Esto da como resultado un área de acero calculada ligeramente más pequeña que en el ejemplo 4.4. También puede ingresar el número de varillas y el tamaño para obtener un valor de A_s. Este valor debe exceder al valor teórico o aparecerá un mensaje de error. Usted debe inspeccionar para ver si esta selección de varillas estará situada dentro del ancho seleccionado.

Al calce de la hoja de cálculo, puede obtenerse el momento de diseño M_u si la viga es simplemente apoyada y uniformemente cargada con sólo cargas muertas y vivas. El peso propio de la viga se calcula basado en los valores ingresados para *b* y *h* (celdas D23 y D25). Usted puede tener que iterar algunas veces antes de que estos valores concuerden. En este ejemplo, la carga muerta es 2 klb por pie lineal de peso propio. El valor que debe ingresarse para w_D es 2.0 + 0.65 libra por pie lineal, con el segundo término tomado de la hoja de cálculo. Al trabajar este problema la primera vez, usted probablemente no tenga estas dimensiones para *b* y *h*, por tanto, el peso propio no sería correcto. La iteración tal como se hace en el ejemplo 4.4 también se requiere con la hoja de cálculo, aunque es mucho más rápido.

Diseño de vigas rectangulares con refuerzo simple

$f'_c =$ 3 klb/plg^2

$f_y =$ 60 klb/plg^2

$\beta_1 =$ 0.85

$M_u =$ 623.4 pie-klb

Instrucciones: Introduzca valores sólo en las celdas que estén sombreadas con amarillo. Otros valores también se calculan a partir de estos valores ingresados.

Suponga $\rho =$ 0.009

$$bd^2 = \frac{M_u}{\phi f_y \rho\,(1 - \rho f_y/(1.7 f'_c))} = 17\,215 \text{ plg}^3$$

$R = d/R$

R	*b*	*d*
1	25.82	25.82
1.2	22.86	27.44
1.4	20.63	28.88
1.5	19.70	29.56
1.6	18.87	30.20
1.7	18.13	30.82
1.8	17.45	31.41
1.9	16.83	31.98
2	16.27	32.58

b	*d*
14	35.07
15	33.88
16	32.80
17	31.82
18	30.93
19	30.10
20	29.34
21	28.63
22	27.97

Estas tablas dan algunas selecciones para *b* y *d* que usted puede redondear para ingresarlas aquí.

Seleccione *b* y *d*

$b =$ 18 plg.

$d =$ 31 plg.

$h =$ 34 plg.

$R_n =$ 480.52

$$\rho = 0.85 f'_c/f_y \left(1 - (1 - 2R_n/(.85 f'_c))^{0.5}\right) = 0.00895$$

$$A_s = \rho bd = 4.99 \text{ plg}^2$$

	No. de varillas	Tamaño de varilla	-
seleccione las varillas	5	# 9	$A_s = 5.00$ plg^2

Cálculo de M_u para viga simplemente apoyada con cargas muerta y viva uniformemente distribuidas		
w_D =	2.65	lb por pie lineal
w_L =	3	lb por pie lineal
claro =	25	pies
w_u =	7.980	lb por pie lineal
M_u =	623.4	pie-klb
γ_c =	145	lb/pie^3
peso propio =	0.6375	lb por pie lineal

PROBLEMAS

4.1 Las cargas estimadas axiales de servicio o de trabajo y los momentos flexionantes para una columna específica son los siguientes: $P_D = 100$ klb, $P_L = 60$ klb, $M_D = 30$ pie-klb y $M_L = 20$ pie-klb. Calcule los valores de carga axial y de momento que deben usarse en el diseño. (*Resp.* $P_u = 216$ klb, $M_u = 68$ pie-klb.)

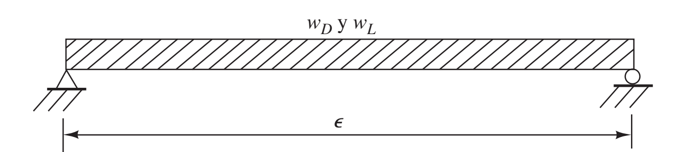
4.2 Determine la resistencia de diseño requerida para una columna para la cual $P_D = 120$ klb, $P_L = 40$ klb y P_W *por* viento = 60 klb a compresión, u 80 klb a tensión.

4.3 Una losa de concreto reforzado debe soportar una carga muerta de piso de trabajo de 90 lb/pie^2, que incluye el peso de la losa de concreto y una carga viva de trabajo de 40 lb/pie^2. Determine la carga uniforme factorizada para la cual debe diseñarse la losa. (*Resp.* $w_u = 172$ lb/pie^2.)

4.4 Usando la hoja de cálculo del capítulo 4, repita los siguientes problemas:

a) Problema 4.1
b) Problema 4.2
c) Problema 4.3

En los problemas 4.5 a 4.9 diseñe secciones rectangulares para las vigas, cargas y valores dados. Los pesos de las vigas no están incluidos en las cargas indicadas. Esboce las secciones transversales de las vigas, incluyendo los tamaños de las varillas, arreglos, y separaciones. Suponga que el concreto pesa 150 lb/pie^3. Use $h = d + 2.5$”.



Problema número	$f_y(\phi)$	$f'_c(\phi)$	Claro ℓ (pie)	w_D no incluye el peso de la viga wt (klb/pie)	w_L (klb/pie)	ρ^*
4.5	60 000	4 000	24	2	2.8	$\varepsilon_t = 0.0075$
4.6	60 000	4 000	30	2	2	$\frac{0.18 f'_c}{f_y}$
4.7	50 000	3 000	28	3	3	$\frac{1}{2}\rho_b$
4.8	60 000	4 000	32	2	1.8	$\frac{1}{2}\rho_b$
4.9	60 000	3 000	25	1.8	1.5	$\epsilon_t = 0.005$

*Véase la tabla A.7 para los valores de ρ que corresponden a los valores de ϵ_t listados.

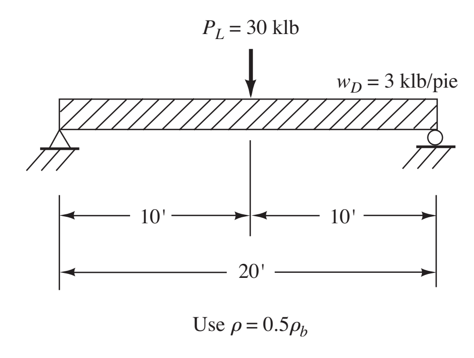
Una respuesta al problema 4.5: 18 plg × 26 plg con seis varillas del #9.

Una respuesta al problema 4.7: 22 plg × 33 plg con 6 varillas del #11.

Una respuesta al problema 4.9: 16 plg × 25 plg con 5 varillas del #9.

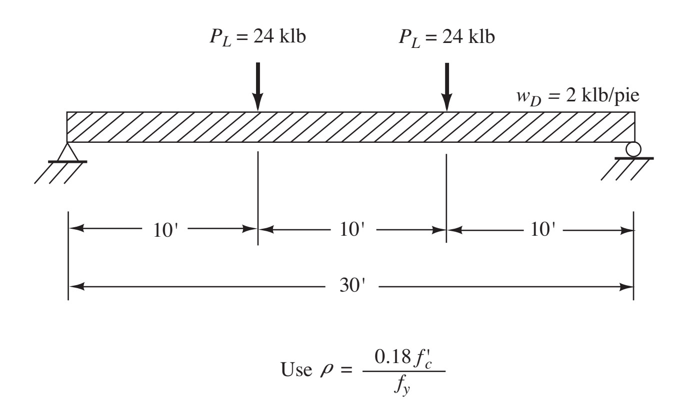
En los problemas 4.10 a 4.22 diseñe secciones rectangulares para las vigas, cargas y valores ρ mostrados en las figuras anexas. Los pesos de las vigas no están incluidos en las cargas indicadas. Esboce las secciones transversales de las vigas, incluyendo el tamaño de las varillas, arreglos y separaciones. Suponga que el concreto pesa 150 lb/pie^3, $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2, y $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2, a menos que se diga otra cosa.

Problema 4.10



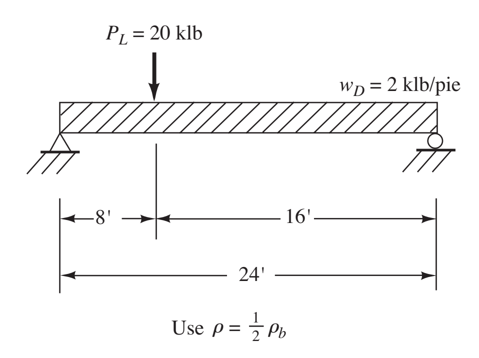
4.11 Repita el problema 4.10 si $w_D = 2$ klb/pie y si $P_L = 10$ klb. (*Una resp.* 12 plg × 21 plg con 4 varillas del #8.)

Problema 4.12



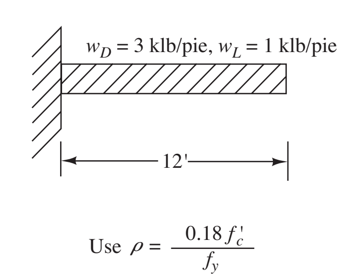
4.13 Repita el problema 4.12 si $w_D = 1.5$ klb/pie y $P_L = 30$ klb. (*Una resp.* 16 plg × 34 plg con 4 varillas del #11.)

Problema 4.14



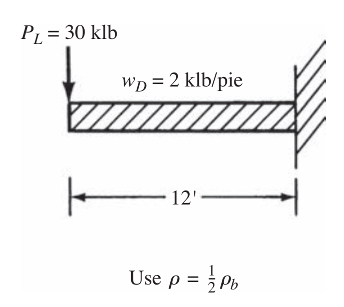
4.15 Repita el problema 4.14 si $w_D = 3$ klb/pie y si $P_L = 40$ klb, $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2 y si $\rho = 0.5\rho_b$. (*Una resp.* 16 plg × 33 plg con 5 varillas del #10.)

Problema 4.16



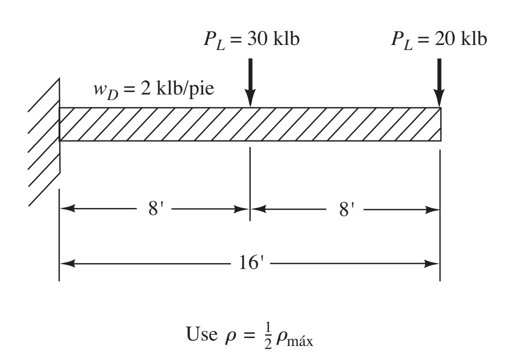
4.17 Repita el problema 4.16 si el claro de la viga = 14 pies. (*Una resp.* 20 plg × 27 plg con 6 varillas del #9 en la parte superior.)

Problema 4.18

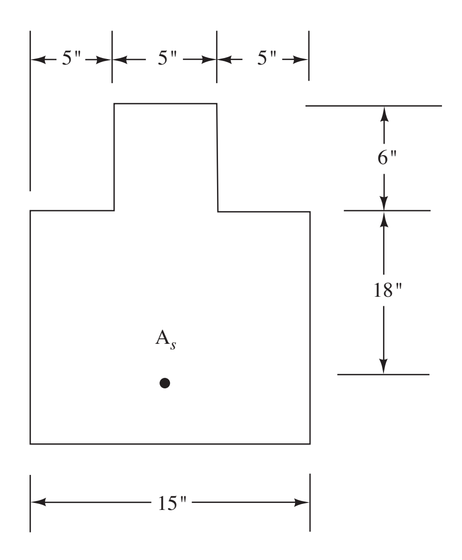


4.19 Repita el problema 4.18 si $P_L = 10$ klb; $w_D = 1$ klb/pie, $\ell =$ 16 pies y $\rho = \frac{1}{2}\rho_b$. (*Una resp.* 14 plg × 27 plg con 4 varillas del #10 en la parte superior.)

Problema 4.20



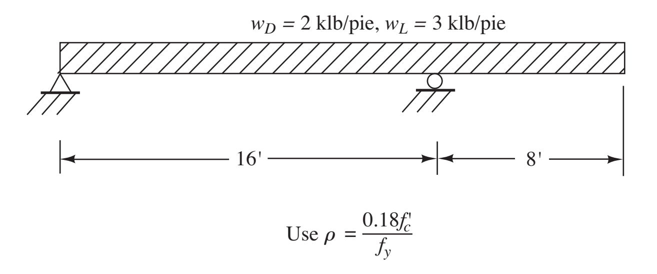
4.21 Seleccione varillas de refuerzo para la viga mostrada si $M_u =$ 150 pie-klb, $f_y = 60\,000$ lb/plg^2 y $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2. (*Sugerencia:* suponga que la distancia del c. g. del acero de tensión al c. g. del bloque de compresión es igual a 0.9 veces la longitud efectiva *d* de la viga.) Después de calcular el área de acero, revise la distancia supuesta y revise el área de acero si es necesario. ¿Es $\epsilon_t \geq 0.005$? (*Resp.* $A_s = 1.57$ plg^2, $\epsilon_t > 0.005$.)



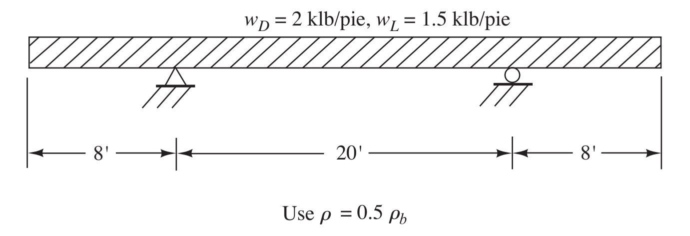
4.22 Repita el problema 4.21 para $M_u = 250$ pie-klb.

En los problemas 4.23 y 4.24, diseñe secciones rectangulares para las vigas y cargas mostradas en las figuras correspondientes. Los pesos de las vigas no se incluyen en las cargas dadas. $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2. Las cargas vivas deben colocarse donde ocasionen las condiciones más severas en las secciones consideradas. Escoja los tamaños de las vigas para el momento más grande (positivo o negativo) y luego seleccione el acero requerido para el momento máximo positivo y para el momento máximo negativo. Finalmente, esquematice la viga y muestre las posiciones aproximada de las varillas.

Problema 4.23 (*Una resp.* 12 plg × 23 plg con 3 varillas del #9 de refuerzo negativo y 4 varillas del #7 de refuerzo positivo.)

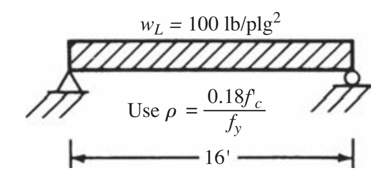


Problema 4.24

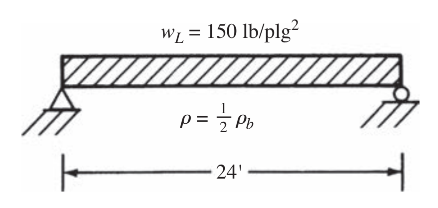


En los problemas 4.25 y 4.26 diseñe losas interiores en una dirección para las condiciones mostradas. Peso del concreto = 150 lb/pie^3, $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2. No use el espesor mínimo para deflexiones del código ACI (tabla 4.1). Los porcentajes de acero se dan en las figuras. La única carga muerta es el peso de la losa.

Problema 4.25 (*Una resp.* Losa de 5 plg con varillas del #6 a 10 plg del refuerzo principal.)



Problema 4.26

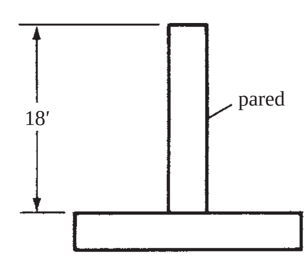


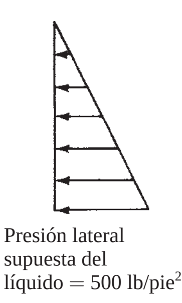
4.27 Repita el problema 4.26 usando el requisito de espesor mínimo del código ACI para los casos en que las deflexiones no se calculan (tabla 4.1). No use el valor de ρ dado en el problema 4.26. (*Resp.* Losa de $14\frac{1}{2}$ plg con #6 @ 9 plg del refuerzo principal.)

4.28 Usando $f'_c = 3\ 000$ lb/plg^2, $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2, y ρ correspondiendo a $\epsilon_t = 0.005$, determine la longitud de una viga simple que soporte su propio peso en un claro simple de 200 pies.

4.29 Determine la longitud requerida para una viga que soporte su propio peso sólo para un claro de 100 pies. Dados $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2; $f_y = 60\,000$ lb/plg^2; y $\rho = 0.5\rho_b$. (*Resp.* $d = 32.5$ plg.)

4.30 Determine el espesor de la pared por máximo momento para el muro de retención mostrado en la figura acompañante. También el área de acero requerido en la parte inferior y a media altura de la pared si $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2. Suponga que se usarán varillas #8 y que el espesor de la pared es constante para la altura de 20 pies. Suponga también que el recubrimiento libre requerido es de 2 plg con $\rho = 0.5\rho_b$.





4.31 a) Diseñe una losa precolada de concreto de 24 plg de ancho para soportar una carga viva de 60 lb/pie^2 en un claro simple de 15 pies. Suponga que se requiere un recubrimiento mínimo de $\frac{5}{8}$ plg de acuerdo con la sección 7.7.3 del código. Use malla soldada de alambre como refuerzo, $f_y = 60\,000$ lb/plg^2 y $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2, $\rho = 0.18 f'_c/f_y$. (*Resp.* Losa de $3\frac{1}{2}$ plg con 4 × 8 D12/D6.)
b) ¿Puede un tacleador de futbol americano de 380 lb caminar a través del centro del claro cuando la otra carga viva no está presente? Suponga un impacto de 100%. (*Resp.* Sí.)

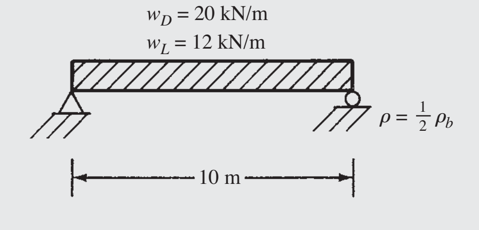
4.32 Elabore un diagrama de flujo para el diseño de vigas rectangulares reforzadas por tensión.

4.33 Usando la hoja de cálculo del capítulo 4, resuelva los siguientes problemas.
a) Problema 4.6. (*Resp.* 16 plg × 33 plg con 5 varillas del #10.)
b) Problema 4.18. (*Resp.* 18 plg × 27 plg con 5 varillas del #10.)

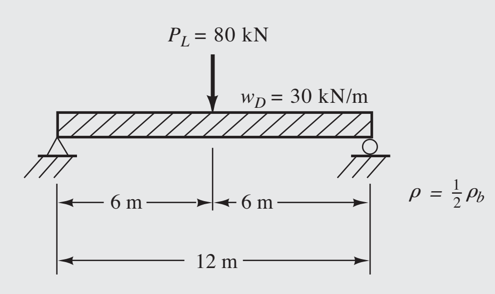
Problemas con unidades SI

En los problemas 4.34 a 4.39 diseñe secciones rectangulares para las vigas, cargas y valores ρ mostrados en las figuras correspondientes. Los pesos de las vigas no se incluyen en las cargas dadas. Dibuje un croquis de las secciones trasversales que incluyan los tamaños, la disposición y la separación de las varillas. Suponga que el concreto pesa 23.5 kN/m^3, $f_y = 420$ MPa y $f'_c = 28$ MPa.

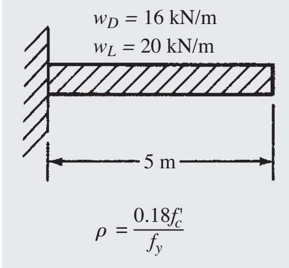
Problema 4.34



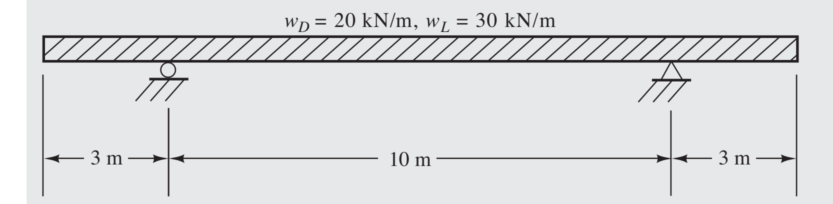
Problema 4.35 (*Una resp.* 500 mm × 830 mm con 5 varillas del #36.)



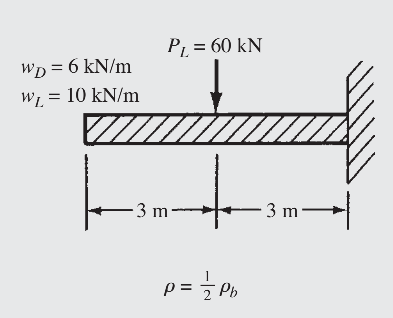
Problema 4.36



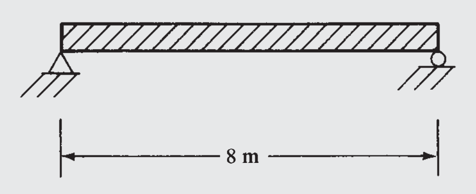
Problema 4.37 Coloque las cargas vivas de manera que causen momentos máximos positivos y negativos. $\rho = 0.18 f'_c/f_y$.(*Una resp.* 400 mm × 830 mm con 5 varillas del #32 como refuerzo positivo.)



Problema 4.38



4.39 Diseñe la losa en una dirección mostrada en la figura acompañante que debe soportar una carga viva de 10 kN/m^2. No use la limitación de espesor para deflexiones del ACI y suponga que el concreto pesa 23.5 kN/m^3. Suponga que f'_c = 28 MPa y f_y = 420 MPa. Use $\rho = \rho_{máx}$. (*Una resp*. Losa de 220 mm con acero principal de #29 a 200 mm.)



5

Análisis y diseño de vigas T y vigas doblemente reforzadas

5.1 VIGAS T

Los sistemas de concreto reforzado para piso consisten normalmente en losas y vigas coladas monolíticamente. En consecuencia, las dos partes actúan conjuntamente para resistir las cargas. En efecto, las vigas tienen una tira en su parte superior llamada *patines* y las vigas en forma de T así formadas reciben el nombre de *vigas T*. La parte de una viga T situada bajo la losa se denomina *alma*. (Las vigas pueden tener forma de L si el alma se encuentra en el extremo de una losa.) Los estribos (descritos en el capítulo 8) del alma se extienden dentro de las losas, tal como lo pueden hacer las varillas dobladas del refuerzo principal, con lo que ayudan al trabajo de conjunto de las vigas y las losas.

Es problemático estimar qué tanto de la losa actúa como parte de la viga. Si los patines de vigas T son robustos y compactos en su sección transversal, los esfuerzos de flexión quedarán distribuidos con bastante uniformidad a través de la zona de compresión. Sin embargo, si los patines son anchos y delgados, los esfuerzos de flexión variarán bastante a través del patín debido a las deformaciones por cortante. Cuanto más alejada del alma esté una parte de la losa o patín, menor será su esfuerzo de flexión.

En lugar de considerar una distribución de esfuerzo variable a través del ancho total del patín, el código ACI (8.12.2) propone un ancho menor, supuestamente con una distribución uniforme del esfuerzo, para fines de diseño. El objetivo es tener la misma fuerza total de compresión en el ancho reducido que la que se da en el ancho total con sus esfuerzos variables.

El área achurada en la figura 5.1 muestra el tamaño efectivo de una viga T. Para vigas T con patines en ambos lados del alma, el código establece que el ancho efectivo del patín no debe exceder un cuarto del claro de la viga y que el ancho de la porción volada a cada lado no debe exceder ocho veces el espesor de la losa o la mitad de la distancia libre al alma de viga adyacente. Las vigas T aisladas deben tener un espesor de patín no menor que la mitad del ancho del alma y el ancho efectivo de su patín no debe ser mayor que cuatro veces el ancho del alma (ACI 18.12.4). Si hay solamente un patín a un lado del alma, el ancho del patín volado no debe exceder un doceavo del claro, $6h_f$ o la mitad de la distancia libre a la siguiente alma (ACI 8.12.3).

El análisis de las vigas T se hace de manera muy parecida a como se analizan las vigas rectangulares en que las especificaciones relacionadas con las deformaciones unitarias en el refuerzo son idénticas. Para repetirlo brevemente, es conveniente tener valores de $\epsilon_t \geq 0.005$ y no deben ser menores que 0.004, a menos que el miembro esté sujeto a una carga axial $\geq 0.10 f'_c A_g$. Usted aprenderá de que los valores de ϵ_t son casi siempre mucho mayores que 0.005 en vigas T debido a sus patines a compresión muy grandes. Para tales miembros los valores de c normalmente son muy pequeños y los valores de ϵ_t calculados son muy grandes.

El eje neutro (N.A.) de las vigas T puede situarse en el patín o en el alma, dependiendo de las proporciones de las losas y las almas. Si se sitúa en el patín, como es el caso más común para momentos positivos, son aplicables las fórmulas de las vigas rectangulares, como puede verse en la figura 5.2(*a*). Se supone que el concreto abajo del eje neutro está agrietado y su forma no influye en los cálculos de flexión (aparte

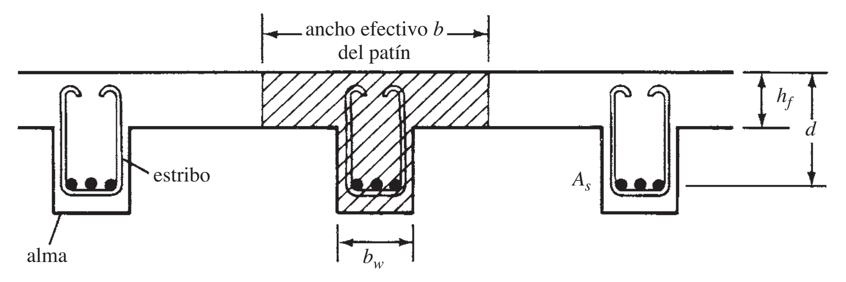


Figura 5.1 Ancho efectivo de vigas T.

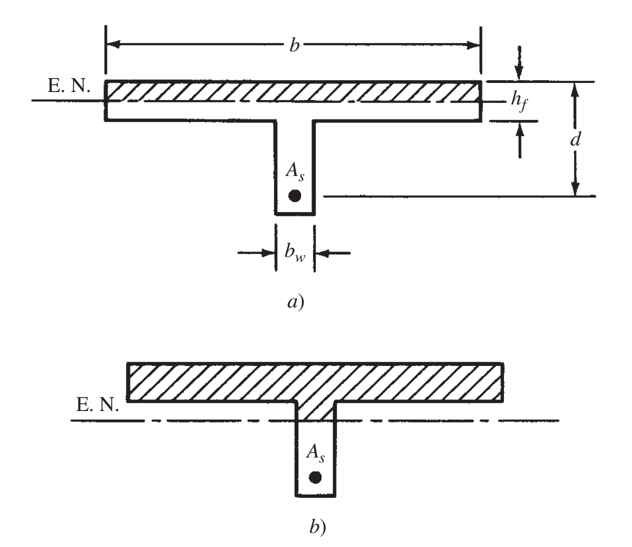


Figura 5.2 Posiciones del eje neutro.

de su peso). La sección arriba del eje neutro es rectangular. Sin embargo, si el eje neutro está abajo del patín, como se muestra para la viga en la figura 5.2(*b*), el concreto de compresión por arriba del eje neutro ya no consiste en un solo rectángulo y así las fórmulas para las vigas rectangulares no son aplicables.

Si se supone que el eje neutro se sitúa dentro del patín, el valor de a puede calcularse igual que para las vigas rectangulares:

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f_c' b} = \frac{\rho f_y d}{0.85 f_c'}$$

La distancia c al eje neutro es igual a a/β_1. Si el valor calculado de a es igual o menor que el espesor del patín, la sección puede suponerse, para todo propósito práctico, como rectangular, aún cuando el valor calculado de c sea realmente mayor que el espesor del patín.

Una viga realmente no tiene que parecerse a una viga T para serlo. Las secciones transversales de las vigas mostradas en la figura 5.3 muestran este hecho. Para estos casos el concreto a compresión tiene forma de T y la forma o el tamaño del concreto en el lado de tensión, que se supone se agrietará, no influye en los momentos teóricos resistentes. Sin embargo, la forma, el tamaño y el peso del concreto de tensión sí afectan la magnitud de las deflexiones que ocurren (como se verá en el capítulo 6) y el peso muerto afecta las magnitudes de los momentos que deben resistirse.

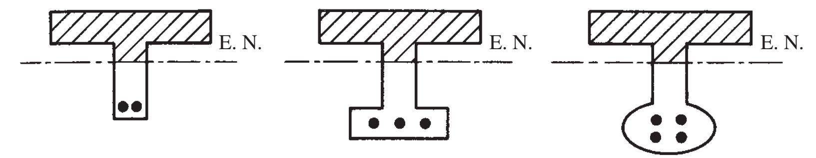


Figura 5.3 Diversas secciones transversales de vigas T.



Museo de Historia Natural, Kensington, Londres, Inglaterra. (Cortesía de Cement and Concrete Association.)

5.2 ANÁLISIS DE VIGAS T

El cálculo de las resistencias de diseño de vigas T se ilustra en los ejemplos 5.1 y 5.2. En el primero de estos problemas, el eje neutro se sitúa en el patín, mientras que en el segundo se sitúa en el alma. El procedimiento usado en ambos ejemplos implica los siguientes pasos:

1. Revise A_s mínimo según la Sección 10.5.1 del ACI usando b_w como el ancho del alma.

2. Calcule $T = A_s f_y$.

3. Determine el área del concreto en compresión (A_c) esforzado a $0.85f'_c$.

$$C = T = 0.85f'_c A_c$$

$$A_c = \frac{T}{0.85f'_c}$$

4. Calcule a, c y ϵ_r.
5. Calcule ϕM_n.

En el ejemplo 5.1, donde el eje neutro se sitúa en el patín, sería lógico aplicar las ecuaciones rectangulares normales de la sección 3.4 de este libro, pero el autor ha usado el método del par, para que se entienda mejor la solución del ejemplo 5.2, donde el eje neutro queda en el alma. Este mismo procedimiento puede usarse para determinar las resistencias de diseño en las vigas de concreto reforzadas sólo con acero de tensión, de cualquier forma de sección (⊤, Γ, ⊓, triangular, circular, etcétera).

EJEMPLO 5.1

Determinar la resistencia de diseño de la viga T mostrada en la figura 5.4, con $f'_c = 4\,000$ lb/plg² y $f_y = 60\,000$ lb/plg². La viga tiene un claro de 30 pies y está colada integralmente con una losa de piso que tiene 4 plg de espesor. La distancia libre entre almas es de 50 plg.

SOLUCIÓN **Revisar el ancho efectivo del patín**

$$b \leq 16h_f = b_w + 16(4) + 10 = 74 \text{ plg}$$
$$b \leq \text{ distancia libre promedio a las almas adyacentes} + b_w = 50 + 10 = 60 \text{ plg} \leftarrow$$
$$b \leq \text{claro}/4 = 30/4 = 7.5 \text{ pies} = 90 \text{ plg}$$

Comprobación de $A_{s\text{ mín}}$

$$A_{s\text{ mín}} = \frac{3\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d = \frac{(3\sqrt{4\,000})}{60\,000}(10)(24) = 0.76 \text{ plg}^2$$

$$\text{ni menor que } \frac{200 b_w d}{f_y} = \frac{(200)(10)(24)}{60\,000} = 0.80 \text{ plg}^2 \leftarrow$$

$$< A_s = 6.00 \text{ plg}^2 \;\underline{\underline{\text{OK}}}$$

Cálculo de T

$$T = A_s f_y = (6.00)(60) = 360 \text{ klb}$$

Determinación de A_c

$$A_c = \frac{T}{0.85 f'_c} = \frac{360}{(0.85)(4)} = 105.88 \text{ plg}^2$$

$$< \text{área del patín} = (60)(4) = 240 \text{ plg}^2 \;\therefore\; \underline{\text{el E. N. está en el patín}}$$

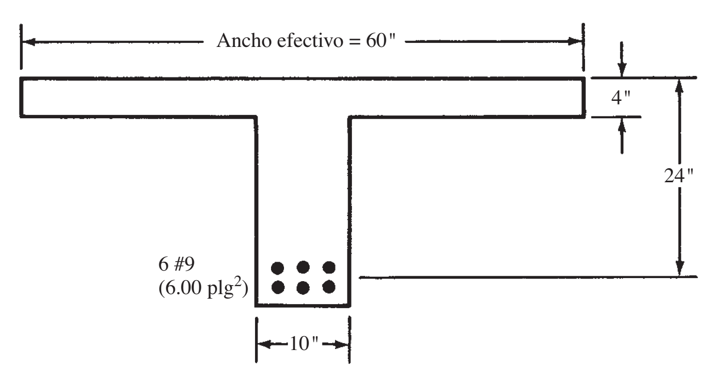


Figura 5.4

Cálculo de a, c y ϵ_t

$$a = \frac{105.88}{60} = 1.76 \text{ plg}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{1.76}{0.85} = 2.07 \text{ plg}$$

$$\epsilon_t = \left(\frac{d-c}{c}\right)(0.003) = \left(\frac{24-2.07}{2.07}\right)(0.003)$$

$$= 0.0318 > 0.005$$

$$\underline{\therefore \text{ La sección es dúctil y } \phi = 0.90}$$

Cálculo de ϕM_n

Obviamente, el bloque de esfuerzos se sitúa por completo dentro del patín y son entonces aplicables las fórmulas rectangulares. Sin embargo, con el método del par de fuerzas, se tiene:

$$\text{Brazo de palanca} = z = d - \frac{a}{2} = 24 - \frac{1.76}{2} = 23.12 \text{ plg}$$

$$\phi M_n = \phi T z = (0.90)(360)(23.12)$$

$$= 7\,490.9 \text{ plg-klb} = \underline{\underline{624.2 \text{ pie-klb}}}$$

EJEMPLO 5.2

Calcular la resistencia de diseño para la viga T mostrada en la figura 5.5 en la cual $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN **Comprobación de $A_{s\ \text{mín}}$**

$$A_{s\ \text{mín}} = \frac{3\sqrt{4\,000}}{60\,000}(14)(30) = 1.33 \text{ plg}^2$$

$$\text{ni menor que } \frac{(200)(14)(30)}{60\,000} = 1.40 \text{ plg}^2 \leftarrow$$

$$< A_s = 10.12 \text{ plg}^2\ \underline{\underline{\text{OK}}}$$

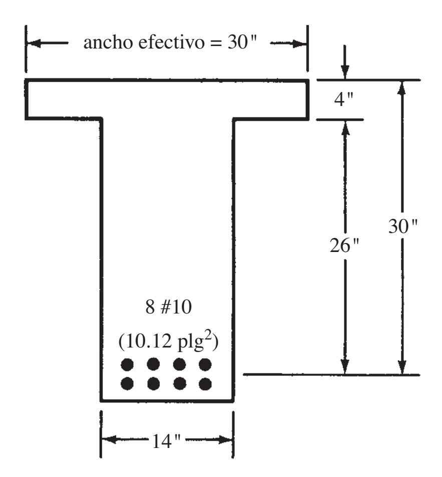


Figura 5.5

Cálculo de *T*

$$T = A_s f_y = (10.12)(60) = 607.2 \text{ klb}$$

Determinación de A_c y su centro de gravedad

$$A_c = \frac{T}{0.85 f'_c} = \frac{607.2}{(0.85)(4)} = 178.59 \text{ plg}^2$$
$$> \text{el área del patín} = (30)(4) = 120 \text{ plg}^2$$

Es obvio que el bloque de esfuerzos debe extenderse debajo del patín para proporcionar el área necesaria de compresión $= 178.6 - 120 = 58.6$ plg^2, *como se muestra en la figura 5.6.*

Cálculo de la distancia $\bar{y}$ de la parte superior del patín al centro de gravedad de A_c

$$\bar{y} = \frac{(120)(2) + (58.6)\left(4 + \dfrac{4.19}{2}\right)}{178.6} = 3.34 \text{ plg}$$

La distancia del brazo de palanca de *T* a *C* = 30.00 – 3.34 = 26.66 plg = *z*
Cálculo de *a*, *c* y ϵ_t

$$a = 4 + 4.19 = 8.19 \text{ plg}$$
$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{8.19}{0.85} = 9.64 \text{ plg}$$
$$\epsilon_t = \frac{d - c}{c}(0.003) = \left(\frac{30 - 9.64}{9.64}\right)(0.003) = 0.00634$$
$$> 0.005 \therefore \text{la sección es dúctil y } \phi = 0.90$$

Cálculo de ϕM_n

$$\phi M_n = \phi T z = (0.90)(607.2)(26.66) = 14\,569 \text{ plg-klb}$$
$$= \underline{\underline{1\,214 \text{ pie-klb}}}$$

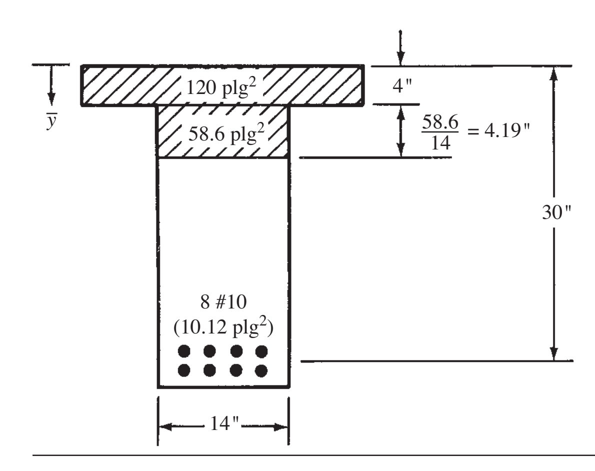


Figura 5.6

5.3 OTROS MÉTODOS PARA ANALIZAR VIGAS T

En la sección precedente se presentó un método muy importante para analizar vigas de concreto reforzado. Es un método general aplicable a vigas de cualquier sección transversal reforzadas con acero de tensión, incluyendo a las vigas T. Sin embargo, las vigas T son tan comunes que muchos proyectistas prefieren usar otro método que está específicamente diseñado para estas vigas.

Primero se determina el valor de a como se describió anteriormente en este capítulo. Si resulta menor que el espesor h_f del patín, se tendrá una viga rectangular y serán aplicables las fórmulas para vigas rectangulares. Si resulta mayor que h_f (como fue el caso en el ejemplo 5.2), el método especial descrito a continuación será muy útil.

La viga se divide en un conjunto de partes rectangulares que consisten en las partes voladas del patín y en la parte a compresión del alma (véase la figura 5.7).

Se calculan la compresión total C_w en el rectángulo del alma y la compresión total en las partes de patín sobresalientes C_f:

$$C_w = 0.85 f'_c a b_w$$

$$C_f = 0.85 f'_c (b - b_w)(h_f)$$

Luego se determina el momento nominal M_n multiplicando C_w y C_f por sus respectivos brazos de palanca, que van de sus centroides al centroide del acero:

$$M_n = C_w\left(d - \frac{a}{2}\right) + C_f\left(d - \frac{h_f}{2}\right)$$

Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 5.3. Aunque parece ofrecer pocas ventajas para calcular M_n, veremos que simplifica el diseño de vigas T cuando $a > h_f$, porque permite la solución directa de un problema que de otra manera tendría que ser resuelto por tanteos.

EJEMPLO 5.3

Repetir el ejemplo 5.2 usando el valor de a (8.19 plg) previamente obtenido y las fórmulas alternas que acaban de desarrollarse. Remítase a la figura 5.8, en la que las dimensiones mostradas se tomaron de la figura 5.5.

SOLUCIÓN **(Considerando que $a > h_f$)**
Cálculo de C_w y C_f

$$C_w = (0.85)(4)(8.19)(14) = 389.8 \text{ klb}$$

$$C_f = (0.85)(4)(30 - 14)(4) = 217.6 \text{ klb}$$

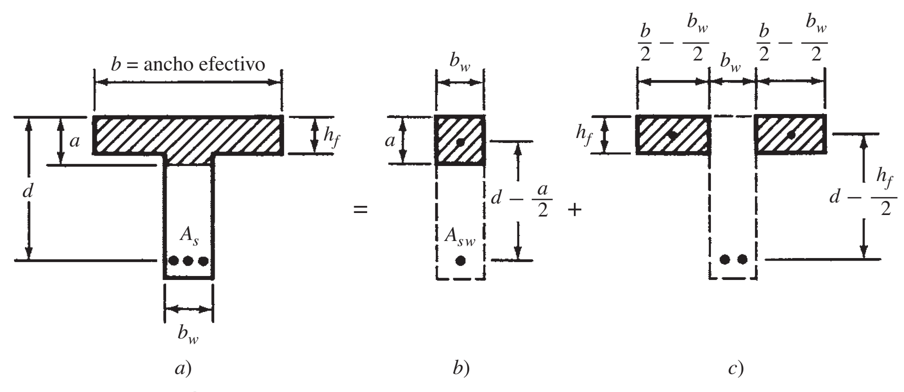


Figura 5.7 División de una viga T en partes rectangulares.

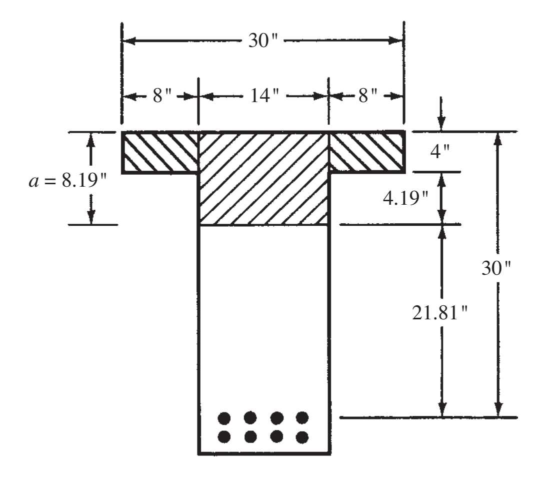


Figura 5.8

Cálculo de c y ϵ_t

$$c = \frac{\alpha}{\beta_1} = \frac{8.19}{0.85} = 9.64 \text{ plg}$$

$$\epsilon_t = \left(\frac{d-c}{c}\right)(0.003) = \left(\frac{30-9.64}{9.64}\right)(0.003) = 0.00634$$

$$> 0.005 \; \therefore \; \underline{\text{la sección es dúctil y } \phi = 0.90}$$

Cálculo de M_n y ϕM_n

$$M_n = C_w\left(d - \frac{a}{2}\right) + C_f\left(d - \frac{h_f}{2}\right)$$

$$= (389.8)\left(30 - \frac{8.19}{2}\right) + (217.6)\left(30 - \frac{4}{2}\right) = 16\,190 \text{ plg-klb} = 1\,349 \text{ pie-klb}$$

$$\phi M_n = (0.90)(1\,349) = \underline{\underline{1\,214 \text{ pie-klb}}}$$

5.4 DISEÑO DE VIGAS T

Al diseñar una viga T, por lo común su patín ya se ha seleccionado previamente al diseñar la losa ya que es la losa. El tamaño del alma no se selecciona comúnmente con base en los requisitos de momento, sino más bien en los requisitos de cortante; es decir, se usa un área suficientemente grande como para proporcionar cierta capacidad mínima de cortante, como se describirá en el capítulo 8. También es posible que el ancho del alma se seleccione con base en el ancho que se estima necesario para acomodar las varillas de refuerzo. Las dimensiones también pueden escogerse, como se indicó en la sección 4.5 para simplificar el trabajo de cimbrado, o debido a requisitos arquitectónicos, o por consideraciones relativas a las deflexiones. En los ejemplos siguientes (5.4 y 5.5), los valores de h_f, d y b_w son dados.

Los patines de la mayoría de las vigas T son usualmente tan grandes que el eje neutro se sitúa probablemente dentro de ellos, por lo que pueden aplicarse las fórmulas de las vigas rectangulares. Si el eje neutro queda en el alma, se usa a menudo un procedimiento de tanteos para el diseño. En este proceso se estima que un brazo de palanca del centro de gravedad del bloque de compresión al centro de gravedad del acero es igual al mayor de los valores de $0.9d$ o bien $d - (h_f/2)$ y con este valor, llamado z, se calcula un área de prueba de acero ($A_s = M_n/f_y z$). Luego, con el procedimiento usado en el ejemplo 5.2, se revisa el valor estimado del brazo de palanca. Si hay mucha diferencia, el valor estimado de z *se* revisa y se determina una nueva área A_s. El proceso se repite hasta que los cambios en A_s son muy pequeños. En los ejemplos 5.4 y 5.5 se diseñan vigas T con este proceso.

A menudo una viga T es parte de una viga continua que se extiende sobre soportes interiores tales como columnas. El momento flexionante sobre el soporte es negativo, de modo que el patín está en tensión. También, la magnitud del momento negativo es generalmente mayor que la del momento positivo cerca de la mitad del claro. Esta situación controlará el diseño de la viga T porque el peralte y el ancho del alma se determinan para este caso. Luego, cuando la viga se diseña para el momento positivo a la mitad del claro, el ancho y el peralte ya se conocen. Véase la sección 5.5 para otros detalles en las vigas T con momentos negativos.

El ejemplo 5.6 presenta un enfoque más directo para el caso en que $a > h_f$. Éste es el caso cuando la viga se supone dividida en partes rectangulares.

EJEMPLO 5.4

Diseñar una viga T para el sistema de piso mostrado en la figura 5.9 para el cual b_w y d están dados. $M_D = 80$ pie-klb, $M_L = 100$ pie-klb, $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2, $fy = 60\,000$ lb/plg^2 y claro simple = 20 pies.

SOLUCIÓN **Ancho efectivo de patín**

a) $\frac{1}{4} \times 20 = 5'0'' = 60''$
b) $12 + (2)(8)(4) = 76''$
c) $10'0'' = 120''$

Cálculo de momentos suponiendo ϕ = 0.90

$$M_u = (1.2)(80) + (1.6)(100) = 256 \text{ pie-klb}$$
$$M_n = \frac{M_u}{\phi} = \frac{256}{0.90} = 284.4 \text{ pie-klb}$$

Suponiendo un brazo de palanca z igual al mayor de los valores 0.9d o bien d – (h_f/2)

$$z = (0.9)(18) = \underline{\underline{16.20 \text{ plg}}}$$
$$z = 18 - \frac{4}{2} = 16.00 \text{ plg}$$

Área de prueba del acero

$$A_s f_y z = M_n$$
$$A_s = \frac{(12)(284.4)}{(60)(16.20)} = 3.51 \text{ plg}^2$$

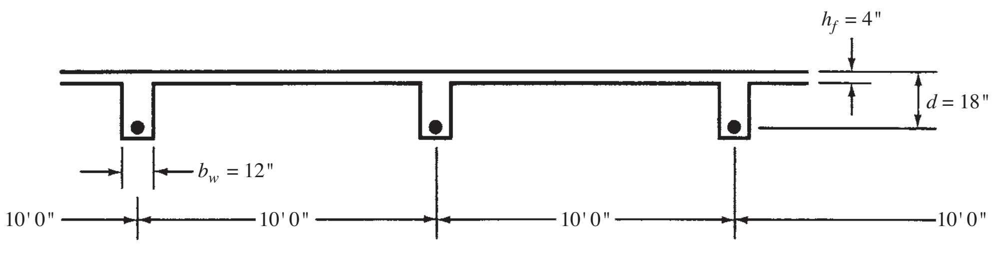


Figura 5.9

Cálculo de los valores de *a* y *z*

$$0.85 f'_c A = A_s f_y$$
$$(0.85)(4)(A_c) = (3.51)(60)$$
$$A_c = 61.9 \text{ plg}^2 < (4)(60) = 240 \text{ plg}^2 \therefore \underline{\underline{\text{E. N. en el patín}}}$$
$$a = \frac{61.9}{60} = 1.03 \text{ plg}$$

Cálculo de A_s con esta *z* revisada

$$A_s = \frac{(12)(284.4)}{(60)(17.48)} = 3.25 \text{ plg}^2$$

Cálculo de los valores de *a* y *z*

$$A_c = \frac{(3.25)(60)}{(0.85)(4)} = 57.4 \text{ plg}^2$$
$$a = \frac{57.4}{60} = 0.96 \text{ plg}$$
$$z = 18 - \frac{0.96}{2} = 17.52 \text{ plg}$$

Cálculo de A_s con esta *z* revisada

$$A_s = \frac{(12)(284.4)}{(60)(17.52)} = 3.25 \text{ plg}^2 \quad \underline{\underline{\text{Valor aceptable, ya que es suficientemente cercano al valor anterior}}}$$

Revisión del refuerzo mínimo

$$A_{s\,\text{mín}} = \frac{3\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d = \frac{3\sqrt{4\,000}}{60\,000}(12)(18) = 0.68 \text{ plg}^2$$

pero no menor que

$$A_{s\,\text{mín}} = \frac{200 b_w d}{f_y} = \frac{(200)(12)(18)}{60\,000} = 0.72 \text{ plg}^2 < 3.25 \text{ plg}^2 \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

o $\rho_{\text{mín}}$ de la tabla A.7 del apéndice = 0.0033

$$A_{s\,\text{mín}} = (0.0033)(12)(18) = 0.71 \text{ plg}^2 < 3.25 \text{ plg}^2 \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Cálculo de *c*, ϵ_t y ϕ

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{0.96}{0.85} = 1.13 \text{ plg}$$
$$\epsilon_t = \left(\frac{d-c}{c}\right)(0.003) = \left(\frac{18-1.13}{1.13}\right)(0.003)$$
$$= 0.045 > 0.005 \; \underline{\therefore \phi = 0.90 \text{ como se supuso}}$$
$$\underline{\underline{A_{s\,\text{req}} = 3.25 \text{ plg}^2}}$$

EJEMPLO 5.5

Diseñar una viga T para el sistema de piso mostrado en la figura 5.10, para la cual b_w y d están dados. $M_D = 200$ pie-klb, $M_L = 425$ pie-klb, $f'_c = 3\ 000$ lb/plg^2, $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y claro simple = 18 pies.

SOLUCIÓN **Ancho efectivo del patín**

a) $\frac{1}{4} \times 18' = 4'6'' = \underline{\underline{54''}}$
b) $15'' + (2)(8)(3) = 63''$
c) $6'0'' = 72''$

Momentos suponiendo ϕ = 0.90

$$M_u = (1.2)(200) + (1.6)(425) = 920 \text{ pie-klb}$$

$$M_n = \frac{M_u}{0.90} = \frac{920}{0.90} = 1\ 022 \text{ pie-klb}$$

Brazo de palanca *z*, supuesto (note que el área de compresión en la losa es muy ancha, por lo que su altura requerida es muy pequeña).

$$z = (0.90)(24) = 21.6''$$

$$z = 24 - 3/2 = \underline{22.5''}$$

Área de prueba del acero

$$A_s = \frac{(12)(1\ 022)}{(60)(22.5)} = 9.08 \text{ plg}^2$$

Revisión de los valores de *a* y *z*

$$A_c = \frac{(60)(9.08)}{(0.85)(3)} = 213.6 \text{ plg}^2$$

El bloque de esfuerzos se extiende hacia el alma, como se muestra en la figura 5.11.

Cálculo de la distancia $\bar{y}$ de la parte superior del patín al centro de gravedad de A_c

$$\bar{y} = \frac{(162)(1.5) + (51.6)\left(3 + \frac{3.44}{2}\right)}{213.6} = 2.28 \text{ plg}$$

$$z = 24 - 2.28 = 21.72 \text{ plg}$$

$$A_s = \frac{(12)(1\ 022)}{(60)(21.72)} = 9.41 \text{ plg}^2$$

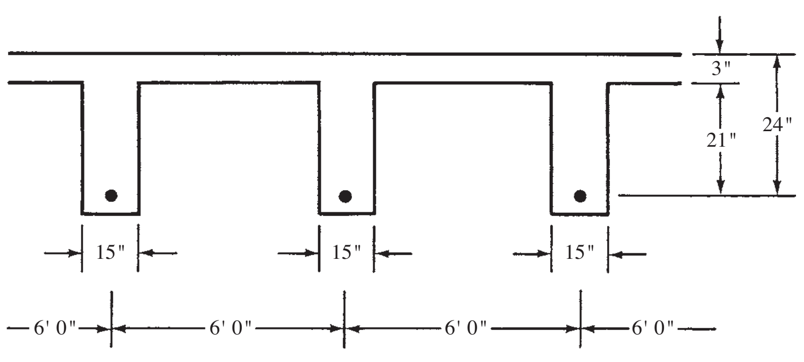


Figura 5.10

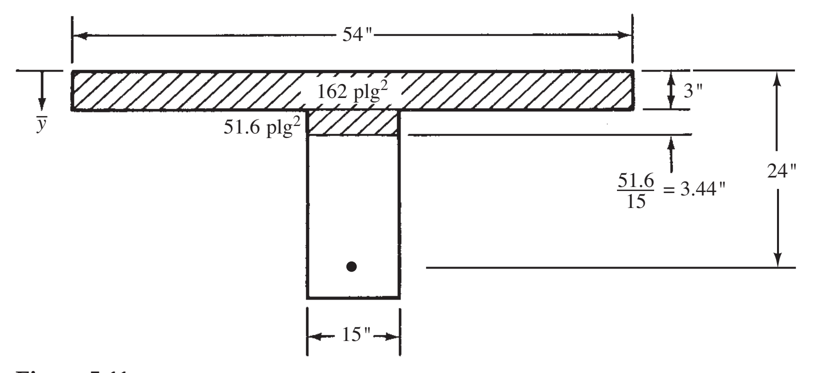


Figura 5.11

El área de acero requerida (9.41 plg^2) podría refinarse un poco repitiendo el diseño, pero no se ocupa espacio para hacer esto. (Si esto se hace, $A_s = 9.51$ plg^2.)

Revisión del refuerzo mínimo

$$\rho_{\text{mín}} \text{ de la tabla A.7 del apéndice} = 0.00333$$

o

$$A_s \text{ mín} = (0.00333)(15)(24) = 1.20 \text{ plg}^2 < 9.58 \text{ plg}^2 \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Revisión de los valores de ϵ_t y ϕ

$$a = 3 + 3.44 = 6.44 \text{ plg}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{6.44}{0.85} = 7.58 \text{ plg}$$

$$\epsilon_t = \left(\frac{d-c}{c}\right)(0.003) = \left(\frac{24-7.58}{7.58}\right)(0.003)$$

$$= 0.00650 > 0.005 \quad \therefore \quad \phi = 0.90 \text{ como se supuso}$$

Nuestro procedimiento para diseñar vigas T ha consistido en suponer un valor de z, calcular un área de prueba del acero A_s, determinar a para esa área de acero suponiendo una sección rectangular, etc. Si resulta que $a > h_f$, tendremos una verdadera viga T. Tal procedimiento de tanteos se usó para la viga en el ejemplo 5.5. Sin embargo, es posible determinar fácilmente A_s directamente usando el método de la sección 5.3, donde el miembro se dividió en sus componentes rectangulares. Para este análisis, véase la figura 5.7.

La fuerza de compresión suministrada por los rectángulos de los patines en voladizo debe ser equilibrada por la fuerza de tensión en una parte del acero de tensión A_{sf} mientras que la fuerza de compresión en el alma es equilibrada por la fuerza de tensión en el acero de tensión restante A_{sw}.

Para los patines en voladizo se tiene

$$0.85f_c'(b - b_w)(h_f) = A_{sf}f_y$$

de donde el área requerida de acero A_{sf} es igual a

$$A_{sf} = \frac{0.85f_c'(b - b_w)h_f}{f_y}$$

La resistencia de diseño de esos patines en voladizo es

$$M_{uf} = \phi A_{sf} f_y \left(d - \frac{h_f}{2} \right)$$

Se determinan a continuación el momento restante que debe resistir el alma de la viga T y el acero requerido para equilibrar ese valor.

$$M_{uw} = M_u - M_{uf}$$

El acero requerido para equilibrar el momento en el alma rectangular se obtiene por medio de la expresión usual para una viga rectangular. Se calcula el valor $M_{uw}/\phi b_w d^2$ y se determina ρ_w en la tabla apropiada del Apéndice o con la expresión para ρ_w previamente dada en la sección 3.4 de este libro. Piense acerca de ρ_w como la proporción de refuerzo para la viga mostrada en la figura 5.7(*b*). Entonces

$$A_{sw} = \rho_w b_w d$$

$$A_s = A_{sf} + A_{sw}$$

EJEMPLO 5.6

Repetir el ejemplo 5.5 usando el método de la componente rectangular descrito anteriormente.

SOLUCIÓN Primero suponga $a \leq h_f$ (que a menudo es el caso). Luego el diseño procedería como el de una viga rectangular con un ancho igual al ancho efectivo del patín de la viga T.

$$\frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{920(12\,000)}{(0.9)(54)(24)^2} = 394.4 \text{ lb/plg}^2$$

de la tabla A .12, $\rho = 0.0072$

$$a = \frac{\rho f_y d}{0.85 f'_c} = \frac{0.0072(60)(24)}{(0.85)(3)} = 4.06 \text{ plg} > h_f = 3 \text{ plg}$$

Las vigas actúan como una viga T, no como una viga rectangular y los valores de ρ y a anteriormente citados no son correctos. Si el valor de a hubiera sido $\leq h_f$, el valor de A_s habría sido simplemente $\rho bd = 0.0072(54)(24) = 9.33$ plg². Ahora divida la viga en dos partes (figura 5.7) y diséñela como una viga T.

Suponiendo $\phi = 0.90$

$$A_{sf} = \frac{(0.85)(3)(54-15)(3)}{60} = 4.97 \text{ plg}^2$$

$$M_{uf} = (0.9)(4.97)(60)(24 - \tfrac{3}{2}) = 6\,039 \text{ plg-klb} = 503 \text{ pie-klb}$$

$$M_{uw} = 920 - 503 = 417 \text{ pie-klb}$$

Se diseña una viga rectangular con $b_w = 15$ plg y $d = 24$ plg para resistir 417 pie-klb

$$\frac{M_{uw}}{\phi b_w d^2} = \frac{(12)(417)(1\,000)}{(0.9)(15)(24)^2} = 643.5$$

$$\rho_w = 0.0126 \text{ de la tabla A.12 del apéndice}$$

$$A_{sw} = (0.0126)(15)(24) = 4.54 \text{ plg}^2$$

$$A_s = 4.97 + 4.54 = 9.51 \text{ plg}^2$$

5.5 DISEÑO DE VIGAS T PARA MOMENTOS NEGATIVOS

Cuando las vigas T resisten momentos negativos, sus patines estarán trabajando a tensión y la parte inferior de sus almas a compresión, como se muestra en la figura 5.12. Obviamente, en tales situaciones se usarán las fórmulas de diseño para vigas rectangulares. La sección 10.6.6 del código ACI requiere que parte del acero de flexión en la parte superior de la viga en la región de momento negativo, se distribuya sobre el ancho efectivo del patín o sobre un ancho igual a un décimo del claro de la viga, rigiendo el menor de los dos valores. Si el ancho efectivo es mayor que un décimo del claro, el código requiere que se agregue acero longitudinal adicional en las porciones exteriores del patín. La intención de esta parte del código es minimizar los tamaños de las grietas de flexión que se presentarán en la superficie superior del patín, perpendicular al alma de una viga T sometida a momentos negativos.

En la sección 3.8 se estableció que si una sección rectangular tiene una cantidad muy pequeña de refuerzo de tensión, su momento resistente de diseño ϕMn bien puede ser menor que su momento de agrietamiento. Si éste fuese el caso, la viga podría fallar sin previo aviso cuando se presentase la primera grieta. La misma situación se aplica en vigas T con muy poco refuerzo de tensión.

Cuando el patín de una viga T está en tensión, la cantidad de refuerzo de tensión necesario para hacer su momento resistente último igual a su momento de agrietamiento es aproximadamente el doble del de una sección rectangular o del de una sección T con su patín en compresión. Como consecuencia, la sección 10.5.1 del ACI establece que la cantidad mínima de refuerzo requerido es igual al mayor de los dos valores siguientes:

$$A_{s\text{ mín}} = \frac{3\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d \qquad \text{(Ecuación10-3, ACI)}$$

o

$$A_{s\text{ mín}} = \frac{200\, b_w d}{f_y}$$

Para miembros estáticamente determinados con sus patines en tensión, b_w en la expresión anterior debe remplazarse ya sea con $2b_w$ o con el ancho del patín, el que sea más pequeño.

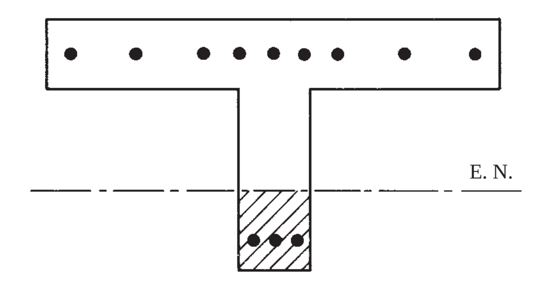
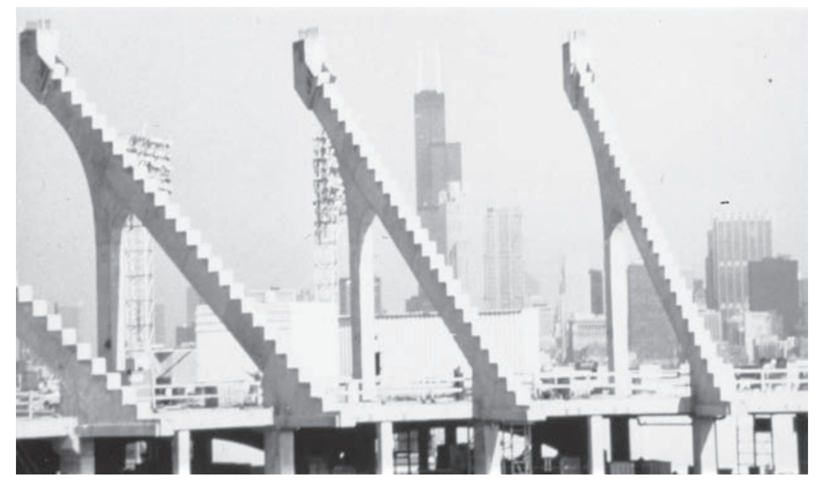


Figura 5.12 Viga T con patín en tensión y fondo del alma (hachurada) en compresión (una viga rectangular).



Edificio de concreto reforzado en Calgary, Canadá. (Cortesía de EFCO Corp.)


Parque Nuevo Comiskey, Chicago, Illinois. (Cortesía de Economy Forms Corporation.)

5.6 VIGAS L

El autor supone en este análisis que las vigas L (es decir, vigas T en escuadra con patín en sólo un lado) no tienen libertad para flexionarse lateralmente. Por tanto, se flexionan con respecto a sus ejes horizontales y se tratarán como secciones simétricas, igual que en el caso de las vigas T.

Para las vigas L, el ancho efectivo de su patín volado no debe ser mayor que un doceavo del claro de la viga, ni seis veces el espesor de la losa, o la mitad de la distancia libre a la siguiente alma (ACI 8.12.3).

Si una viga L puede flexionarse tanto vertical como horizontalmente, será necesario analizarla como una sección asimétrica con flexión respecto de los ejes vertical y horizontal. Una referencia excelente sobre este tema es un libro de MacGregor.[1]

5.7 ACERO DE COMPRESIÓN

El acero que se usa ocasionalmente en los lados de compresión de las vigas se denomina *acero de compresión* y a las vigas con acero de tensión y de compresión se las llama *vigas doblemente reforzadas.* El acero de compresión no es normalmente requerido en secciones diseñadas por el método de resistencia, porque el uso de la resistencia total a compresión del concreto decididamente disminuye la necesidad de tal refuerzo, en comparación con los diseños basados en el método de diseño de los esfuerzos permisibles.

Sin embargo, ocasionalmente, las vigas están limitadas a tamaños tan pequeños por los requisitos de estética o del espacio disponible, que el acero de compresión resulta necesario además del acero de tensión. Para aumentar la capacidad por momento de una viga más que la de una reforzada sólo a tensión con el máximo porcentaje de acero [cuando ($\epsilon_t = 0.005$)] es necesario introducir otro par resistente en la viga. Esto se logra agregando acero tanto en el lado de compresión como en el de tensión de la viga. El acero de compresión no sólo aumenta los momentos resistentes de las secciones de concreto, sino que también incrementa la magnitud de la curvatura que un miembro puede absorber antes de fallar por flexión. Esto quiere decir que la ductilidad de tales secciones aumentará apreciablemente. Aunque caro, el acero de compresión hace a las vigas tenaces y dúctiles, permitiéndoles resistir momentos y deformaciones grandes, así como inversiones de esfuerzos tales como los que podrían ocurrir durante un sismo. Como consecuencia, muchos códigos de construcciones en zonas sísmicas requieren que ciertas cantidades mínimas de acero de compresión se incluyan en los miembros que trabajan a flexión.

El acero de compresión es muy efectivo para reducir las deflexiones a largo plazo por contracción y fluencia plástica del concreto. A este respecto, observe el efecto del acero de compresión en la expresión sobre deflexiones a largo plazo dada en la sección 9.5.2.5 del código (que se verá en el capítulo 6 de este texto). Las varillas continuas de compresión también son útiles para armar y mantener en posición a los estribos (amarrándolos a las varillas de compresión) durante el colado y vibrado del concreto.

Las pruebas de vigas de concreto doblemente reforzadas han mostrado que aun si el concreto de compresión se aplasta, la viga no se colapsará si el acero de compresión está rodeado de estribos. Una vez que el concreto de compresión alcanza su deformación unitaria por aplastamiento, el recubrimiento de concreto se desconcha o se separa de las varillas, al igual que en las columnas (véase el capítulo 9). Si las varillas de compresión están restringidas por estribos con estrecha separación, las varillas no se pandearán hasta que se aplique un momento adicional. Este momento adicional no se puede considerar en la práctica porque las vigas pierden su funcionalidad después de que parte de su concreto se ha fracturado. (¿Le gustaría a usted habitar un edificio donde algunas partes de las vigas de concreto han caído al suelo?)

La sección 7.11.1 del código ACI establece que el acero de compresión en las vigas debe estar ceñido por estribos o por una malla de alambre soldada de área equivalente. En la sección 7.10.5.1, el código establece que los estribos deben ser por lo menos del #3 en tamaño para varillas longitudinales del #10 y menores y por lo menos del #4 para varillas longitudinales de mayor longitud y para varillas en racimos. Los estribos no deben estar separados entre sí más de 16 diámetros de varilla, más de 48 diámetros de estribo, ni más que la menor dimensión lateral de la sección transversal de la viga (7.10.5.2 del código).

[1] MacGregor, J.G., 2005, *Reinforced Concrete Mechanics and Design,* 4a. ed. (Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall), págs. 198-201.

$M_n = M_{n1} + M_{n2}$ $\quad$ $M_{n1} = A_{s1} f_y (d - \frac{a}{2})$ $\quad$ $M_{n2} = A'_s f'_s (d - d') = A_{s2} f_y (d - d')$

a) *b*) *c*)

Figura 5.13

En las vigas doblemente reforzadas se hace una hipótesis inicial de que el acero de compresión fluye tanto como el acero de tensión. (Siempre se supone que el acero de tensión fluye debido a los requisitos de ductilidad del código ACI.) Si la deformación unitaria en la fibra extrema de compresión del concreto se supone igual a 0.00300 y el acero de compresión A'_s se localiza a dos terceras partes de la distancia del eje neutro a la fibra extrema del concreto, entonces la deformación unitaria en el acero de compresión es igual a $\frac{2}{3} \times 0.003 = 0.002$. Si este valor es mayor que la deformación unitaria de fluencia del acero, por ejemplo, $50\,000/(29 \times 10^6) = 0.00172$ para un acero de 50 000 lb/plg^2, el acero ha cedido. Observe que la contracción y el flujo plástico que tienen lugar en el concreto a compresión, en realidad ayudan a que ceda el acero de compresión.

Algunas veces el eje neutro está bastante cercano al acero de compresión. De hecho, en algunas vigas con porcentajes de acero bajos, el eje neutro puede coincidir con la posición del acero de compresión. Para tales casos la adición del acero de compresión añade poca capacidad de momento a la viga, si es que añade algo. Sin embargo, puede hacer que la viga sea más dúctil.

Cuando se usa acero de compresión, se supone que el momento resistente último de la viga consta de dos partes: la parte debida a la resistencia del concreto de compresión más el refuerzo de tensión equilibrante y la parte debida a la última capacidad de momento del acero de compresión más la porción equilibrante de acero de tensión adicional. Esta situación se ilustra en la figura 5.13. En las expresiones desarrolladas aquí, se desprecia el efecto del concreto en compresión, que es remplazado por el acero A'_s a compresión. Esta omisión hará que sobrestimemos M_n en una cantidad muy pequeña y despreciable (menos de 1%). El primero de los dos momentos resistentes se ilustra en la figura 5.13(*b*).

$$M_{n1} = A_{s1} f_y \left(d - \frac{a}{2}\right)$$

El segundo momento resistente es el producido por el acero adicional de tensión y compresión (A_{s2} y A'_s), que se indica en la figura 5.13(*c*).

$$M_{n2} = A'_s f_y (d - d')$$

Hasta ahora se ha supuesto que el acero de compresión ha alcanzado su esfuerzo de fluencia. Si tal es el caso, los valores de A_{s2} y A'_s serán iguales porque la adición a T de $A_{s2}\, f_y$ debe ser igual a la adición a C de $A'_s\, f_y$ para que se tenga equilibrio. Si el acero de compresión no ha fluido, A'_s debe ser mayor que A_{s2}, como se verá más adelante en esta sección.

Al combinar los dos valores, obtenemos

$$M_n = A_{s1} f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) + A_{s2} f_y (d - d')$$

$$\phi M_n = \phi \left[A_{s1} f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) + A_{s2} f_y (d - d')\right]$$

La adición de acero de compresión solamente en el lado de compresión de una viga tendrá poco efecto en el momento nominal resistente de la sección. El brazo de palanca *z* del par interno no es afectado mucho por la presencia del acero de compresión y el valor de *T* permanece igual. Así el valor $M_n = Tz$ cambiará muy poco. Para aumentar el momento nominal resistente de una sección, es necesario añadir refuerzo en ambos lados de tensión y compresión de la viga, suministrando así otro par de momento resistente.

Los ejemplos 5.7 y 5.8 ilustran los cálculos implicados en la determinación de las resistencias de diseño de secciones doblemente reforzadas. En cada uno de estos problemas, se revisa la deformación unitaria (f_s') en el acero de compresión para determinar si ha fluido. Con la deformación unitaria obtenida, se determina el esfuerzo en el acero de compresión (f_s') y se calcula el valor de As_2 con la siguiente expresión:

$$A_{s2} f_y = A_s' f_s'$$

Además, hay que calcular la deformación unitaria en el acero en tensión (ϵ_t) porque si es menor a 0.005, el valor de la flexión ϕ tendrá que calcularse, puesto que es menor que su valor usual de 0.90. La viga no puede usarse en el evento improbable en que ϵ_t sea menor que 0.004.

Para determinar el valor de estas deformaciones unitarias se escribe una ecuación de equilibrio, la cual al resolverse arrojará el valor de *c* y así la posición del eje neutro. Para escribir esta ecuación, la resistencia nominal a la tensión de la viga se iguala a su resistencia nominal a la compresión. Sólo aparece una incógnita en la ecuación y ésa es *c*.

Inicialmente se supone que el esfuerzo en el acero de compresión corresponde a la fluencia ($f_s' = f_y$). De la figura 5.14, sumando las fuerzas horizontalmente en el diagrama de fuerzas y sustituyendo $\beta_1 c$ en lugar de *a* conduce a

$$A_s f_y = 0.85 f_c' \beta_1 c + A_s' f_y$$

$$c = \frac{(A_s - A_s') f_y}{0.85 f_c' \beta_1}$$

Haciendo referencia al diagrama de deformaciones unitarias de la figura 5.14, a partir de triángulos semejantes

$$\epsilon_s' = \frac{c - d'}{c} 0.003$$

Si la deformación unitaria en el acero en compresión, $\epsilon_s' > \epsilon_y = f_y / E_s$, la hipótesis es válida y f_s' corresponde a la fluencia, f_y. Si $\epsilon_s' < \epsilon_y$, el acero en compresión no está fluyendo y el valor de *c* calculado arriba no es correcto. Debe escribirse una nueva ecuación de equilibrio que suponga que $f_s' < f_y$.

$$A_s f_y = 0.85 f_c' \beta_1 cb + A_s' \left(\frac{c - d'}{c} \right) (0.003)(29\ 000)$$

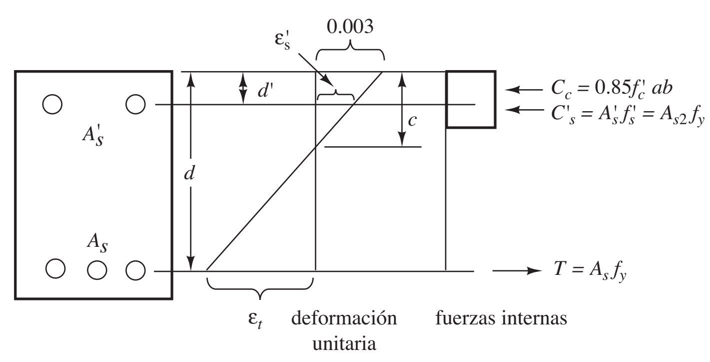


Figura 5.14 Fuerzas y deformaciones unitarias internas para una viga rectangular doblemente reforzada.

El valor de c determinado nos permite calcular las deformaciones unitarias en ambos aceros en compresión y en tensión y por tanto sus esfuerzos. Aun cuando la escritura y la solución de esta ecuación no son muy tediosas, el uso de la hoja de cálculo de Excel para vigas con acero en compresión facilita mucho el trabajo.

Los ejemplos 5.7 y 5.8 ilustran el cálculo de la resistencia de momento de diseño de las vigas doblemente reforzadas. En el primero de estos ejemplos el acero en compresión fluye, mientras que en el segundo no fluye.

EJEMPLO 5.7

Determinar la capacidad por momento de diseño de la viga mostrada en la figura 5.15 para la cual $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y $f'_c = 3\ 000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN Se escribe la ecuación de equilibrio suponiendo $A'_s = f_y$

$$A_s f_y = 0.85 f'_c b \beta_1 c + A'_s f_y$$
$$(6.25)(60) = (0.85)(3)(14)(0.85c) + (2.00)(60)$$

$$c = \frac{(6.25 - 2.00)(60)}{(0.85)(3)(0.85)} = 8.40 \text{ plg}$$
$$a = \beta_1 c = (0.85)(8.40) = 7.14 \text{ plg}$$

Cálculo de las deformaciones unitarias en acero en compresión para verificar la hipótesis de que está fluyendo.

$$\epsilon'_s = \frac{c - d'}{c} 0.003 = \frac{8.40 - 2.5}{8.40} 0.003 = 0.00211$$
$$\epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{60\ 000}{29\ 000\ 000} = 0.00207 < \epsilon'_s \therefore f'_s = f_y \text{ como se supuso.}$$

Nota: el ejemplo 5.8 muestra qué hacer si esta suposición no es correcta.

$$A_{s2} = \frac{A'_s\ f'_s}{f_y} = \frac{(2.00)(60\ 000)}{60\ 000} = 2.00 \text{ plg}^2$$
$$A_{s1} = A_s - A_{s2} = 6.25 - 2.00 = 4.25 \text{ plg}^2$$
$$\epsilon_t = \frac{d - c}{c} 0.003 = \frac{24 - 8.40}{8.40}(0.003) = 0.00557 > 0.005 \therefore \phi = 0.9$$

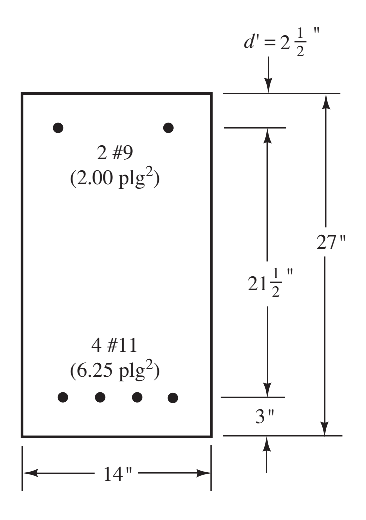


Figura 5.15

Luego la resistencia por momento de diseño es

$$\phi M_n = \phi\left[A_{s1}f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) + \left(A_s' f_s'(d - d')\right)\right]$$
$$= 0.9\left[(4.25)(60)\left(24 - \frac{7.14}{2}\right) + (2.00)(60)(24 - 2.5)\right]$$
$$= 7\,010 \text{ plg-klb} = 584.2 \text{ pie-klb}$$

EJEMPLO 5.8

Calcular la resistencia por momento de diseño de la sección mostrada en la figura 5.16 si $f_y = 60\,000$ lb/plg^2 y $f_c' =$ 4 000 lb/plg^2.

SOLUCIÓN Se escribe la ecuación de equilibrio suponiendo $A_s' = f_y$

$$A_s f_y = 0.85 f_c' b \beta_1 c + A_s' f_y$$
$$(5.06)(60) = (0.85)(4)(14)(0.85c) + (1.20)(60)$$

$$c = \frac{(5.06 - 1.20)(60)}{(0.85)(4)(0.85)} = 5.72 \text{ plg}$$
$$a = \beta_1 c = (0.85)(5.72) = 4.86 \text{ plg}$$

Se calculan las deformaciones unitarias en el acero de compresión para verificar la hipótesis de que está fluyendo

$$\epsilon_s' = \frac{c - d'}{c} 0.003 = \frac{5.72 - 2.5}{5.72} 0.003 = 0.00169$$
$$\epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{60\,000}{29\,000\,000} = 0.00207 > \epsilon_s' \therefore f_s' \neq f_y \text{ como se supuso.}$$

Como la hipótesis no es válida, tenemos que usar la ecuación de equilibrio que se basa en A_s' sin fluencia.

$$A_s f_y = 0.85 f_c' \beta_1 c b = A_s' \left[\frac{c - d'}{c}\right](0.003)E_s$$
$$(5.06)(60) = (0.85)(4)(0.85c)(14) + (1.20)\frac{c - 2.5}{c}(0.003)(29\,000)$$

Solucionando la ecuación de segundo grado para $c = 6.00$ plg^2 y $a = \beta_1 c = 5.10$ plg^2

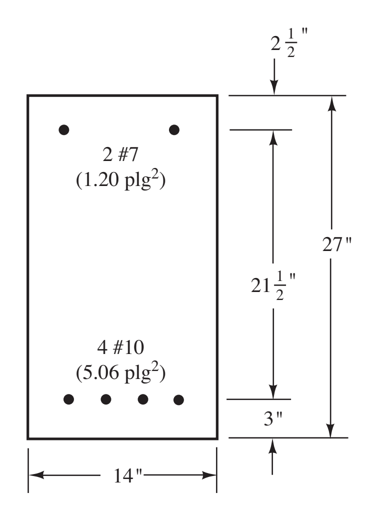


Figura 5.16

Cálculo de las deformaciones unitarias, esfuerzos y áreas de acero

$$\epsilon_s' = \frac{c - d'}{c} 0.003 = \frac{6.00 - 2.5}{6.00} 0.003 = 0.00175 < \epsilon_y$$

$$f_s' = \epsilon_s' E_s = (0.00175)(29\,000) = 50.75 \text{ klb/plg}^2$$

$$A_{s2} = \frac{A_s' f_s'}{f_y} = \frac{(1.20)(50\,750)}{60\,000} = 1.015 \text{ plg}^2$$

$$A_{s1} = A_s - A_{s2} = 5.06 - 1.015 = 4.045 \text{ plg}^2$$

$$\epsilon_t = \frac{d - c}{c} 0.003 = \frac{24 - 6.00}{6.00}(0.003) = 0.0090 > 0.005 \therefore \phi = 0.9$$

Luego la resistencia por momento de diseño es

$$\phi M_n = \phi\left[A_{s1} f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) + A_s' f_s' (d - d')\right]$$

$$= 0.9\left[(4.045)(60)\left(24 - \frac{5.10}{2}\right) + (1.20)(50.75)(24 - 2.5)\right]$$

$$= 5\,863 \text{ plg-klb} = 488.6 \text{ pie-klb}$$

5.8 DISEÑO DE VIGAS DOBLEMENTE REFORZADAS

En la mayoría de las vigas puede colocarse suficiente acero en tensión a fin de que no sea necesario el acero en compresión. Pero si eso es necesario, el diseño es usualmente bastante directo. Los ejemplos 5.9 y 5.10 ilustran el diseño de vigas doblemente reforzadas. Las soluciones se apegan a la teoría usada para el análisis de secciones doblemente reforzadas.

EJEMPLO 5.9

SOLUCIÓN Diseñar una viga rectangular para $M_D = 325$ pie-klb y $M_L = 400$ pie-klb si $f_c' = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2. Las dimensiones máximas permisibles de la viga se muestran en la figura 5.17.

$$M_u = (1.2)(325) + (1.6)(400) = 1\,030 \text{ pie-klb}$$

Suponiendo ϕ = 0.90

$$M_n = \frac{M_u}{\phi} = \frac{1\,030}{0.90} = 1\,144.4 \text{ pie-klb}$$

Suponiendo el máximo acero de tensión posible sin acero de compresión y calculando la resistencia por momento nominal de las vigas

$$\rho_{\text{máx}} \text{ de la tabla A.7 del apéndice} = 0.0181$$

$$A_{s1} = (0.0181)(15)(28) = 7.60 \text{ plg}^2$$

$$\text{Para } \rho = 0.0181 \; \frac{M_u}{\phi b d^2} \text{ de la tabla A.13 del apéndice} = 912.0$$

$$M_{u1} = (912.0)(0.9)(15)(28)^2 = 9\,652\,608 \text{ plg-klb}$$

$$= 804.4 \text{ pie-klb}$$

$$M_{n1} = \frac{804.4}{0.90} = 893.8 \text{ pie-klb}$$

$$M_{n2} = M_n - M_{n1} = 1\,144.4 - 893.8 \text{ pie-klb} = 250.6 \text{ pie-klb}$$

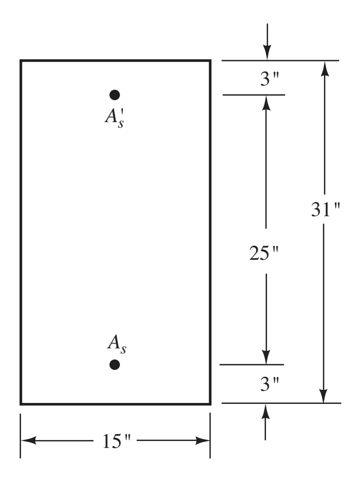


Figura 5.17

Revisión para determinar si el acero de compresión ha fluido

$$a = \frac{(7.60)(60)}{(0.85)(4)(15)} = 8.94 \text{ plg}$$

$$c = \frac{8.94}{0.85} = 10.52 \text{ plg}$$

$$\epsilon_s' = \left(\frac{10.52 - 3}{10.52}\right)(0.00300) = 0.00214 > 0.00207$$

Por tanto, el acero de compresión sí cedió plásticamente.

$$A_s' \text{ teórica requerida} = \frac{M_{n2}}{(f_y)(d - d')} = \frac{(12)(250.6)}{(60)(28 - 3)} = 2.00 \text{ plg}^2$$

$$A_s' f_s' = A_{s2} f_y$$

$$A_{s2} = \frac{A_s' f_s'}{f_y} = \frac{(2.00)(60)}{60} = \underline{\underline{2.00 \text{ plg}^2}} \quad \frac{\text{Intentar}}{2 \ \#9}(2.00 \text{ plg}^2)$$

$$A_s = A_{s1} + A_{s2}$$

$$A_s = 7.60 + 2.00 = 9.60 \text{ plg}^2 \quad \frac{\text{Intentar}}{8 \ \#10}(10.12 \text{ plg}^2)$$

Si hubiésemos seleccionado varillas con áreas exactamente iguales a las calculadas aquí, ϵ_t habría quedado = 0.005 y $\phi = 0.90$, pero ése no fue el caso.

Al escribir la ecuación cuadrática se encuentra que c es igual a 11.08 plg y $a = 9.43$ plg.

$$\epsilon_s' = \left(\frac{11.80 - 3}{11.80}\right)(0.003) = 0.00224 > 0.00207 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\epsilon_t = \left(\frac{28 - 11.80}{11.80}\right)(0.003) = 0.00412 < 0.827$$

$$\phi = 0.65 + (0.00412 - 0.002)\left(\frac{250}{3}\right) = 0.827$$

$$\phi M_n = 0.827\left[(10.12 - 2.00)(60)\left(28 - \frac{9.43}{2}\right) + (2.00)(60)(25)\right]$$

$$= 11\ 863 \text{ plg-lb} = 989 \text{ pie-klb} < 1\ 030 \text{ pie-klb} \qquad \underline{\underline{\text{No sirve}}}$$

La razón por la que la viga no tiene suficiente capacidad es por el factor variable ϕ. Esto puede evitarse si usted tiene cuidado en seleccionar las varillas. Observe que el valor real de A_s' es exactamente el mismo que el valor teórico. El valor real de A_s, por otra parte, es superior al valor teórico por $10.12 - 9.6 = 0.52$ plg^2. Si se hace una nueva selección de varilla para A_s' por medio de la cual el valor real de A_s' excede el valor teórico por aproximadamente esta cantidad (0.52 plg^2), el diseño será adecuado. Seleccione tres varillas del #8 ($A_s' = 2.36$ plg^2) y repita los pasos anteriores. Observe que debajo se usan las áreas reales de acero, no las teóricas. Como consecuencia, deben calcularse de nuevo los valores de c, a, ϵ_s' y A_s'.

Suponga $A_s' = f_y$.

$$c = \frac{(A_s - A_s')f_y}{0.85f_c'b\beta_1} = \frac{(10.12 - 2.36)60}{0.85(4)(15)(0.85)} = 10.74 \text{ plg}$$

$$\epsilon_s' = \frac{c - d'}{c}0.003 = \frac{10.74 - 3}{10.74}0.003 = 0.00216 > \epsilon_y \therefore \text{ la hipótesis es válida}$$

$$\epsilon_t = \frac{d - c}{c}0.003 = \frac{28 - 10.74}{10.74}0.003 = 0.00482 < 0.005 \therefore \phi \neq 0.9$$

$$\phi = 0.65 + (\epsilon_t - 0.002)\frac{250}{3} = 0.88$$

$$A_{s2} = \frac{A_s' f_s'}{f_y} = \frac{2.36(60)}{60} = 2.36 \text{ plg}^2$$

$$A_{s1} = A_s - A_{s2} = 10.12 - 2.36 = 7.76 \text{ plg}$$

$$M_{n1} = A_{s1}f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) = 7.76(60)\left[28 - \frac{0.85(10.74)}{2}\right] = 10\,912 \text{ pie-klb}$$

$$M_{n2} = A_{s2}f_y(d - d') = 2.36(60)[28 - 3] = 3\,540 = 295 \text{ pie-klb}$$

$$M_n = M_{n1} + M_{n2} = 909.3 + 295 = 1\,204.3 \text{ pie-klb}$$

$$\phi M_n = 0.88(1\,204.3) = 1\,059.9 \text{ pie-klb} > M_u \qquad \underline{\text{OK}}$$

Observe que ocho varillas del #10 no caben en una capa individual en esta viga. Si se colocan en dos capas, el centroide tendría que estar a más de 3 plg desde la parte inferior de la sección. Sería necesario aumentar el peralte de la viga, h, para proporcionar dos capas o usar varillas en racimo (sección 7.4).

EJEMPLO 5.10

Una viga está limitada a las dimensiones mostradas en la figura 5.17. Si $M_D = 170$ pie-klb, $M_L = 225$ pie-klb, $f_c' =$ 4 000 lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2, seleccionar el refuerzo requerido $b = 15$ plg, $d = 20$ plg y $d' = 4$ plg.

SOLUCIÓN

$$M_u = (1.2)(170) + (1.6)(225) = 564 \text{ pie-klb}$$

Suponiendo ϕ = 0.90

$$M_n = \frac{564}{0.90} = 626.7 \text{ pie-klb}$$

$$\text{Máx } A_{s1} = (0.0181)(15)(20) = 5.43 \text{ plg}^2$$

$$\text{Para } \rho = 0.0181 \; \frac{M_u}{\phi bd^2} = 912.0 \text{ de la tabla A.13 del apéndice}$$

$$M_{u1} = (912)(0.90)(15)(20)^2 = 4\,924\,800 \text{ plg-lb} = 410.4 \text{ pie-klb}$$

$$M_{n1} = \frac{410.4}{0.90} = 456.0 \text{ pie-klb}$$

$$M_{n2} = 626.7 - 456.0 = 170.7 \text{ pie-klb}$$

Revisión para determinar si el acero de compresión ha fluido

$$a = \frac{A_{s1}f_y}{0.85f_c'b} = \frac{(5.43)(60)}{(0.85)(4)(15)} = 6.39 \text{ plg}$$

$$c = \frac{6.39}{0.85} = 7.52 \text{ plg}$$

$$\epsilon_s' = \left(\frac{7.52 - 4.00}{7.52}\right)(0.003) = 0.00140 < \frac{60}{29\,000} = 0.00207$$

$$\therefore f_s' = (0.00140)(29\,000) = 40.6 \text{ klb/plg}^2$$

$$A_s' \text{ teórico requerido} = \frac{M_{n2}}{f_s'(d - d')}$$

$$= \frac{(12)(170.7)}{(40.6)(20 - 4)} = \underline{\underline{3.15 \text{ plg}^2}} \quad \underline{\underline{\text{Intente 4\#8 } (3.14 \text{ plg}^2)}}$$

$$A_s' f_s^1 = A_{s2} f_y$$

$$A_{s2} = \frac{(3.15)(40.6)}{60} = 2.13 \text{ plg}^2$$

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} = 5.43 + 2.13 = \underline{\underline{7.56 \text{ plg}^2}} \quad \underline{\underline{\text{Intente 6 \#10 } (7.59 \text{ plg}^2)}}$$

Las subsiguientes revisiones para c, ϵ_t, etc., prueban que este diseño es satisfactorio.

5.9 EJEMPLOS CON UNIDADES SI

Los ejemplos 5.11 y 5.12 ilustran el análisis de una viga T y el diseño de una viga doblemente reforzada usando unidades SI.

EJEMPLO 5.11

Determinar la resistencia de diseño de la viga T mostrada en la figura 5.18 si $f_y = 420$ MPa, $f_c' = 35$ MPa y $E_s = 200\,000$ MPa.

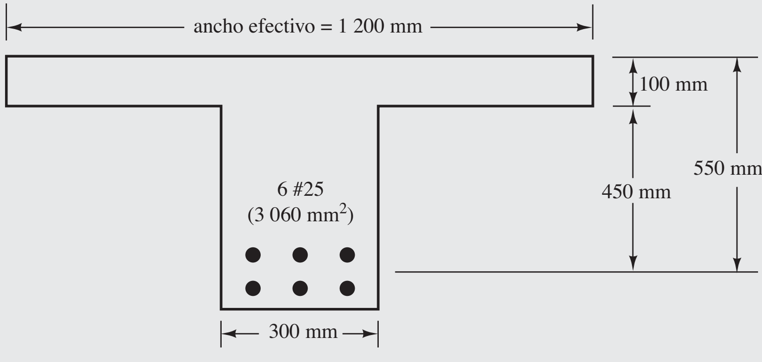


Figura 5.18

SOLUCIÓN **Cálculo de T y A_c**

$$T = (3\,060)(420) = 1\,285\,200 \text{ N}$$

$$A_c = \frac{T}{0.85f'_c} = \frac{1\,285\,200}{(0.85)(35)} = 43\,200 \text{ mm}^2$$

$$\rho = \frac{A_s}{b_w d} = \frac{3\,060}{(300)(550)} = 0.0185 < \rho_{\text{máx}}$$

$$= 0.0216 \text{ de la tabla B.7 del apéndice} \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\rho_{\text{mín}} = \frac{\sqrt{f'_c}}{4f_y} = \frac{\sqrt{35}}{(4)(420)} = 0.003\,52 < 0.0185 \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

o

$$\frac{1.4}{f_y} = \frac{1.4}{420} = 0.003\,33 < 0.0185 \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Cálculo de la resistencia de diseño

$$a = \frac{43\,200}{1\,200} = 36 \text{ mm} < h_f = 100 \text{ mm}$$

∴ el bloque de esfuerzos queda totalmente dentro del patín

$$z = d - \frac{a}{2} = 550 - \frac{36}{2} = 532 \text{ mm}$$

$$\phi M_n = \phi T z$$

$$= (0.9)(1\,285\,200)(532)$$

$$= 6.153 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{mm} = \underline{\underline{615.3 \text{ kN} \cdot \text{m}}}$$

EJEMPLO 5.12

Si $M_u = 1\,225$ kN · m, determine el área de acero requerida para la sección mostrada en la figura 5.19. Si se requiere acero de compresión, suponga que éste se colocará a 70 mm de la cara de compresión. $f'_c = 21$ MPa, $f_y = 420$ MPa y $E_s = 200\,000$ MPa.

SOLUCIÓN

$$M_n = \frac{1\,225}{0.9} = 1\,361 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

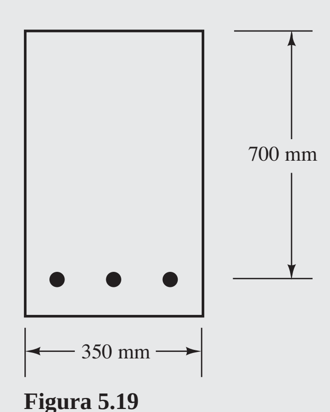


Figura 5.19

$\rho_{máx}$ si está simplemente reforzada = 0.0135 de la tabla B.7 del apéndice

$$A_{s1} = (0.0135)(350)(700) = 3\,307 \text{ mm}^2$$

$$\frac{M_{u1}}{\phi bd^2} = 4.769 \text{ de la tabla B.8 del apéndice}$$

$$M_{u1} = (\phi bd^2)(4.769) = \frac{(4.769)(0.9)(350)(700)^2}{10^6} = 736.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{n1} = \frac{736.1}{0.9} = 818 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$< M_n \text{ of } 1\,361 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \therefore \underline{\text{se requiere doble refuerzo}}$$

$$M_{n2} = M_n - M_{n1} = 1\,361 - 818 = 543 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Revisión para ver si fluye el acero de compresión

$$a = \frac{(3\,307)(420)}{(0.85)(21)(350)} = 222.32 \text{ mm}$$

$$c = \frac{222.32}{0.85} = 261.55 \text{ mm}$$

$$\epsilon'_s = \left(\frac{261.55 - 70}{261.55}\right)(0.003) = 0.00220$$

$$> \frac{420}{200\,000} = 0.002\,10 \quad \underline{\underline{\therefore \text{ el acero de compresión fluye}}}$$

$$A'_s \text{ requerido} = \frac{M_{n2}}{f_y(d - d')} = \frac{543 \times 10^6}{(700 - 70)(420)} = \underline{\underline{2\,052 \text{ mm}^2}}$$

Use 3 varillas del #32 (2 457 mm^2)

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} = 3\,307 + 2\,052 = \underline{\underline{5\,359 \text{ mm}^2}}$$

Use 6 varillas del #36 $\underline{\underline{(A_s = 6\,036 \text{ mm}^2)}}$

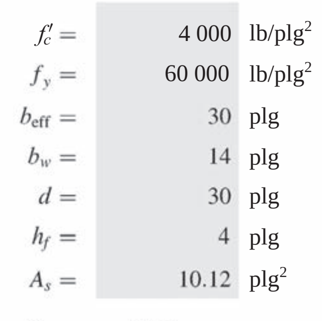
5.10 EJEMPLOS CON COMPUTADORA

EJEMPLO 5.13

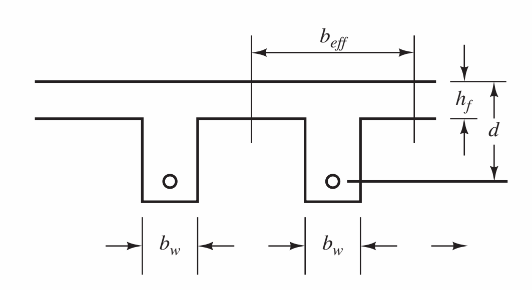
Repetir el ejemplo 5.3 usando la hoja cálculo de Excel.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo Excel para vigas T y seleccione la etiqueta de la hoja de trabajo de Análisis en la parte inferior. Ingrese sólo las celdas C3 a C9 (sombreado amarillo).

Análisis de vigas T



$f'_c =$	4 000	lb/plg^2
$f_y =$	60 000	lb/plg^2
$b_{\text{eff}} =$	30	plg
$b_w =$	14	plg
$d =$	30	plg
$h_f =$	4	plg
$A_s =$	10.12	plg^2



$\beta_1 = \quad 0.85$

$$A_{s\,\text{mín}} = \frac{3\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d \; = 1.33 \text{ plg}^2$$

$$A_{s\,\text{mín}} = \frac{200}{f_y} b_w d \; = 1.40 \text{ plg}^2 \qquad A_{s\,\text{mín}} = 1.40 \text{ plg}^2 \qquad \text{el acero mínimo está bien}$$

Si a ≤ h_f : $a > h_f$, entonces este análisis no es válido, vaya al recuadro de abajo

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = 5.95 \text{ plg}$$

$M_n = A_s f_y\,(d - a/2) =$ — plg-klb = Véase la solución de abajo pie-klb

$c = a/\beta_1 = 7.00346$

$$\epsilon_t = \frac{d-c}{c} 0.003 = 0.009851 \quad —$$

$\phi = 0.9$

$\phi M_n =$ — plg-klb = Véase la solución de abajo pie-klb

Si a ≤ h_f : $a > h_f$, entonces este análisis es válido: actúa como una viga T

$$A_{sf} = \frac{0.85 f'_c (b - b_w) h_f}{f_y} = 3.627 \text{ plg}^2$$

$$A_{sw} = A_s - A_{sf} \qquad = 6.493 \text{ plg}^2$$

$$a = \frac{A_{sw} f_y}{0.85 f'_c b} \qquad = 8.185 \text{ plg}^2$$

$$M_n = A_{sf} f_y \left(d - \frac{h_f}{2}\right) + A_{sw} f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) = 16\,186\,387 \text{ plg-lb} = 1\,348.9 \text{ pie-klb}$$

$$c = a/\beta_1 = 9.629263 \text{ plg}$$

$$\epsilon_t = \frac{d-c}{c}0.003 = 0.006347$$

$$\phi = 0.9$$

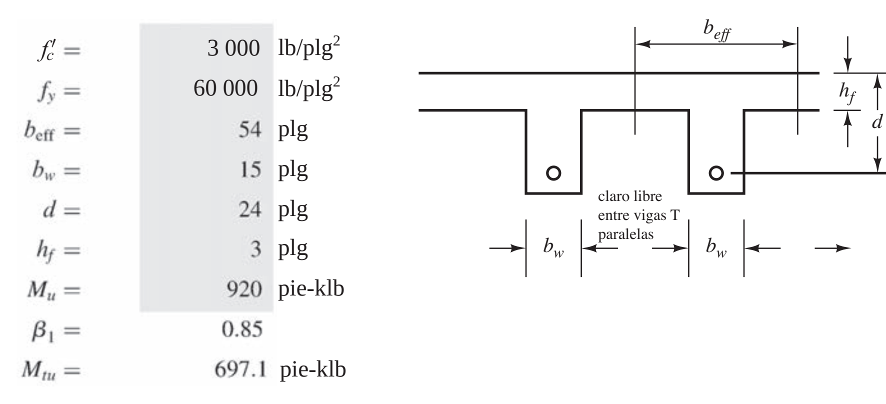
$$\phi M_n = 14\ 567\ 748 \text{ plg-lb} = 1\ 214.0 \text{ pie-klb}$$

EJEMPLO 5.14

Repetir el ejemplo 5.6 usando la hoja de cálculo Excel.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo Excel para vigas T y seleccione la etiqueta de la hoja de trabajo de Diseño de vigas T en la parte inferior. Ingrese sólo las celdas C3 a C9 (sombreado amarillo).

Diseño de vigas T



Si a ≤ h_f: $a > h_f$, entonces este análisis no es válido, vaya al recuadro de abajo

$$R_n = \frac{M_u}{\phi b d^2} = 394.38 \text{ plg}$$

$$\rho = \frac{0.85 f'_c}{f_y}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2R_n}{0.85 f'_c}}\right] = 0.007179$$

$$a = \frac{\rho f_y d}{0.85 f'_c} = 4.054201 \text{ plg}$$

$$c = a/\beta_1 = 4.769648$$

$$\epsilon_t = \frac{d-c}{c}0.003 = 0.012095 \qquad A_{s\,\text{mín}} = \frac{3\sqrt{f'_c}}{f_y}b_w d = \quad 0.985901 \text{ plg}^2$$

–

–

$$\phi = 0.9$$

$$A_{s\,\text{mín}} = \frac{200}{f_y}b_w d = 1.2 \text{ plg}^2$$

$$A_s = \rho b d = 9.304391 \text{ plg}^2$$

–

Si $a > h_f$: $a > h_f$, entonces este análisis es válido: actúa como una viga T

$$A_{sf} = \frac{0.85f'_c(b-b_w)h_f}{f_y} = 4.97 \text{ plg}^2$$

$$M_{uf} = A_{sf}f_y(d - hf/2) = 503.5 \text{ pie-klb}$$

$$M_{uw} = M_{uf} - M_u = 416.5$$

$$R_{nw} = \frac{M_{uw}}{\phi b d^2} = 642.8$$

$$\rho_w = \frac{0.85f'_c}{f_y}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2R_{nw}}{0.85f'_c}}\right] = 0.012573$$

$$a = \frac{\rho_w f_y d}{0.85 f'_c} = 7.100128 \text{ plg}$$

$$c = a/\beta_1 = 8.353092 \text{ plg}$$

$$\epsilon_t = \frac{d-c}{c}0.003 = 0.00562$$

–

$$\phi = 0.9$$

–

$$A_{sw} = \rho_\omega b_w d = \quad 4.53 \text{ plg}^2 \qquad A_{s\,\text{mín}} = \frac{3\sqrt{f'_c}}{f_y}b_w d = 0.985901 \text{ plg}^2$$

–

$$\boxed{A_s = A_{sw} + A_s = \quad 9.50 \text{ plg}^2} \qquad A_{s\,\text{mín}} = \frac{200}{f_y}b_w d = 1.2 \text{ plg}^2$$

Nota: la solución se basa en $\phi = 0.9$

EJEMPLO 5.15

Repetir el ejemplo 5.7 usando la hoja de cálculo Excel.

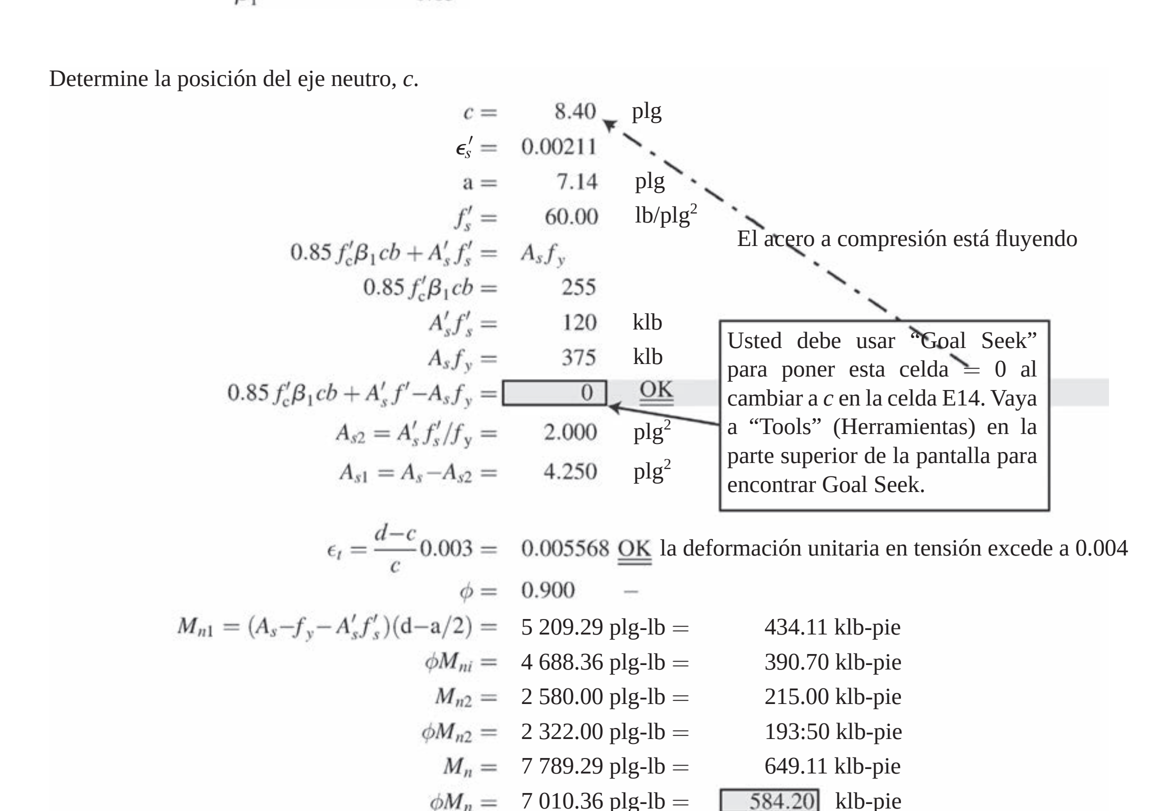
SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo Excel para Vigas con Acero en Compresión y seleccione la etiqueta de la hoja de trabajo de Análisis en la parte inferior. Ingrese sólo las celdas C3 a la C9 (sombreado amarillo). Otros valores se calculan a partir de esos valores ingresados. Véase el comentario en la celda E22 para las instrucciones acerca de goal seek (búsqueda de objetivo).

Análisis de vigas doblemente reforzadas mediante ACI 318-08

A_s, A_s', b, d, M_u, f_c', f_y conocidos o especificados

$b =$	14	plg
$d =$	24	plg
$d' =$	2.5	plg
$A_s' =$	2.00	plg^2
$A_s =$	6.25	plg^2
$f_c =$	3 000	lb/plg^2
$f_y =$	60 000	lb/plg^2
$\beta_1 =$	0.85	

Determine la posición del eje neutro, c.



EJEMPLO 5.16

Repetir el ejemplo 5.9 usando la hoja de cálculo Excel.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo Excel para Vigas con Acero en Compresión y seleccione la etiqueta de la hoja de trabajo del Caso I de ACI 318-08 en la parte inferior. Ingrese sólo las celdas C3 a C9 (sombreado amarillo). Otros valores se calculan a partir de esos valores ingresados.

Diseño de vigas doblemente reforzadas mediante ACI 318-08 cuando se desconocen (Caso I)

Caso I: A_s y A'_s se desconocen; b, d, M_u, f'_u, f_y se conocen o se especifican

$M_u =$	1 030.00	klb-pie
$b =$	15	plg
$d =$	28	plg
$d' =$	3	plg
$f'c =$	4 000	lb/plg²
$f_y =$	60 000	lb/plg²
$\beta_1 =$	0.85	

1. Determine el momento último máximo permitido por el código para la viga si tuviera refuerzo individual (usando el valor máximo de ρ asociado con $\phi = 0.9$).

$$\rho = 0.375(0.85\beta_1 f'_c/f_y) = 0.018063$$

$$M_{máx} = \phi\rho bd^2 f_y\left(1 - \frac{\rho f_y}{1.7 f'_m}\right) \quad = 9\,642\,313.4 \text{ plg-lb} \quad = 803.53 \text{ klb-pie}$$

2. Si $M_{máx} \geq M_u$, no es necesario acero de compresión. Diseñe como viga simplemente reforzada.
Si $M_{máx} < M_u$, continúe al paso 3.

3. El diseño más económico usa $M_{u1} = M_{máx}$ que corresponde a $\rho_1 =$ el valor máximo de ρ asociado con $\phi = 0.9$.

ρ_1	=	0.018063	
$A_{s1} = \rho_1 bd$	=	7.586	plg²
$M_{u1} = \phi A_{s1} f_y(d - a/2)$	=	9 642 313.41	plg-lb
	=	803.53	klb-pie
$a = \dfrac{A_s f_y}{.85 f'_c b}$	=	8.925	plg
$\epsilon_t = \dfrac{d-c}{c}0.003$	=	0.00500	
$\phi = 0.65 + (\epsilon_t - .002)\cdot 250/3$	=	0.900	

$$c = \frac{\alpha}{\beta_1} = 10.500 \text{ plg}$$

4. $M_{u2} = M_u - M_{u1}$ $= 226.47$ klb-pie

5. $A_{s2} = \dfrac{M_{u2}}{.\phi \cdot f_y(d - d')}$ $= 2.013$ plg²

6. $c = a/\beta_1$ $= 10.500$ plg²

7. $A'_s = \dfrac{c - d'}{c}87\,000$ $= 62\,143$ lb/plg² Si $A'_s > f_y$, use $f_s = f_y$ $A'_s = 60\,000$ lb/plg²

8. $A_s = \dfrac{A_{s2} f_y}{A'_s}$ $= 2.01$ plg² Seleccione las varillas: Núm. de varillas 3, Tamaño de varilla #8, $A'_s = 2.36$ plg²

9. $A'_s = A_{s1} + A_{s2}$ $= 9.60$ plg² Seleccione las varillas: 8, #10, $A_s = 10.13$ plg²

PROBLEMAS

5.1 ¿Qué es el ancho efectivo de una viga T? ¿Qué cosa representa?

5.2 ¿Qué factores afectan la selección de las dimensiones del alma de una viga T?

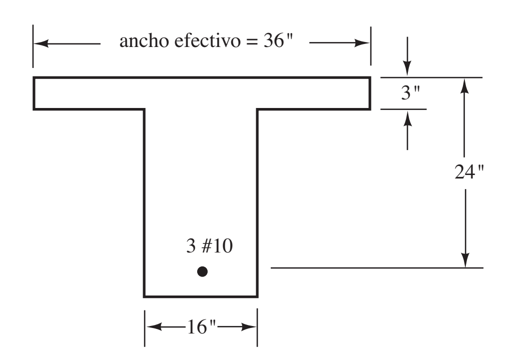
5.3 Si se colocan varillas adicionales de refuerzo sólo en el lado de compresión de una viga de concreto reforzado, ¿aumentará en forma considerable la resistencia a flexión de la viga? Explique su respuesta.

5.4 ¿Por qué es el refuerzo de compresión particularmente importante en miembros a flexión de concreto reforzado localizados en zonas sísmicas?

Análisis de vigas T

En los problemas 5.5 a 5.15 determine las resistencias de los momentos de diseño, ϕM_n, de las secciones mostradas. Use $f_y =$ 60 000 lb/plg^2 y $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2, excepto en el problema 5.9 donde $f'_c = 5\,000$ lb/plg^2. Revise cada sección para ver si es dúctil.

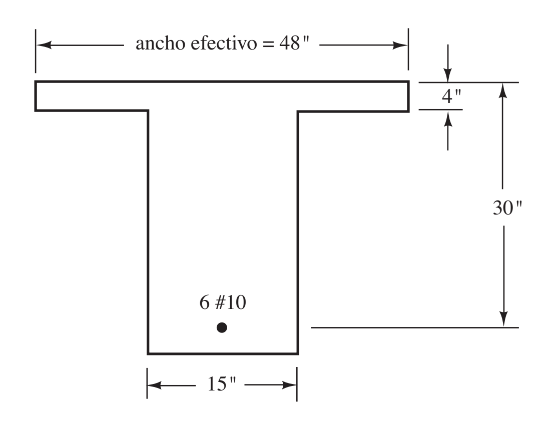
Problema 5.5 (*Resp.* 393.5 pie-klb.)



5.6 Repita el problema 5.5 si se usan cuatro varillas del #10.

5.7 Repita el problema 5.5 si se usan diez varillas del #8. (*Resp.* 775.7 pie-klb.)

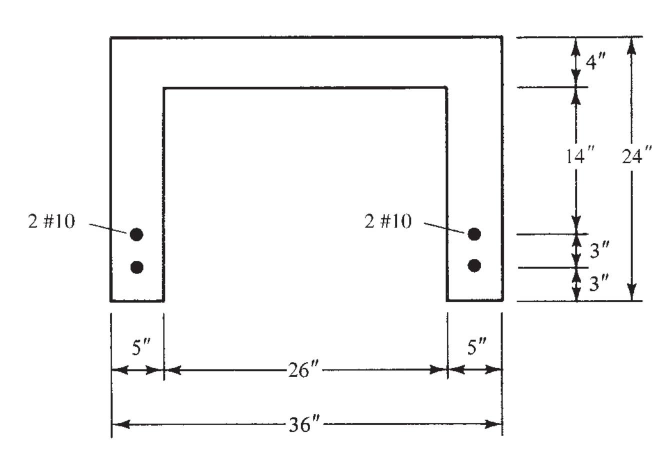
Problema 5.8



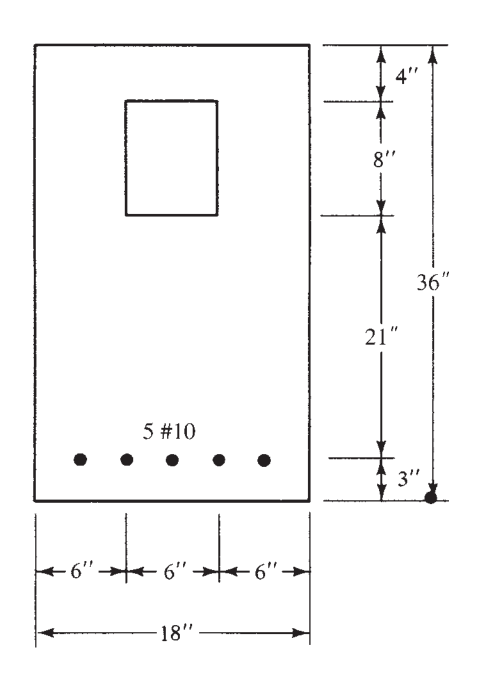
5.9 Repita el problema 5.8 si $f'_c = 5\,000$ lb/plg^2 (*Resp.* 986.5 pie-klb.)

5.10 Repita el problema 5.8 si se usan diez varillas del #10 y si $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2.

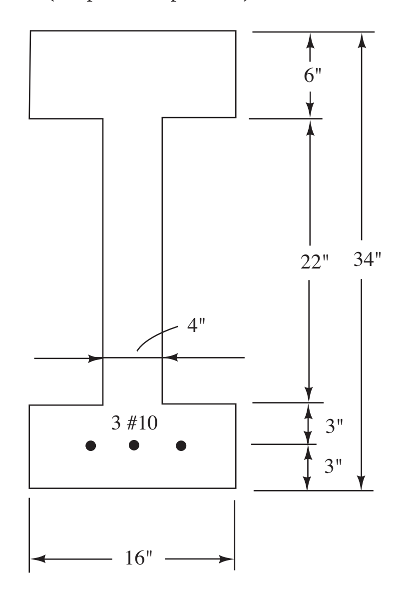
5.11 (*Resp.* 415.8 pie-klb.)



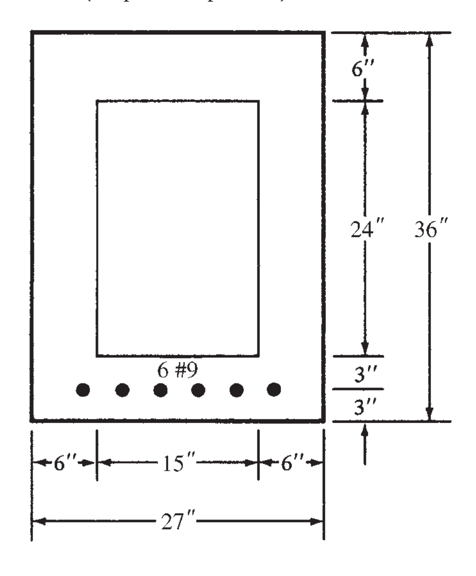
Problema 5.12



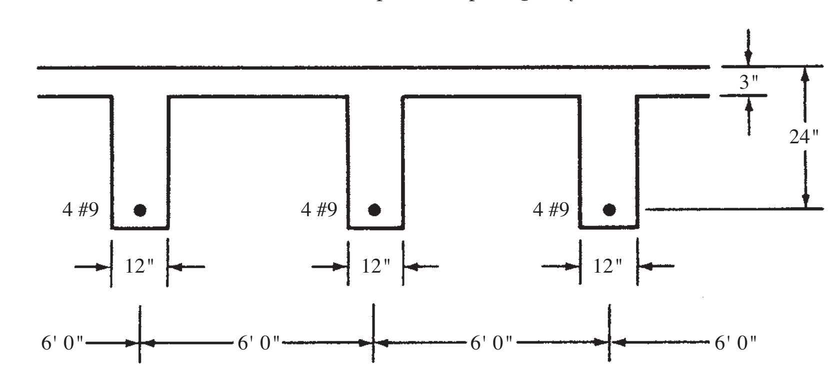
Problema 5.13 (*Resp.* 493.1 pie-klb.)



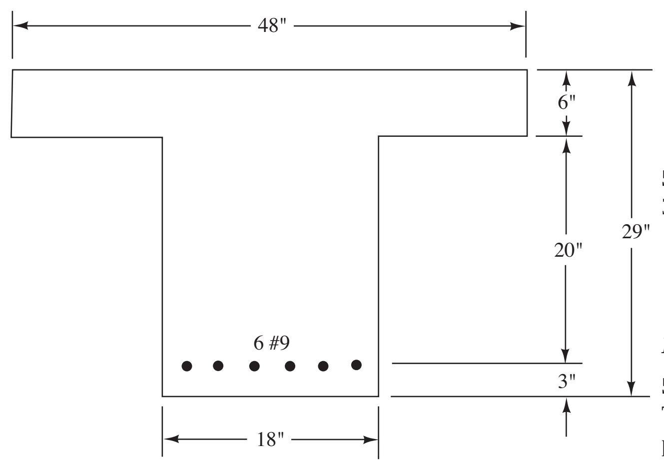
Problema 5.15 (*Resp.* 838.1 pie-klb.)



5.16 Calcule la resistencia de diseño ϕM_n para una de las vigas T mostradas si $f_c' = 5\ 000$ lb/plg², $f_y = 60\ 000$ lb/plg² y la sección tiene un claro simple de 24 pies. ¿Es $\epsilon_t \geq 0.005$?



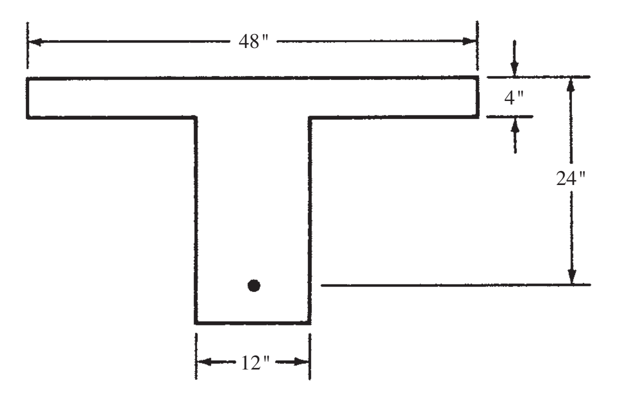
Problema 5.14



5.17 Repita el problema 5.16 si $f_c' = 3\ 000$ lb/plg² y se usan 3 varillas del #10 (*Resp.* 396.7 pie-klb.)

Diseño de vigas T

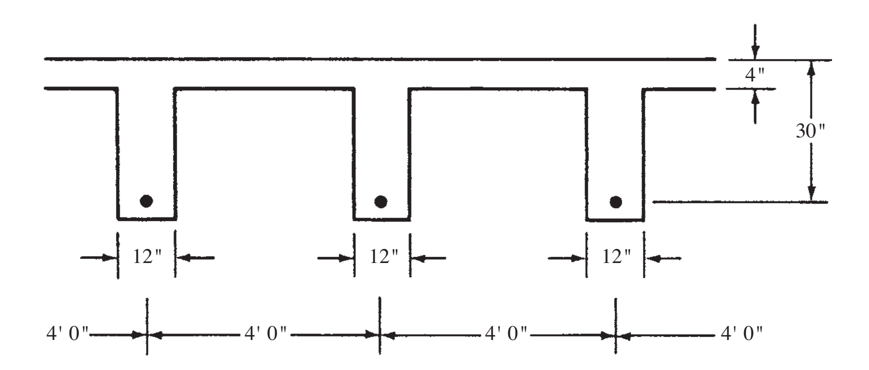
5.18 Determine el área de acero de refuerzo requerido para la viga T mostrada si $f_c' = 4\ 000$ lb/plg², $f_y = 60\ 000$ lb/plg², $M_u = 400$ pie-klb y $L = 28$ pies. Distancia libre entre almas = 3 pies.



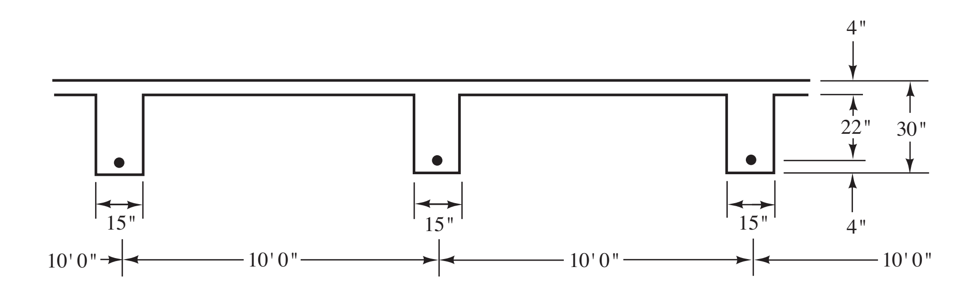
5.19 Repita el problema 5.18 si $M_u = 500$ pie-klb (*Resp.* 4.80 plg^2.)

5.20 Repita el problema 5.18 si $f_y = 50\ 000$ lb/plg^2 y $f_c' = 5\ 000$ lb/plg^2.

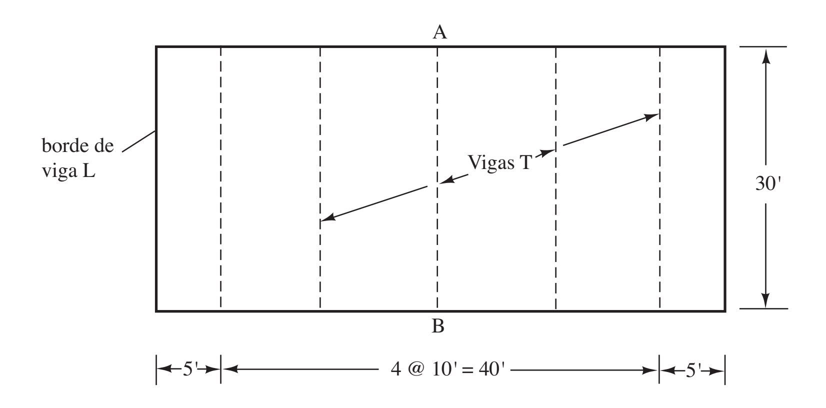
5.21 Determine la cantidad de acero de refuerzo requerido para cada viga T mostrada en la figura acompañante si $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2, $f_c' = 4\ 000$ lb/plg^2, claro simple de 20 pies, distancia libre entre almas = 3 pies, $M_D = 200$ pie-klb (incluye el efecto del peso del concreto) y $M_L = 500$ pie-klb (*Resp.* 8.11 plg^2.)



5.22 Seleccione el refuerzo de tensión necesario para las vigas T si se supone que el concreto reforzado pesa 150 lb/pie^3 y si debe soportarse uno carga viva de piso de 140 lb/pie^2. Suponga claros simples de 40 pies y $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y $f_c' = 3\ 000$ lb/plg^2.



5.23 Con $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y $f_c' = 4\ 000$ lb/plg^2, seleccione el refuerzo para la viga T *AB* para el sistema de piso mostrado. La carga viva es de 100 lb/pie^2, mientras que la carga muerta además del peso de concreto es de 80 lb/pie^2. Suponga que el peso del concreto es de 150 lb/pie^3. La losa es de 4 plg de espesor, mientras que *d* es de 24 plg y b_w es de 16 plg (*Resp.* 3.84 plg^2. Use 4 varillas del #9.)



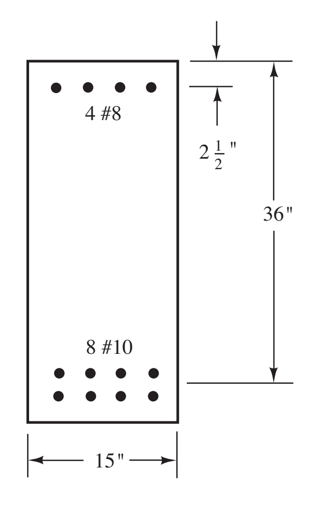
5.24 Repita el problema 5.23 si el claro es de 36 pies y la carga viva es de 100 lb/pie^2.

5.25 Elabore un diagrama de flujo para el diseño de vigas T con refuerzo de tensión con $\phi = 0.9$.

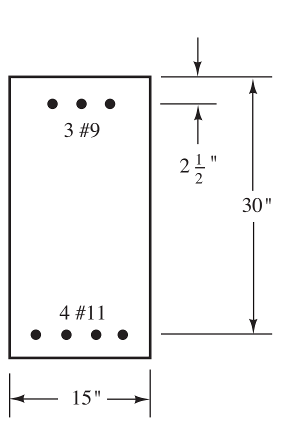
Análisis de vigas doblemente reforzadas

En los problemas 5.26 a 5.32 calcule las resistencias de diseño de las vigas mostradas si $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2. Revise el A_s máxima permisible en cada caso para garantizar una falla de tensión.

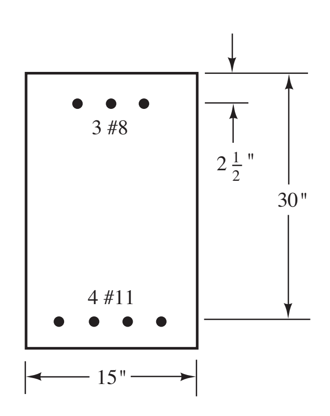
Problema 5.26



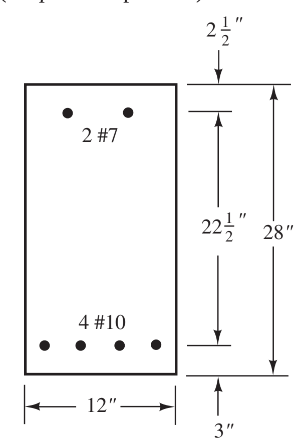
Problema 5.27 (*Resp.* 777.0 pie-klb.)



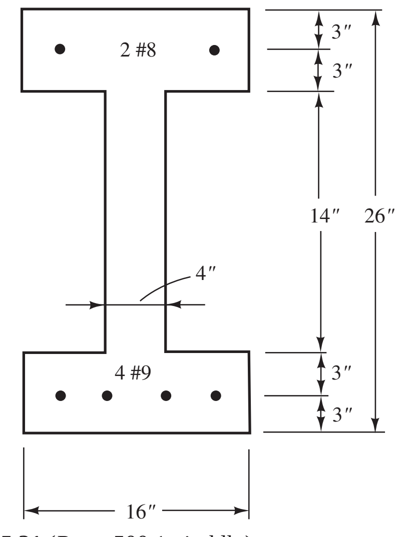
Problema 5.28



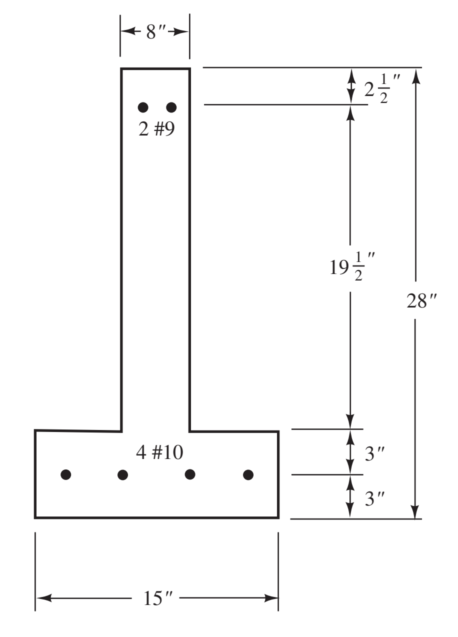
Problema 5.29 (*Resp.* 505.1 pie-klb.)



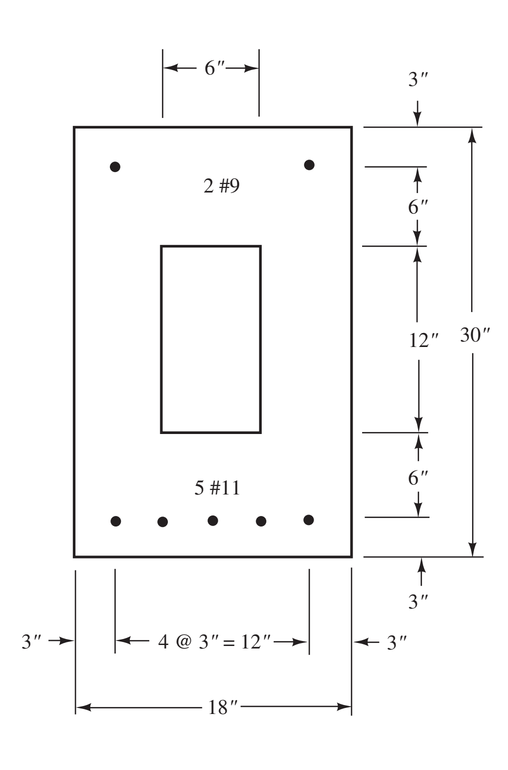
Problema 5.30



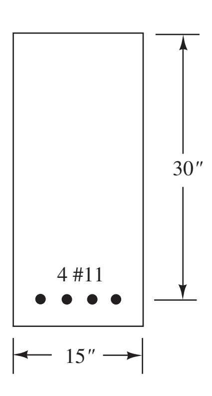
Problema 5.31 (*Resp.* 500.1 pie-klb.)



Problema 5.32



5.33 Calcule la resistencia de diseño de la viga mostrada en la figura. ¿Cuánto puede incrementarse este momento permisible si se agregan tres varillas del #9 en la parte superior de la viga a 2½ plg de la cara de compresión si $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2? (*Resp.* 740.5 pie-klb, 36.5 pie-klb.)

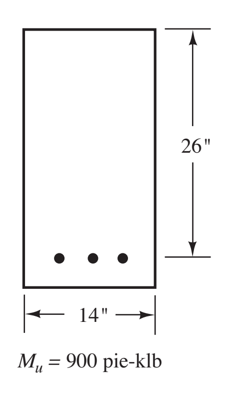


5.34 Repita el problema 5.30 si se usan tres varillas del #8 en la parte superior.

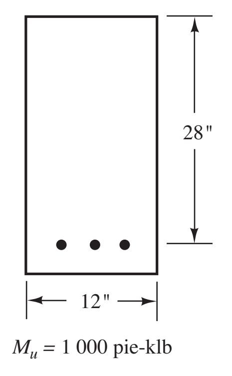
Diseño de vigas doblemente reforzadas

En los problemas 5.35 a 5.38 determine las áreas de acero requeridas para las secciones mostradas en las figuras acompañantes. En cada caso las dimensiones se limitan a los valores dados. Si se requiere acero de compresión, suponga que se colocará a 3 plg de la cara de compresión. $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $fy = 60\,000$ lb/plg^2.

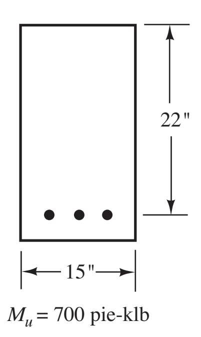
Problema 5.35 (*Resp.* $A_s = 9.03$ plg^2, $A'_s = 2.44$ plg^2.)



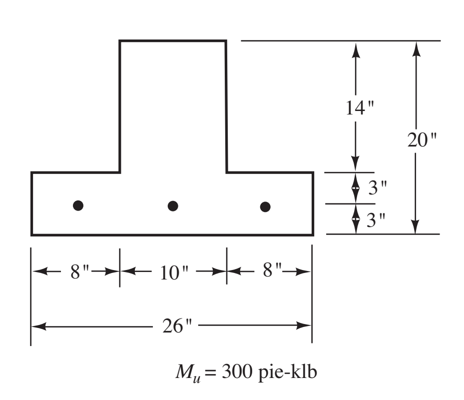
Problema 5.36



Problema 5.37 (*Resp.* $A_s = 8.36$ plg^2, $A'_s = 2.58$ plg^2.)



Problema 5.38



5.39 Elabore un diagrama de flujo para el diseño de vigas rectangulares doblemente reforzadas.

Problemas con computadora

Solucione los problemas 5.40 a 5.45 usando la hoja de cálculo del capítulo 5.

5.40 Problema 5.5.

5.41 Problema 5.7 (*Resp.* 775.7 pie-klb.)

5.42 Problema 5.14.

5.43 Problema 5.21 (*Resp.* $A_s = 8.11$ plg^2.)

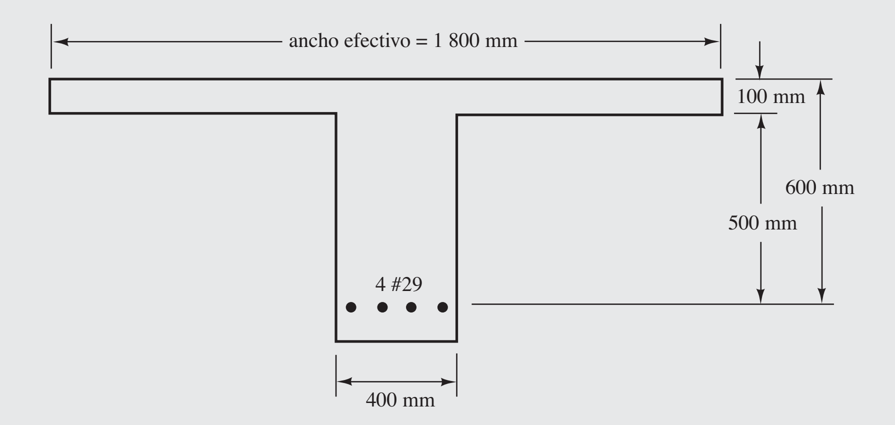
5.44 Problema 5.27.

5.45 Problema 5.35 (*Resp.* $A_s = 9.02$ plg^2, $A'_s = 2.45$ plg^2.)

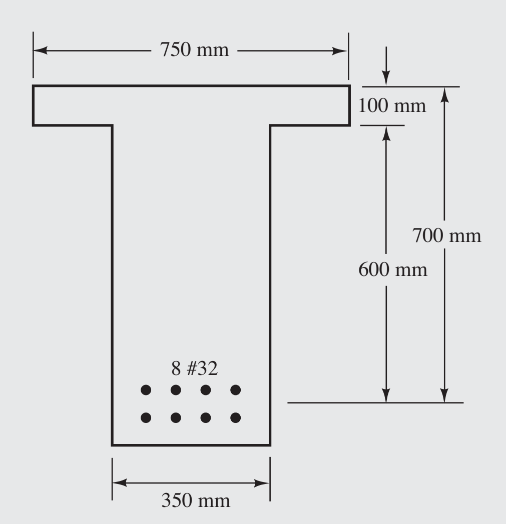
Problemas con unidades SI

En los problemas 5.46 y 5.47 determine las resistencias de momento de diseño de las vigas mostradas en las figuras acompañantes si $f'_c = 28$ MPa y $f_y = 420$ MPa. ¿Son suficientes los porcentajes de acero en cada caso como para asegurar un comportamiento a tensión, es decir, $\epsilon_t \geq 0.005$?

Problema 5.46

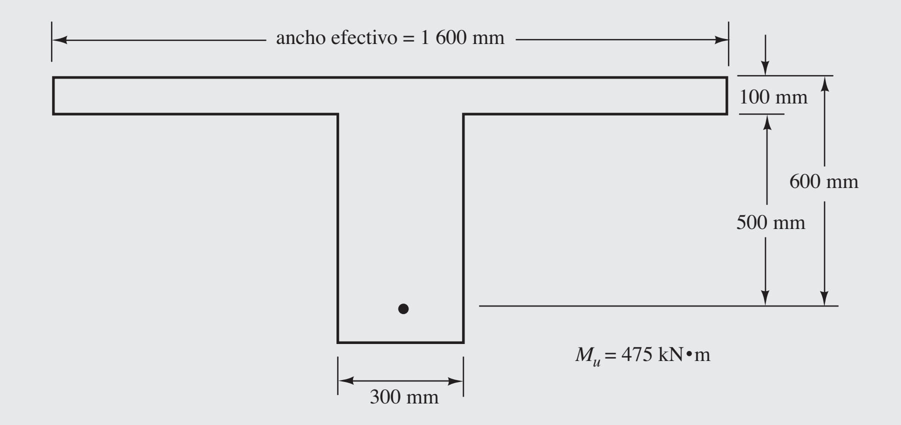


Problema 5.47 (*Resp.* 1 516 kN · m.)

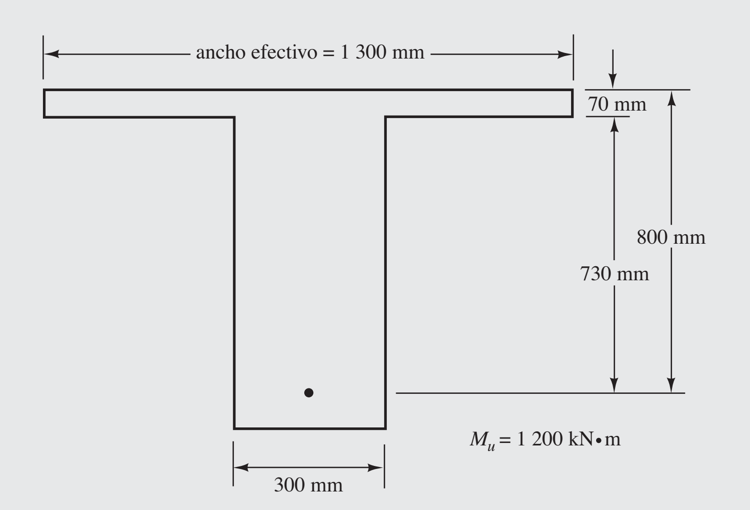


En los problemas 5.48 y 5.49 determine el área de acero de refuerzo requerido paras las vigas T mostradas si $f_c' = 28$ MPa y $f_y =$ 420 MPa.

Problema 5.48



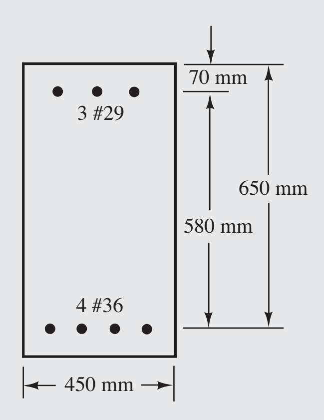
Problema 5.49 (*Resp.* 4 112 mm^2.)



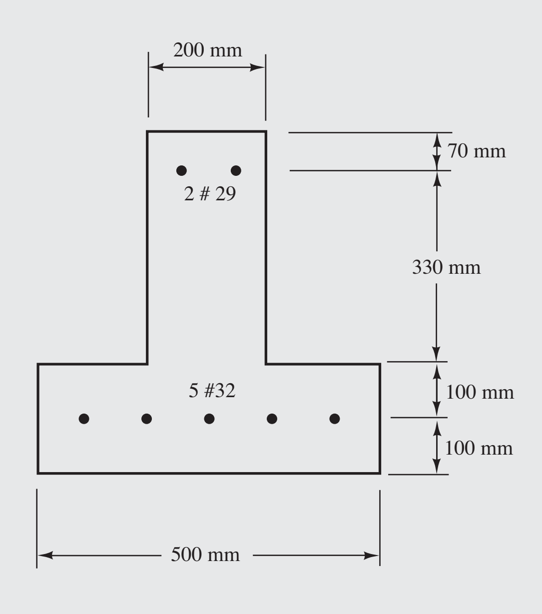
En los problemas 5.50 a 5.52 calcule las resistencias de momento de diseño de las vigas mostradas si $f_y = 420$ MPa y $f'_c = 21$ MPa. Verifique la A_s permisible máxima en cada caso para garantizar una falla dúctil. $E_s = 200\,000$ MPa.



Problema 5.50

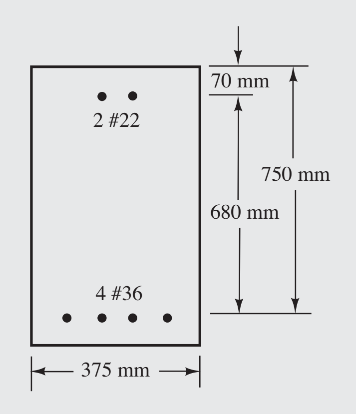


Problema 5.52

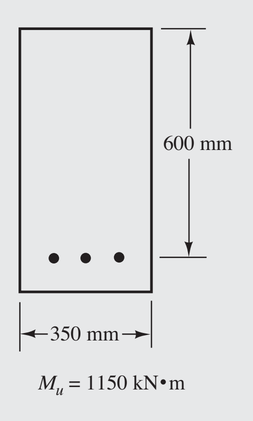


En los problemas 5.53 y 5.54 determinar las áreas requeridas de acero para las secciones mostradas en las figuras acompañantes. En cada caso las dimensiones se limitan a los valores mostrados. Si se requiere acero de compresión, suponga que éste se colocará a 70 mm de la cara de compresión. $f'_c = 28$ MPa, $f_y = 420$ MPa y $E_s = 200\,000$ MPa.

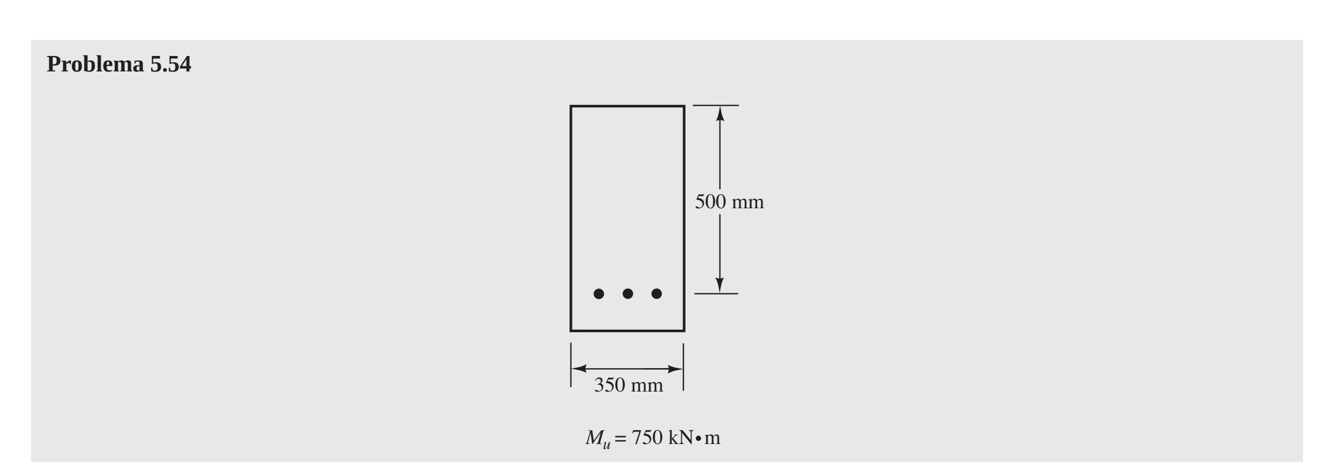
Problema 5.51 (*Resp.* 995.0 kN · m.)



Problema 5.53 (*Resp.* $A_s = 5\,925$ mm^2, $A'_s = 2\,154$ mm^2.)



Problema 5.54



Problemas más detallados

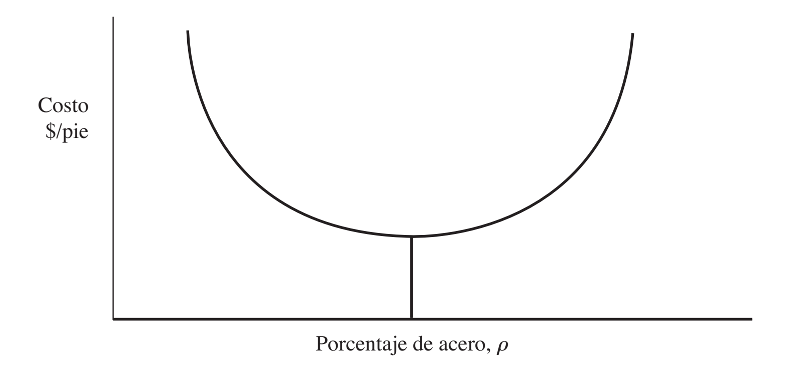
5.55 Van a usarse losas de concreto reforzado precoladas de dos pies de ancho y 4 plg de espesor para la cubierta de un techo plano. Las losas están soportadas en sus extremos por vigas rectangulares precoladas con claro de 30 pies del techo (medido centro a centro de las paredes de mampostería de soporte). Seleccione f_y, f'_c y diseñe las losas incluyendo su longitud y diseñe una de las vigas interiores de soporte. Suponga una carga viva de techo de 30 lb/pie^2 y una carga muerta de techo de 6 lb/pie^2. (*Una respuesta.* Use vigas de 12 × 24 plg con tres varillas del #9.)

5.56 Repita el problema 5.55 con claro de las vigas de 40 pies y la carga viva del techo es de 40 lb/pie^2.

5.57 Para el mismo edificio considerado en el problema 5.55, se ha diseñado una losa de concreto colada en la obra de 6 plg de espesor. La losa va a ser soportada por vigas T coladas monolíticamente con las losas. El arquitecto dice que las vigas T de 30 pies de longitud van a ser soportadas por columnas espaciadas a 18 pies entre centros. El edificio será usado para manufactura ligera (véase la tabla 1.3 del capítulo 1). Seleccione f_y, f'_c y diseñe una de las vigas T interiores. (*Una respuesta*. Use un alma de viga T de 12 plg de ancho, $h = 32$ plg y cuatro varillas del #10.)

5.58 Repita el problema 5.57 si el edificio se destina para oficinas. Los claros de las vigas deben ser de 36 pies y las columnas deberán estar colocadas a 20 pies entre centros.

5.59 Determine el diseño de costo mínimo para una viga de concreto reforzado a tensión para las siguientes condiciones: $f_y = 60$ klb/plg^2, $f'_c = 4$ klb/plg^2, $M_u = 400$ pie-klb, $l = 24$ pies, $h = d + 2.5$ plg; el concreto cuesta \$120 por yarda y pesa 150 lb/pie^3, las varillas de refuerzo cuestan \$0.95/lb y pesan 490 lb/pie^3. Diseñe la viga para el momento dado con $d = 1.5b$ y calcule su costo por pie lineal. Grafique el costo por pie lineal de viga (eje y) versus el porcentaje de acero (*eje x*). Luego cambie el tamaño de la viga, recalcule ρ y el nuevo costo. Limite los tamaños de la viga a incrementos de 1 plg en b. Encuentre el diseño de menor costo y el valor correspondiente de ρ. (*Resp.* Aproximadamente $\rho = 0.0139$ y Costo = \$26.03/pie.)



5.60 Repita el problema 5.59 si $d = 2b$.

6

Estado límite de servicio

6.1 INTRODUCCIÓN

Actualmente, la profesión del diseño estructural se preocupa por la filosofía de los *estados límite*. El término *estado límite* se usa para describir la condición en que una estructura o parte de ella, deja de cumplir la función para la que fue diseñada. Hay dos categorías de estados límite: por resistencia y por servicio.

Los *estados límite por resistencia* se basan en la seguridad o capacidad de carga de las estructuras e incluyen el pandeo, la fractura, la fatiga, el volteo, etc. En los capítulos 3 a 5 se estudiaron los estados límite por flexión de diversos miembros.

Los estados límite de servicio se refieren al desempeño de las estructuras bajo cargas normales de servicio y tienen que ver con los usos y/o la ocupación de las estructuras. El estado límite de servicio se mide considerando las magnitudes de las deflexiones, grietas y vibraciones de las estructuras así como la cantidad de deterioro superficial del concreto y la corrosión del refuerzo. Observe que estos aspectos pueden perturbar el uso de las estructuras, pero generalmente no implican su colapso.

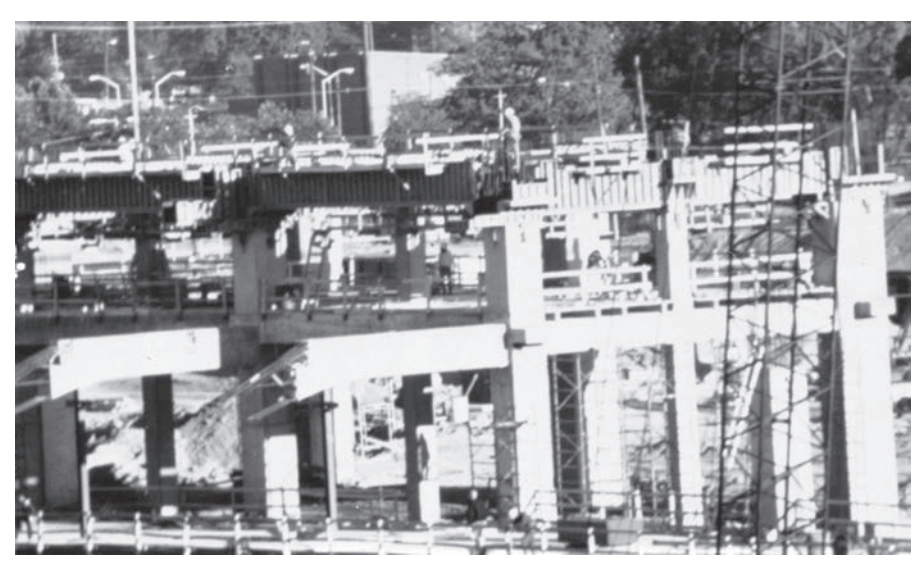
En este capítulo nos ocuparemos de los estados límite de servicio relativos a las deflexiones y a las anchuras de las grietas. El código ACI contiene requisitos muy específicos referentes a los estados límite por resistencia de los miembros de concreto reforzado, pero permite al proyectista cierta libertad en el área de servicio. Esto no quiere decir que los estados límite de servicio no sean significativos, sino que la consideración más importante (como en todas las especificaciones estructurales) es la vida y la propiedad de la población. Como consecuencia, la seguridad pública no se deja al juicio del proyectista individual.

La vibración vertical en puentes y pisos de edificios, así como también la vibración lateral y de torsión en edificios altos, pueden ser muy molestas para los usuarios de estas estructuras. Sin embargo, las vibraciones no son usualmente un problema en edificios de concreto reforzado de tamaño medio, pero es necesario estar al tanto de los casos en que puedan ser objetables.

El deterioro de las superficies de concreto puede minimizarse considerablemente con un buen control del mezclado, colado y curado del concreto. Cuando esas superficies están sometidas a productos químicos agresivos, pueden usarse cementos especiales con aditivos adecuados para proteger las superficies. La corrosión del refuerzo puede minimizarse considerablemente dando cuidadosa atención a la calidad del concreto, usando una buena vibración del concreto, empleando un espesor adecuado del recubrimiento para las varillas y limitando el tamaño de las grietas.

6.2 IMPORTANCIA DE LAS DEFLEXIONES

La adopción del método de diseño por resistencia, conjuntamente con el uso de concretos y aceros de mayor resistencia, ha permitido el uso de miembros relativamente esbeltos. Como consecuencia, las deflexiones y el agrietamiento por deflexión se han convertido en problemas más severos de lo que fueron hace algunas décadas.



Domo Georgia, Atlanta, Georgia. (Cortesía de Economy Forms Corporation.)

Las magnitudes de las deflexiones en miembros de concreto pueden ser muy importantes. Las deflexiones excesivas en vigas y losas pueden ocasionar pisos combados, charcos en techos planos, vibraciones excesivas e incluso con la operación correcta de la maquinaria emplazada en esas estructuras. Tales deflexiones pueden dañar los muros divisorios y desajustar el cierre de puertas y ventanas. Además, pueden afectar la apariencia de una estructura o alarmar a los ocupantes del edificio, aun cuando éste sea perfectamente seguro. Toda estructura usada por personas debe ser lo suficientemente rígida y relativamente libre de vibración para generar un ambiente de seguridad.

Quizás el tipo más común de daño por deflexiones en las estructuras de concreto reforzado sea el daño en los muros divisorios ligeros de obra de mampostería. Están en particular sujetos a daños debido al flujo plástico a largo plazo del concreto. Cuando los pisos superiores e inferiores se flexionan, los muros divisorios, al ser obra de mampostería relativamente rígida, no se flexionan fácilmente y con frecuencia resultan gravemente dañados. Por otra parte, los tableros de yeso, al ser más flexibles, son bastante más adaptables a tales distorsiones.

6.3 CONTROL DE LAS DEFLEXIONES

Una de las mejores maneras para reducir las deflexiones es incrementando el peralte de los miembros, pero los proyectistas están siempre bajo presión para conservar a los miembros con el peralte tan bajo como sea posible. (Como usted puede ver, los miembros con bajo peralte implican pisos más delgados y los pisos más delgados implican edificios de menor altura, con las consiguientes reducciones en muchos costos tales como plomería, cableado, elevadores, materiales de fachada, etc.) Las especificaciones de concreto reforzado usualmente limitan las deflexiones especificando ciertos peraltes mínimos o bien las deflexiones calculadas máximas permisibles.

Espesores mínimos

La tabla 4.1 del capítulo 4, que corresponde a la tabla 9.5(*a*) del código ACI, muestra un conjunto de espesores mínimos que deben usarse en las vigas y losas en una dirección, a menos que los cálculos de las deflexiones reales indiquen que son permisibles espesores menores. Estos valores de los espesores

mínimos, que se obtuvieron primordialmente con base en la experiencia de muchos años, deben usarse sólo en las vigas y losas que no estén cargando ni se encuentren conectadas a paredes divisorias u otros miembros que puedan resultar dañados por las deflexiones.

Deflexiones máximas

Si el proyectista decide no satisfacer los espesores mínimos dados en la tabla 4.1, entonces deberá calcular las deflexiones reales. Si procede así, los valores determinados no deben exceder los valores especificados en la tabla 6.1, que corresponde a la tabla 9.5(*b*) del código ACI.

Combadura (o contraflecha)

La deflexión de miembros de concreto reforzado también se puede controlar por medio de la combadura. Los miembros se construyen con un perfil longitudinal tal que asuman su perfil teórico bajo alguna condición de carga de servicio (usualmente carga muerta y quizás algo de carga viva). Se podría construir una viga simple con una pequeña convexidad, a fin de que bajo ciertas cargas gravitacionales asumiese un perfil recto, como se supone en los cálculos. (Véase la figura 6.1.) Algunos proyectistas toman en cuenta tanto las cargas totales vivas como muertas al determinar la magnitud de la combadura, la cual generalmente se usa sólo en miembros de grandes claros.

Tabla 6.1 Deflexiones permisibles máximas calculadas.

Tipo de miembro	Deflexión por considerar	Deflexión límite
Techos planos que no carguen o estén unidos a elementos no estructurales que puedan dañarse por deflexiones grandes	Deflexión inmediata debida a la carga viva *L*	$\frac{\ell^{*}}{180}$
Pisos que no carguen o estén ligados a elementos no estructurales que puedan dañarse por deflexiones grandes	Deflexión inmediata debida a la carga viva *L*	$\frac{\ell}{360}$
Techo o piso que carguen construcción o ligados a elementos no estructurales que pueden resultar dañados por deflexiones grandes	Aquella parte de la deflexión total que ocurre después de la conexión de los elementos no estructurales (suma de la deflexión a largo plazo debida a todas las cargas sostenidas y la deflexión inmediata debido a cualquier carga viva adicional)†	$\frac{\ell^{\ddagger}}{480}$
Techo o piso que carguen construcción o ligados a elementos no estructurales que pueden resultar dañados por deflexiones grandes		$\frac{\ell^{\S}}{240}$

*Este límite no toma en cuenta el encharcamiento. Este último debe revisarse mediante los cálculos apropiados de las deflexiones, incluyendo las deflexiones adicionales debidas al agua encharcada y considerando los efectos a largo plazo de todas las cargas sostenidas, de la combadura, de las tolerancias de construcción y de la confiabilidad de los dispositivos de drenaje.
†La deflexión a largo plazo se determinará de conformidad con los incisos 9.5.2.5 o 9.5.4.3, pero puede reducirse según la deflexión calculada que ocurra antes de la conexión de los elementos no estructurales. Esta cantidad se determinará con base en datos de ingeniería aceptados referente a las características de deflexión-tiempo de miembros similares a los que se consideran.
‡Este límite puede excederse si se toman medidas adecuadas para prevenir daños a los elementos apoyados o conectados.
§Pero no mayor que la tolerancia dada a los elementos no estructurales. El límite puede ser excedido si se provee una combadura de manera que la deflexión total menos la combadura no exceda el límite.

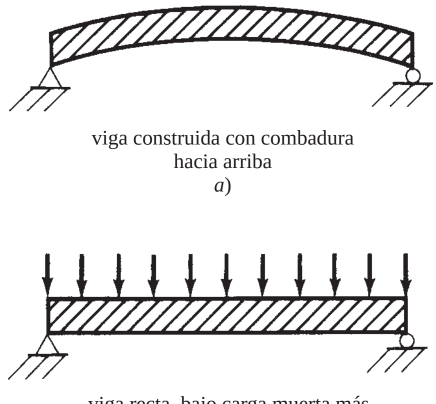


Figura 6.1 Combadura (o contraflecha).

6.4 CÁLCULO DE DEFLEXIONES

Las deflexiones en miembros de concreto reforzado se pueden calcular con ayuda de las expresiones usuales para deflexiones, varias de las cuales se muestran en la figura 6.2. Caben algunos comentarios sobre las magnitudes de las deflexiones en los miembros de concreto reforzado, tal como se determinan con las expresiones dadas en esta figura. Puede verse que la deflexión ℄, en el centro del claro, de una viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida [figura 6.2(*a*)] es 5 veces mayor que la deflexión ℄ de la misma viga si sus extremos están empotrados [figura 6.2(*b*)]. Casi todas las vigas y losas de concreto son continuas y sus deflexiones tienen magnitudes intermedias entre los dos extremos mencionados aquí.

Por las variaciones tan grandes de deflexión que ocurren cuando se tienen diferentes restricciones en los extremos, es esencial que esas restricciones sean consideradas si se quieren hacer cálculos realistas de las deflexiones. En la mayoría de los casos prácticos la exactitud es suficiente si se calcula la deflexión ℄ en el centro del claro de un miembro como si éste estuviese simplemente apoyado, restando de ese valor la deflexión causada por el promedio de los momentos negativos en los extremos del miembro. (Esto se puede hacer usando una combinación de las expresiones de la figura 6.2. Por ejemplo, la ecuación de la deflexión de la parte (*a*) se puede combinar con la (*g*) aplicada a uno o a ambos extremos, según sea necesario.) Las cargas usadas en estas expresiones son cargas no factorizadas. En algunos casos, sólo se considera la carga viva; mientras que en otros, se consideran tanto cargas vivas como cargas muertas (sustentadas).

6.5 MOMENTOS DE INERCIA EFECTIVOS

Independientemente del método usado para el cálculo de deflexiones, hay un problema en la determinación del momento de inercia que debe usarse. La dificultad estriba en la estimación del agrietamiento que ha ocurrido. Si el momento flexionante es menor que el momento de agrietamiento (es decir, si el esfuerzo de flexión es menor que el módulo de ruptura, aproximadamente igual a $7.5\lambda\sqrt{f'_c}$, la sección

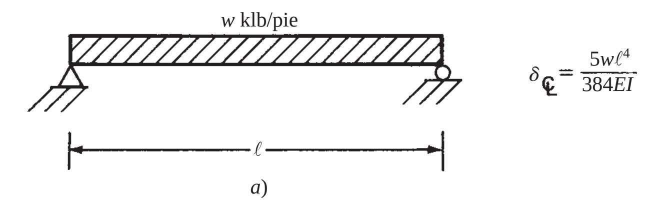


Figura 6.2*a*) Expresiones para algunas deflexiones.

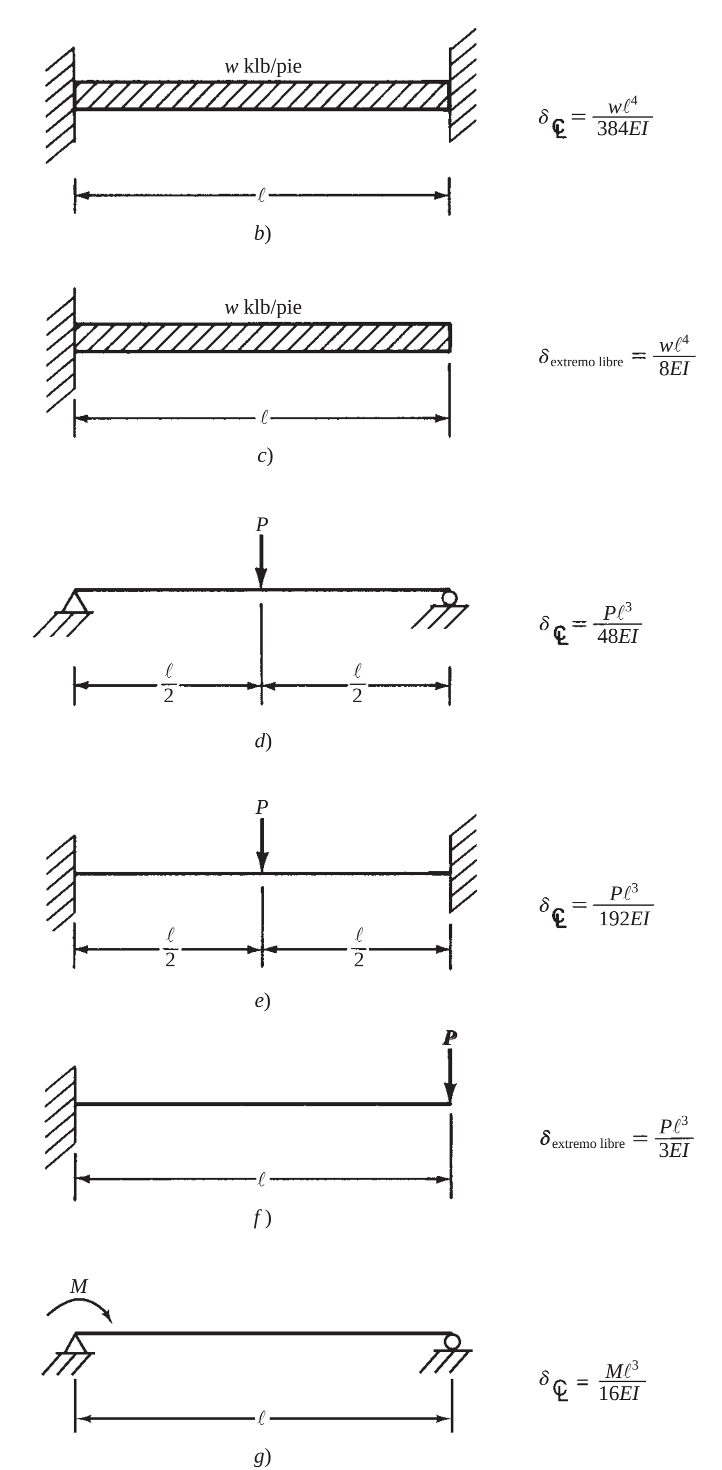


Figura 6.2*b*-*g*) Expresiones para algunas deflexiones.

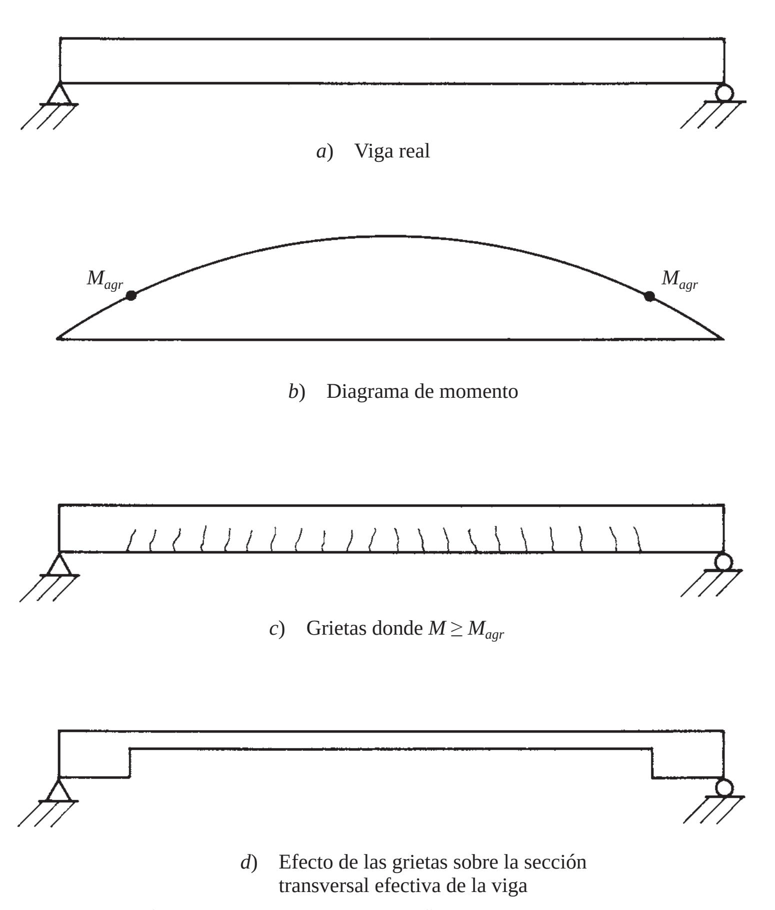


Figura 6.3 Efectos de las grietas en las deflexiones.

total sin agrietar proporciona rigidez y con ella puede calcularse el momento de inercia I_g de la sección completa. Cuando se tienen momentos mayores, ocurrirán grietas de tensión de tamaño diferente y variará la posición del eje neutro.

La figura 6.3 ilustra el problema involucrado en la selección del momento de inercia que ha de emplearse en el cálculo de deflexiones. Aunque una viga de concreto reforzado puede tener un tamaño constante (o prismático) en toda su longitud, en los cálculos de deflexiones se comportará como si estuviese compuesta de segmentos de vigas de diferentes tamaños.[1]

Para la porción de una viga donde el momento es menor que el momento de agrietamiento, M_{agr}, se puede suponer que la viga no está agrietada y que el momento de inercia es igual a I_g. Cuando el momento es mayor que M_{cr}, las grietas de tensión que se desarrollan en la viga ocasionarán, efectivamente, que se reduzca la sección transversal de la viga, así que el momento de inercia puede suponerse igual al valor transformado, I_{cr}. Es como si la viga consistiese en los segmentos mostrados en la figura 6.3(*d*).

El problema es aún más complicado que lo indicado por la figura 6.3. Es cierto que en las secciones transversales donde las grietas de tensión están realmente ubicadas, el momento de inercia es probablemente cercano a I_{cr} transformado, pero entre las grietas está quizá más cercano a I_g. Además, pueden existir grietas por tensión diagonal en áreas de esfuerzo cortante alto, causando otras variaciones. Como consecuencia, es difícil decidir qué valor de I debería ser usado.

[1]Leet, K., 1997, *Reinforced Concrete Design*, 3a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill), pág. 155.

Una sección de concreto que esté totalmente agrietada en su lado de tensión tendrá una rigidez con valor de un tercio a tres cuartos de la rigidez completa de sección si no está agrietada. En diferentes secciones a lo largo de la viga, la rigidez varía en función del momento presente. Es fácil ver que un método exacto para calcular deflexiones debe tener en cuenta estas variaciones.

Si se quiere obtener la deflexión inmediata de un miembro prismático no agrietado, puede suponerse que el momento de inercia es igual a I_g en toda la longitud del miembro. Si el miembro está agrietado en una o más secciones a lo largo de su longitud o si su peralte varía a lo largo del claro, deberá usarse un valor más exacto de I.

La sección 9.5.2.3 del código da una expresión de momento de inercia para usarse en los cálculos de deflexiones. Este momento de inercia provee un valor de transición entre I_g e I_{cr} que depende del grado de agrietamiento causado por las cargas aplicadas. Se le llama I_e, *el* momento de inercia efectivo y se basa en una estimación de la cantidad probable de agrietamiento causado por el momento variable a lo largo del claro:[2]

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 (I_g) + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] I_{cr} \qquad \text{(Ecuación 9-8 ACI)}$$

En esta expresión, I_g es el momento de inercia de la sección total (sin considerar el acero) y M_{agr} es el momento de agrietamiento $= f_r I_g / y_t$ con $f_r = 7.5\lambda\sqrt{f'_c}$*. M_a es el momento máximo bajo carga de servicio que se presenta en el caso bajo consideración, e I_{cr} es el momento de inercia transformado de la sección agrietada, tal como se describe en la sección 2.3.

Usted notará que los valores del momento de inercia efectivo varían con condiciones de carga diferentes. Esto se debe a que el momento de carga de servicio, M_a, usado en la ecuación para I_e, es diferente para cada condición de carga. Algunos proyectistas ignoran este hecho y usan sólo un I_e para cada miembro, aun cuando se consideran diferentes condiciones de carga. Ellos consideran que sus valores calculados son tan exactos como los obtenidos con valores I_e diferentes. Es verdad que las condiciones variables implicadas en la construcción de miembros de concreto reforzado (trabajabilidad, condiciones de curado, edad de los miembros cuando las cargas son aplicadas por primera vez, etc.), hacen del cálculo de deflexiones por cualquier procedimiento actual un proceso muy aproximado.

En este capítulo los autores calculan I_e para cada condición de carga diferente. El trabajo es algo tedioso, pero puede ser facilitado considerablemente con varias tablas como las proporcionadas en el *Manual de Diseño del ACI.*[3]

6.6 DEFLEXIONES A LARGO PLAZO

Con I_e y las expresiones apropiadas para deflexiones, se obtienen las deflexiones instantáneas o inmediatas. Sin embargo, las cargas sostenidas o de largo plazo causan incrementos significativos en estas deflexiones debido a la contracción y al flujo. Los factores que afectan los incrementos de la deflexión son: humedad, temperatura, condiciones de curado, contenido de acero de compresión, relación entre el esfuerzo y resistencia y la edad del concreto en el momento en que se aplica la carga.

Si el concreto se carga a temprana edad, sus deflexiones a largo plazo se incrementarán considerablemente. Las deflexiones excesivas en las estructuras de concreto reforzado muy a menudo pueden deberse a la temprana aplicación de las cargas. La deformación unitaria por flujo plástico después de aproximadamente 5 años (después de lo cual el flujo es insignificante) puede ser mayor que 4 o 5 veces

[2]Branson, D.E., 1965, "Instantaneous and Time-Dependent Deflections on Simple Continuous Reinforced Concrete Beams", HPR Report No. 7, Part 1, Alabama Highway Department, Bureau of Public Roads, agosto 1963, págs. 1- 78.

*o sea $0.7\lambda\sqrt{f'_c}$ en unidades SI.

[3]American Concrete Institute, 1997, *Manual de Diseño del ACI* (Farmington Hills, Michigan), Publicación SP-17 (97), págs. 110-124.

Tabla 6.2 Factor de tiempo para cargas sostenidas (Código ACI 9.5.2.5).

Duración de la carga sostenida	Factor ξ dependiente del tiempo
5 años o más	2.0
12 meses	1.4
6 meses	1.2
3 meses	1.0

la deformación unitaria inicial cuando las cargas se aplicaron por primera vez a los 7 o 10 días después del colado del concreto, mientras que la proporción puede ser sólo de 2 a 3 veces cuando las cargas se aplicaron por primera vez 3 o 4 meses después del colado del concreto.

Debido a los diversos factores mencionados en los dos últimos párrafos, sólo se pueden estimar las magnitudes de las deflexiones a largo plazo. El inciso (9.5.2.5) del código establece que para estimar el incremento de la deflexión debido a estas causas, la parte de la deflexión instantánea debida a las cargas sostenidas puede multiplicarse por el factor λ obtenido empíricamente que se da al final de este párrafo y el resultado se puede sumar a la deflexión instantánea.[4]

$$\lambda_\Delta = \frac{\xi}{1 + 50\rho'} \qquad \text{(Ecuación 9-11 ACI)}$$

En esta expresión, que es aplicable a concretos de peso normal y ligero, ξ es un factor dependiente del tiempo que puede obtenerse de la tabla 6.2.

Si se usan tiempos que difieren de los valores dados en la tabla 6.2, los valores de ξ se pueden obtener de la curva de la figura 6.4.

El efecto del acero de compresión en las deflexiones a largo plazo se toma en consideración en la expresión para λ con el término ρ'. Es igual a A_s'/bd y debe calcularse en el centro del claro en claros simples y continuos y en los apoyos en vigas en voladizo.

La carga muerta total de una estructura se puede clasificar como una carga permanente, pero el tipo de ocupación determinará el porcentaje de carga viva que pueda llamarse permanente. Para un edificio de apartamentos o para un edificio de oficinas, quizá sólo del 20 al 25% de la carga viva de servicio puede considerarse como permanente, mientras que de 70 a 80% de la carga viva de servicio en una bodega se situaría en esta categoría.

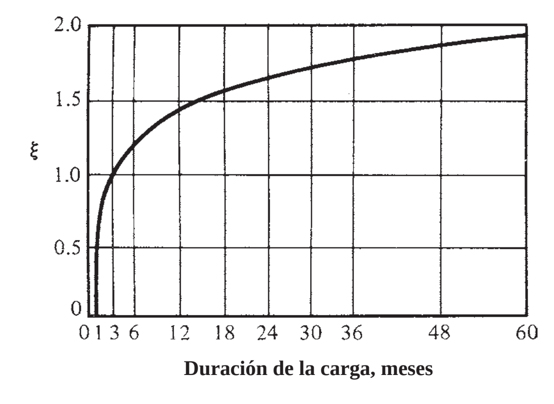


Figura 6.4 Multiplicadores para deflexiones a largo plazo. (Comentario ACI, figura R9.5.2.5.)

[4]Branson, D.E., 1971, "Compression Steel Effect on Long-Time Deflections", *Journal ACI*, 68(8), págs. 555-559.

Un estudio realizado por el ACI indica que bajo condiciones controladas de laboratorio, 90% de los especímenes de prueba tuvieron deflexiones entre 20% debajo y 30% por arriba de los valores calculados por el método descrito en este capítulo.[5] Sin embargo, el lector debe darse cuenta de que las condiciones de campo no equivalen a las condiciones de laboratorio y las deflexiones en las estructuras reales varían bastante más que las que se miden en especímenes de laboratorio. A pesar del uso de planos, especificaciones e inspecciones de campo, es difícil controlar el trabajo de campo adecuadamente. Las cuadrillas de construcción pueden agregar un poco de agua al concreto para hacerlo más manejable. Además, es posible que no se obtenga un mezclado y una compactación satisfactoria del concreto, lo que ocasiona huecos y cavidades. Finalmente, la cimbra puede ser retirada antes de que el concreto haya obtenido su resistencia de diseño plena. Si éste es el caso, los módulos de ruptura y elasticidad serán muy bajos y se tendrán grietas excesivas en las vigas, que no se hubieran dado si el concreto hubiese sido más resistente. Todos estos factores pueden causar que las estructuras de concreto reforzado se deflexionen más de lo indicado por los cálculos usuales.

Es lógico suponer que la carga viva no puede actuar sobre una estructura cuando la carga muerta no está presente. Como resultado de este hecho calcularemos un I_e efectivo y una deflexión δ_D para el caso en que actúe sola la carga muerta. Luego calcularemos un I_e y una deflexión δ_{D+L} para el caso en que actúen juntas las cargas muerta y viva. Esto nos permitirá determinar la parte de la carga viva inicial de la deflexión, como sigue:

$$\delta_L = \delta_{D+L} - \delta_D$$

La deflexión a largo plazo será igual a la deflexión inicial por carga viva δ_L más el multiplicador λ_∞ veces la deflexión por carga muerta δ_D más λ_r veces (λ_r es el multiplicador por carga viva permanente) la deflexión inicial por carga viva δ_{SL}.

$$\delta_{LT} = \delta_L + \lambda_\infty \delta_D + \lambda_t \delta_{SL}$$

Los pasos implicados en el cálculo de deflexiones instantáneas y de largo plazo pueden resumirse como sigue:

a) Calcule la deflexión instantánea o de corto plazo δ_D sólo para carga muerta.

b) Calcule la deflexión instantánea δ_{D+L} para carga muerta más carga viva total.

c) Determine la deflexión instantánea δ_L sólo para carga viva total.

d) Calcule la deflexión instantánea por carga muerta más la parte permanente de la carga viva $\delta_D + \delta_{SL}$.

e) Determine la deflexión instantánea δ_L para la parte permanente de la carga viva.

f) Determine la deflexión a largo plazo por carga muerta más la parte permanente de la carga viva δ_{LT}.

Como ya se mencionó, las deflexiones calculadas como se indica en este capítulo no deben exceder ciertos límites que dependen del tipo de estructura. Las deflexiones máximas permitidas por el ACI para diversas situaciones de pisos y techos se presentaron previamente en la tabla 6.1.

6.7 DEFLEXIONES EN VIGAS SIMPLES

El ejemplo 6.1 presenta el cálculo de las deflexiones instantáneas y a largo plazo de una viga simple con carga uniforme.

[5]Comité 435 del ACI, 1972, "Variability of Deflections of Simply Supported Reinforced Concrete Beams", *Journal ACI*, 69(1), pág. 29.

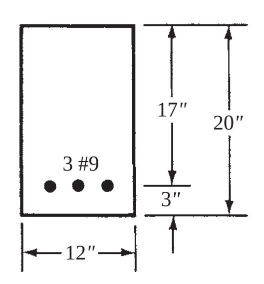


Figura 6.5

EJEMPLO 6.1

La viga de la figura 6.5 tiene un claro simple de 20 pies y soporta una carga muerta, incluyendo su propio peso, de 1 klb/pie y una carga viva de 0.7 klb/pie. $f'_c = 3\,000$ lb/plg².

a) Calcular la deflexión instantánea para $D + L$.

b) Calcular la deflexión dado que 30% de la carga viva se aplica continuamente durante tres años.

SOLUCIÓN **a) Deflexión Instantánea o a corto plazo por carga muerta (δ_D)**

$$I_g = \left(\tfrac{1}{12}\right)(12)(20)^3 = 8\,000 \text{ plg}^4$$

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} = \frac{(7.5\sqrt{3\,000})(8\,000)}{10} = 328\,633 \text{ plg-lb} = 27.4 \text{ pie-klb}$$

$$M_a = \frac{(1.0)(20)^2}{8} = 50 \text{ pie-klb} = M_D$$

Puesto que el momento por carga muerta M_D es menor que el momento por agrietamiento M_{cr}, debe usarse $M_{cr} = M_a$ e $I_e = I_g$.

Mediante cálculos con el área transformada pueden determinarse los valores de x e I_{cr} como se ilustró previamente en el ejemplo 2.2.

$$x = 6.78''$$

$$I_{cr} = 4\,067 \text{ plg}^4$$

Luego se calcula I_e con la ecuación 9-8 del ACI

$$I_e = \left(\frac{27.4}{50}\right)^3 (8\,000) + \left[1 - \left(\frac{27.4}{50}\right)^3\right] 4\,067 = 4\,714 \text{ plg}^4$$

$$E_c = 57\,000\sqrt{3\,000} = 3.122 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2$$

$$\delta_D = \frac{5wl^4}{384E_cI_e} = \frac{(5)\left(\dfrac{1\,000}{12}\right)(12 \times 20)^4}{(384)(3.122 \times 10^6)(4\,714)} = \underline{\underline{0.245 \text{ plg*}}}$$

b) Deflexión instantánea o a corto plazo por carga muerta + carga viva total (δ_{D+L})

$$M_a = \frac{(1.7)(20)^2}{8} = 85 \text{ pie-klb}$$

Observando que el valor de I_e se modifica cuando cambian los momentos.

*Los autores realmente se excedieron en este capítulo cuando calcularon la deflexión con tres dígitos. No podemos esperar este tipo de exactitud y un dígito más allá del punto decimal es suficiente. Estos casos son señalados en este capítulo por *.

$$I_e = \left(\frac{27.4}{85}\right)^3 (8\ 000) + \left[1 - \left(\frac{27.4}{85}\right)^3\right](4\ 067) = 4\ 199 \text{ plg}^4$$

$$\delta_{D+L} = \frac{(5)\left(\frac{1\ 700}{12}\right)(12 \times 20)^4}{(384)(3.122 \times 10^6)(4\ 199)} = 0.467 \text{ plg*}$$

c) Deflexión inicial por carga viva total (δ_L)

$$\delta_L = \delta_{D+L} - \delta_D = 0.467 - 0.245 = \underline{\underline{0.222 \text{ plg*}}}$$

Ésta es la deflexión por carga viva que sería comparada con la primera o la segunda fila de la tabla 6.1. Si la viga es parte de un sistema de piso que no esté “soportando ni esté unida a elementos no estructurales susceptibles de ser dañados por deflexiones grandes” (columna izquierda de la tabla 6.1), entonces el límite de deflexión es $\ell/360 = (20)(12)/360 = 0.67$ plg. Este límite fácilmente sería satisfecho en este caso ya que la deflexión calculada es únicamente de 0.22 plg.

d) Deflexión inicial por carga muerta + 30% de carga viva ($\delta_D + \delta_{SL}$)

$$M_a = \frac{(1.0 + 0.30 \times 0.7)(20)^2}{8} = 60.5 \text{ pie-klb}$$

$$I_e = \left(\frac{27.4}{60.5}\right)^3 (8\ 000) + \left[1 - \left(\frac{27.4}{60.5}\right)^3\right](4\ 067) = 4\ 432 \text{ plg}^4$$

$$\delta_D + \delta_{SL} = \frac{(5)\frac{(1\ 000 + 0.30 \times 700)}{12}(12 \times 20)^4}{(384)(3.122 \times 10^6)(4\ 432)} = 0.315 \text{ plg*}$$

e) Deflexión inicial debida a 30% de la carga viva (δ_{SL})

$$\delta_{SL} = (\delta_D + \delta_{SL}) - \delta_D = 0.315 - 0.245 = \underline{\underline{0.070 \text{ plg*}}}$$

f) Deflexión a largo plazo por carga muerta más 30% de carga viva permanente durante tres años (δ_{LT})

$$\lambda_\infty = \frac{2.0}{1 + 50\rho'} = \frac{2.0}{1 + 0} = 2.0$$

$$\lambda_{3\text{ años}} = \frac{1.80}{1 + 0} = 1.80$$

$$\delta_{LT} = \delta_L + \lambda_\infty \delta_D + \lambda_{3\text{ años}} \delta_{SL}$$

$$= 0.222 + (2.0)(0.245) + (1.80)(0.070) = 0.838 \text{ plg*}$$

La columna intermedia de la tabla 6.1 describe esta deflexión para las últimas dos filas de la tabla. La respuesta se compara con ya sea $\ell/480$ o $\ell/240$, dependiendo de si el miembro estructural soporta elementos susceptibles de ser dañados por deflexiones grandes.

6.8 DEFLEXIONES EN VIGAS CONTINUAS

En el siguiente análisis se considera una viga T continua sometida a momentos positivos y negativos. Como se muestra en la figura 6.6, el momento de inercia efectivo usado para calcular deflexiones varía considerablemente a lo largo del miembro. Por ejemplo, en el centro del claro, en la sección1-1 donde el

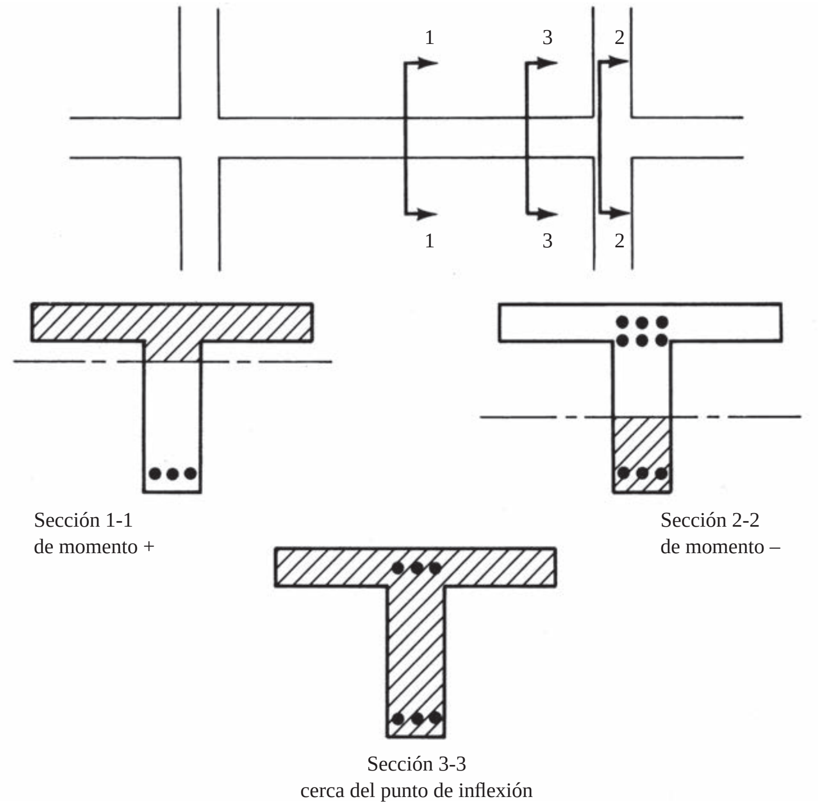


Figura 6.6 Deflexiones en una viga T continua.

momento positivo es máximo, el alma está agrietada y la sección efectiva consiste en la sección achurada más el refuerzo de tensión en la parte inferior del alma. En la sección 2-2 en la figura, donde se presenta el máximo momento negativo, el patín está agrietado y la sección efectiva consiste en la parte achurada del alma (incluido cualquier acero de compresión en la parte inferior del alma) más las varillas de tensión en la parte superior. Finalmente, cerca de los puntos de inflexión, el momento será tan pequeño que la viga probablemente permanecerá sin grietas y por tanto la sección transversal entera es efectiva, como se muestra en la sección 3-3 en la figura. (Para este caso I comúnmente se calcula para el alma solamente y el efecto de los patines no se toma en cuenta, como se muestra en la figura 6.10.)

Del análisis anterior es obvio que para calcular la deflexión en una viga continua, teóricamente es necesario usar un procedimiento de deflexión que tome en cuenta la variación del momento de inercia a lo largo del claro. Tal procedimiento sería muy largo y es dudoso que los resultados así obtenidos se encuentren dentro del $\pm 20\%$ de los valores reales. Por esta razón el código ACI (9.5.2.4) permite el empleo de un momento de inercia constante en todo el miembro, igual al promedio de los valores I_e calculados en las secciones críticas de momentos positivo y negativo. *Los valores I_e en las secciones críticas de momento negativo se promedian y entonces ese resultado se promedia con I_e en la sección crítica de momento positivo.* También debe observarse que los multiplicadores para la deflexión a largo plazo en estas secciones deben promediarse, como se hizo con los valores de I_e.

El ejemplo 6.2 ilustra el cálculo de deflexiones para un miembro continuo. Aunque muchos de los pasos matemáticos repetitivos se omiten en la solución dada aquí, usted puede ver que los cálculos son

todavía muy extensos y usted entenderá por qué comúnmente se usan cálculos aproximados para las deflexiones de claros continuos.

EJEMPLO 6.2

Determinar la deflexión instantánea en el centro del claro de la viga T continua mostrada en la figura 6.7(*a*). El miembro soporta una carga muerta incluyendo su propio peso de 1.5 klb/pie y una carga viva de 2.5 klb/pie. $f'_c = 3\ 000$ lb/plg^2 y $n = 9$. El diagrama de momentos para la carga muerta y la carga viva totales se muestra en la figura 6.7(*b*) y la sección transversal de la viga se muestra en la figura 6.7(*c*).

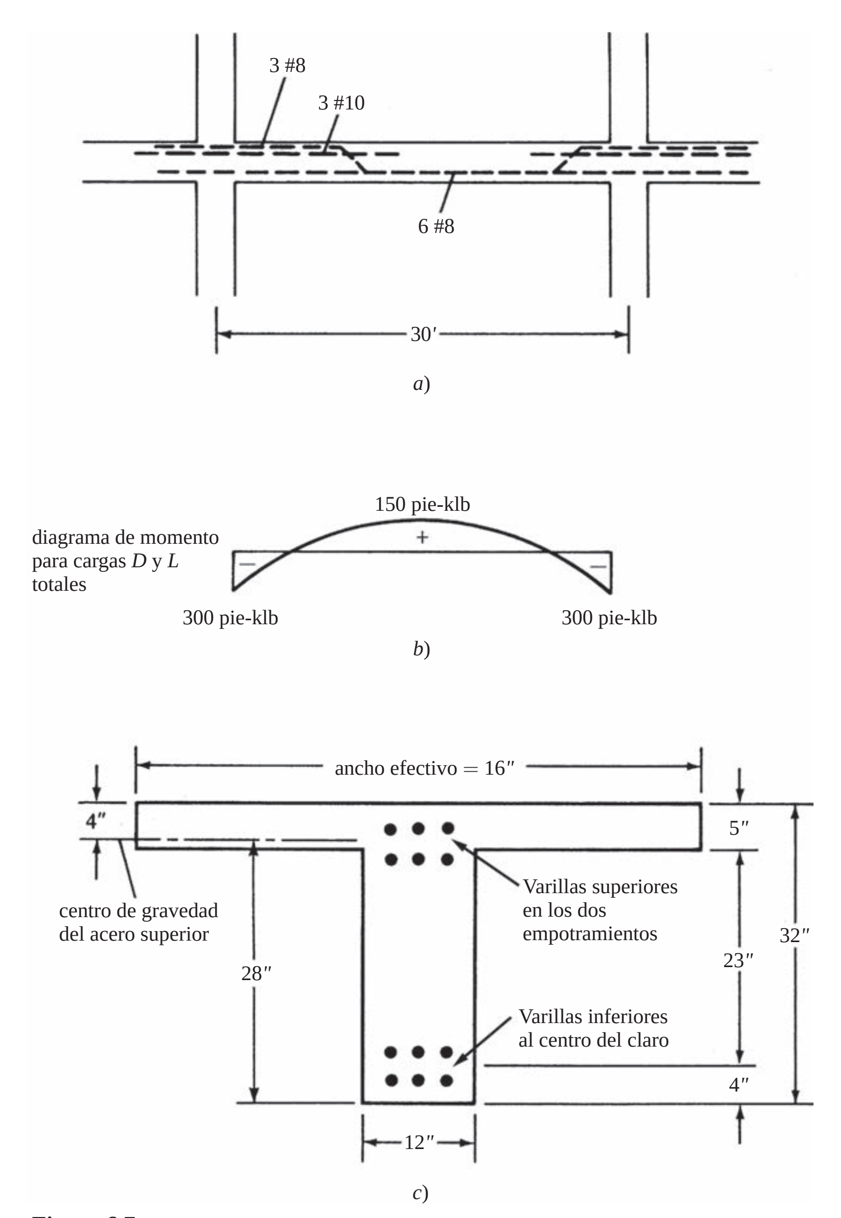


Figura 6.7

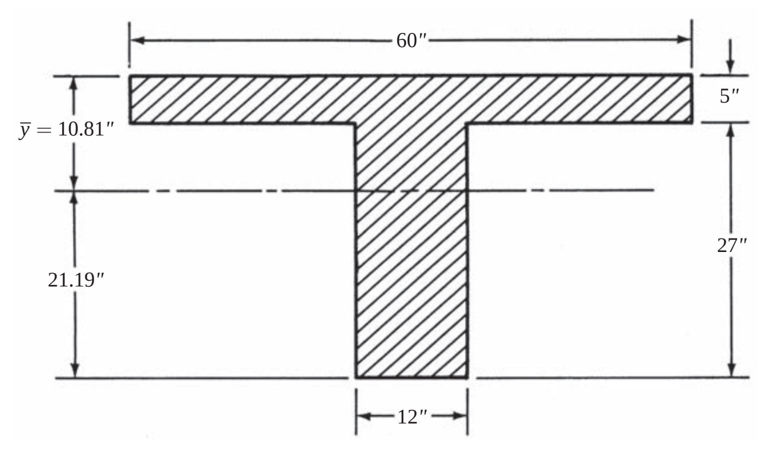


Figura 6.8

SOLUCIÓN **Para la región de momento positivo**

1. Se localiza el eje centroidal para la sección no agrietada y se calculan el momento de inercia total I_g y el momento de agrietamiento M_{cr} para la región de momento positivo (figura 6.8)

$$\bar{y} = 10.81''$$

$$I_g = 60\ 185\ \text{plg}^4$$

$$M_{cr} = \frac{(7.5)(\sqrt{3\ 000})(60\ 185)}{21.19} = 1\ 166\ 754\ \text{plg-lb} = 97.2\ \text{pie-klb}$$

2. Se localiza el eje centroidal de la sección agrietada y se calcula el momento de inercia transformado I_{cr} para la región de momento positivo (figura 6.9)

$$x = 5.65''$$

$$I_{cr} = 24\ 778\ \text{plg}^4$$

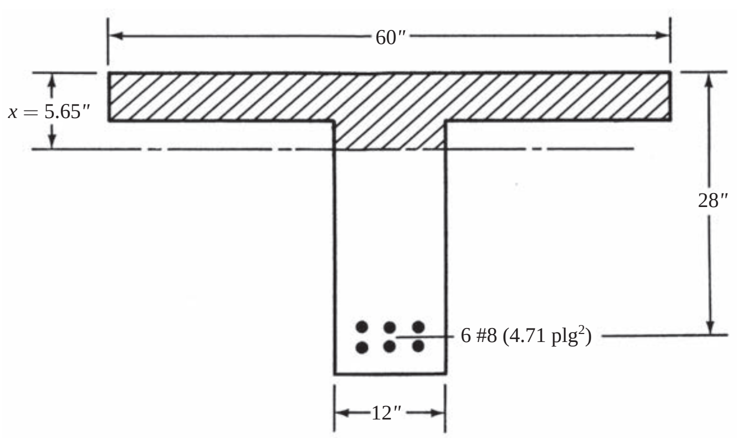


Figura 6.9

3. Se calcula el momento de inercia efectivo en la región de momento positivo

$$M_a = 150 \text{ pie-klb}$$

$$I_e = \left(\frac{97.2}{150}\right)^3 (60\ 185) + \left[1 - \left(\frac{97.2}{150}\right)^3\right] 24\ 778 = 34\ 412 \text{ plg}^4$$

Para la región de momento negativo

1. Se localiza el eje centroidal para la sección sin agrietar y se calcula el momento de inercia total I_g y el momento de agrietamiento M_{cr} para la región de momento negativo, considerando solamente el rectángulo achurado mostrado en la figura 6.10

$$\bar{y} = \left(\tfrac{32}{2}\right) = 16''$$

$$I_g = \left(\tfrac{1}{12}\right)(12)(32)^3 = 32\ 768 \text{ plg}^4$$

$$M_{cr} = \frac{(7.5)\ \sqrt{3\ 000})(32\ 768)}{16} = 841\ 302 \text{ plg-lb} = 70.1 \text{ pie-klb}$$

El código no requiere que el proyectista ignore los patines en tensión para este cálculo. Los autores usaron este método para ser conservadores. Si se consideran los patines en tensión, entonces el momento de agrietamiento se calcula a partir de la sección en la figura 6.8. El valor de $\bar{y}$ se toma con respecto a la parte superior de la sección (10.81”) porque la parte superior está en tensión para el momento negativo, por tanto

$$M_{cr} = \frac{7.5\sqrt{3\ 000}(60\ 185)}{10.81} = 2\ 287\ 096 \text{ plg-lb} = 190.6 \text{ pie-klb}$$

Si se usara este valor más grande para M_{cr} en el paso 3 debajo, el valor de I_e sería 33 400 plg^4.

2. Se localiza el eje centroidal para la sección agrietada y se calcula el momento de inercia transformado I_{tr} para la región de momento negativo (figura 6.11). Véase el ejemplo 2.5 para este tipo de cálculo.

$$x = 10.43''$$

$$I_{cr} = 24\ 147 \text{ plg}^4$$

3. Se calcula el momento de inercia efectivo en la región de momento negativo

$$M_a = 300 \text{ pie-klb}$$

$$I_e = \left(\frac{70.1}{300}\right)^3 (32\ 768) + \left[1 - \left(\frac{70.1}{300}\right)^3\right] 24\ 147 = 24\ 257 \text{ plg}^4$$

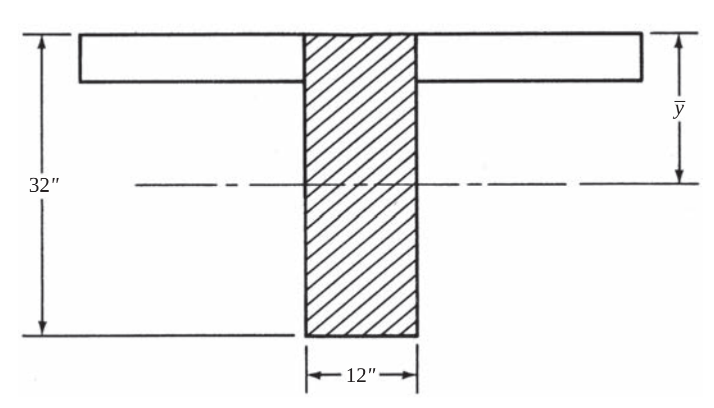


Figura 6.10

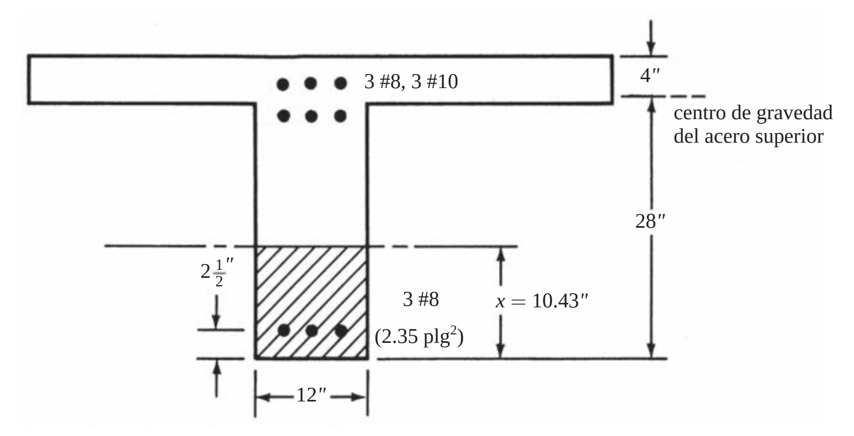


Figura 6.11

Deflexión instantánea

El I_e que debe usarse se obtiene promediando el I_e en la sección de momento positivo, con el promedio de I_e calculado en las secciones de momento negativo en los extremos del claro:

$$I_e \text{ promedio} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{24\,257 + 24\,257}{2}\right) + 34\,412\right] = 29\,334 \text{ plg}^4$$

$$E_c = 57\,000\sqrt{3\,000} = 3.122 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2$$

Usando la ecuación de la figura 6.2(*b*) y usando solamente cargas vivas para calcular deflexiones,

$$\delta_L = \frac{w_L l^4}{384 E_c I_e} = \frac{(2.5)(30)^4}{(384)(3\,122)(29\,334)}(1\,728) = 0.10 \text{ plg}$$

En este caso los autores usaron un método aproximado para calcular δ_L. En lugar de la ecuación complicada ($\delta_L = \delta_{D+L} - \delta_D$) que usamos anteriormente en el ejemplo 6.1(*c*), simplemente usamos w_L como la carga en la ecuación anterior y promediamos a I_e. Esta aproximación ignora la diferencia entre la I_e para carga muerta comparada con I_e para carga muerta y carga viva. Este método da una mayor deflexión, de tal manera que es conservadora. Muchos proyectistas tienen aproximaciones conservadoras que prueban primero en muchos cálculos de ingeniería. Si funcionan, no hay necesidad de desarrollar las más complicadas.

Hemos visto que para claros continuos el código (9.5.2.4) sugiere un promedio de los valores I_e en las secciones de momento crítico positivo y negativo. El Comentario ACI (R9.5.2.4) estipula que para cálculos aproximados de deflexiones en miembros prismáticos continuos es satisfactorio usar las propiedades de la sección en medio del claro para claros simples y continuos y las del empotramiento para vigas en voladizo. Esto se debe a que estas propiedades, que incluyen el efecto del agrietamiento, tienen la máxima influencia en las deflexiones.

El Comité 435 del ACI ha mostrado que pueden obtenerse mejores resultados para las deflexiones en miembros continuos si se usa un I_e que dé mayor peso a los valores en el centro del claro.[6] El comité sugiere el uso de las siguientes expresiones en las cuales I_{em}, I_{e1} e I_{e2} son los momentos de inercia efectivos calculados en el centro del claro y en los dos extremos del claro, respectivamente.

Vigas con dos extremos continuos

$$I_e \text{ promedio} = 0.70 I_{em} = 0.15(I_{e1} + I_{e2})$$

[6]Comité 435 del ACI, 1978, "Proposed Revisions by Committee 435 to ACI Building Code and Commentary Provisions on Deflections", *Journal ACI*, 75(6), págs. 229-238.

Vigas con un extremo continuo

$$I_e \text{ promedio} = 0.85I_{em} + 0.15(I_{\text{extremo continuo}})$$

Para la viga del ejemplo 6.2 con sus dos extremos continuos, el momento de inercia efectivo es

$$I_e \text{ promedio} = (0.70)(34\,412) + (0.15)(24\,257 + 24\,257)$$
$$= 31\,365 \text{ plg}^4$$

6.9 TIPOS DE GRIETAS

En esta sección se presentan algunos comentarios introductorios respecto a los diversos tipos de grietas que ocurren en las vigas de concreto reforzado. El resto de este capítulo tendrá que ver con los anchos estimados de las grietas de flexión y la separación máxima recomendada de las varillas de flexión para controlar las grietas.

Las *grietas de flexión* son grietas verticales que se extienden desde los lados de tensión de las vigas hasta la región de sus ejes neutros, éstas se ilustran en la figura 6.12(*a*). Si las vigas tienen almas muy altas (más de 3 o 4 pies), las grietas tendrán muy poca separación, algunas se juntarán y otras desaparecerán por arriba del refuerzo. Estas grietas pueden ser más anchas hacia el medio peralte de la viga que en la parte inferior.

Las grietas inclinadas debido al esfuerzo cortante pueden desarrollarse en las almas de las vigas de concreto reforzado ya sea como grietas independientes o como extensiones de grietas de flexión. Ocasionalmente, las grietas inclinadas se desarrollarán independientemente en una viga, aun cuando no aparezcan grietas de flexión próximas. Estas grietas, llamadas *grietas por cortante en el alma* y que se ilustran en la figura 6.12(*b*), algunas veces ocurren en las almas de secciones presforzadas, en particular en aquellas con patines anchos y almas delgadas.

El tipo usual de grietas inclinadas por cortante son las *grietas por cortante-flexión* que se ilustran en la figura 6.12(*c*). Comúnmente se desarrollan tanto en vigas presforzadas como en vigas sin presforzar.

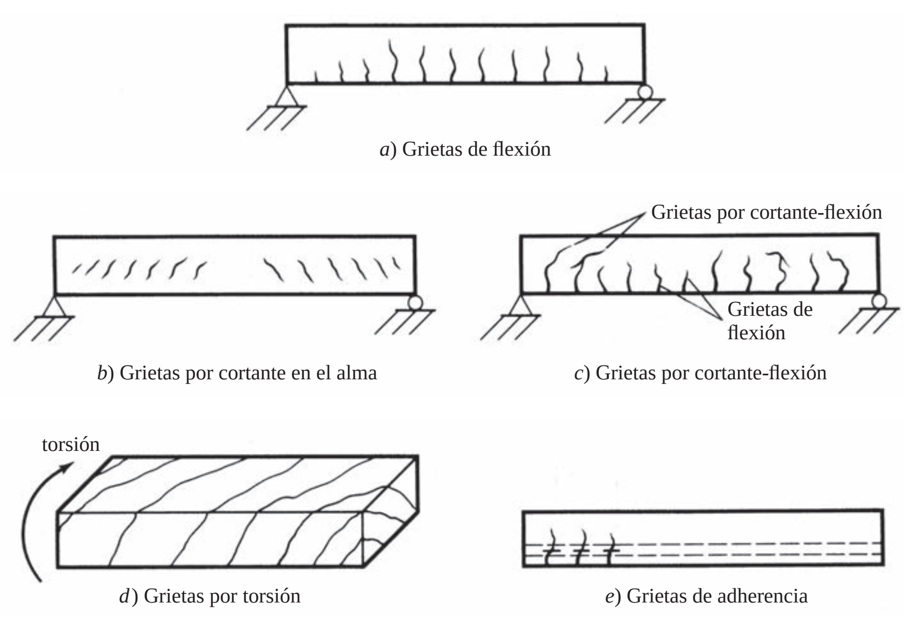


Figura 6.12 Algunos tipos de grietas en miembros de concreto.

Las *grietas de torsión*, ilustradas en la figura 6.12(*d*), son muy similares a las grietas de cortante, excepto que describen trayectorias espirales alrededor de la viga. Si un miembro de concreto simple está sometido a torsión pura, se agrietará y fallará a lo largo de líneas espirales a 45°, debido a la tensión diagonal correspondiente a los esfuerzos de torsión. Puede lograrse una comprobación muy efectiva de este tipo de falla torciendo con los dedos un pedazo de tiza hasta que se rompa. Aunque los esfuerzos de torsión son muy similares a los esfuerzos cortantes, los de torsión se presentan en todas las caras de un miembro. Como consecuencia, éstos se suman a los esfuerzos cortantes en un lado de la viga y se restan de los del otro.

Algunas veces los esfuerzos de adherencia entre el concreto y el refuerzo conducen a hendimientos a lo largo de las varillas, como se muestra en la figura 6.12(*e*).

Por supuesto, hay otros tipos de grietas que no se ilustran aquí. Los miembros cargados en tensión axial formarán grietas transversales a lo largo de todas las secciones transversales. Las grietas también pueden ocurrir en los miembros de concreto debido a la contracción, al cambio de temperatura, a los asentamientos, etc. Existe bastante información relativa al desarrollo de las grietas.[7]

6.10 CONTROL DE LAS GRIETAS POR FLEXIÓN

Las grietas se presentan en las estructuras de concreto reforzado debido a la baja resistencia a la tensión del concreto. En los miembros con bajos esfuerzos en el acero bajo cargas de servicio, las grietas pueden ser muy pequeñas y de hecho no serán visibles excepto mediante una cuidadosa inspección. Tales grietas, llamadas *microgrietas*, se inician generalmente por los esfuerzos de flexión.

Cuando los esfuerzos en el acero son altos bajo carga de servicio, en particular cuando se usan aceros de alta resistencia, se formarán grietas visibles. Estas grietas deben limitarse a ciertos tamaños máximos, de modo que no se dañe la apariencia de la estructura y que no se haga presente la corrosión en las varillas de refuerzo. Con el uso de varillas de alta resistencia y el método de diseño por resistencia, el control de las grietas se ha convertido en un aspecto muy importante del diseño. Como los esfuerzos de fluencia de las varillas de refuerzo en uso general se han incrementado de 40 klb/plg^2 a 60 klb/plg^2 y aun a valores mayores, es bastante natural que los proyectistas especifiquen aproximadamente el mismo tamaño de las varillas a las que están acostumbrados, sólo que en menor número. El resultado ha sido un agrietamiento más severo de los miembros.

Aunque las grietas no pueden eliminarse, se pueden limitar a tamaños aceptables mediante la distribución del refuerzo. En otras palabras, se tendrán grietas más pequeñas si se usan varias varillas pequeñas con espaciamientos moderados en vez de unas cuantas varillas grandes con grandes separaciones. Tal manera de proceder conduce usualmente a resultados satisfactorios en el control de las grietas, aun para varillas de los grados 60 y 75. Una excelente regla empírica relativa al agrietamiento es "*no use una separación entre varillas mayor que aproximadamente 9 plg*".

Los anchos máximos de grietas que se consideran aceptables varían de aproximadamente 0.004 a 0.016 plg, dependiendo de la ubicación del miembro en cuestión, del tipo de estructura, de la textura superficial del concreto, de la iluminación y de otros factores. Se pueden requerir valores algo más pequeños en los miembros expuestos a ambientes muy agresivos, tales como productos químicos anticongelantes y rociado de agua salada de mar.

En un reporte sobre agrietamiento[8] del Comité 224 del ACI, se presentó un conjunto de anchos máximos aproximados permisibles de grietas para miembros de concreto reforzado sometidos a diferentes condiciones de exposición. Estos valores están resumidos en la tabla 6.3.

---

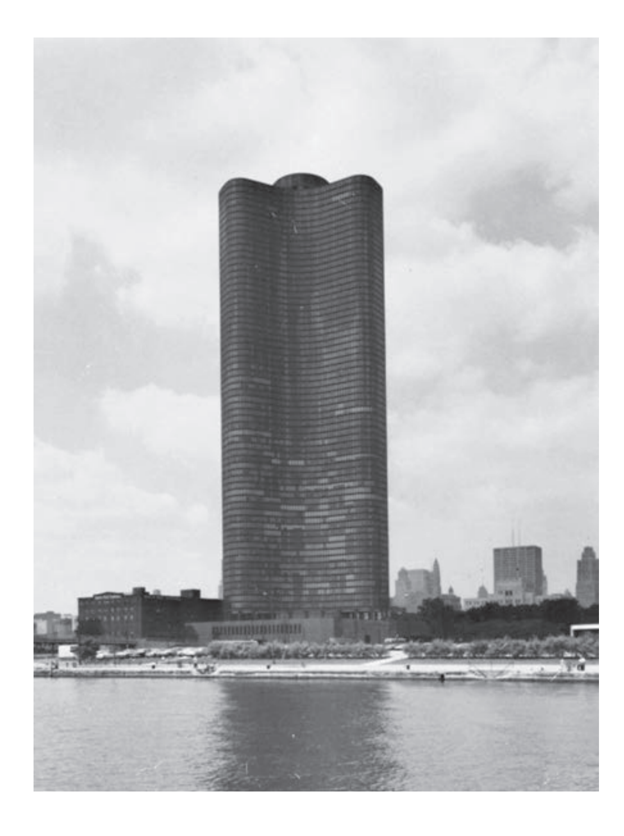
[7]MacGregor, J.G., 2005, *Reinforced Concrete Mechanics and Design*, 4a. ed. (Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall), págs. 393-401.
[8]Comité 224 del ACI, 1972, "Control of Cracking in Concrete Structures", *Journal ACI*, 69(12), págs. 717-753.

Tabla 6.3 Anchos permisibles de grietas

Miembros sometidos a	Anchos permisibles de grietas	
	(plg)	(mm)
Aire seco	0.016	0.41
Aire húmedo, suelo	0.012	0.30
Productos químicos descongelantes	0.007	0.18
Agua de mar y aspersión de agua de mar	0.006	0.15
Uso en estructuras que retienen agua	0.004	0.10

No se dispone de datos definitivos en lo que se refiere a los tamaños de grietas por encima de las cuales la corrosión en las varillas resulta particularmente grave. De hecho, las pruebas parecen indicar que la calidad del concreto, el espesor del recubrimiento, la cantidad de vibrado del concreto y otras variables pueden ser más importantes que el tamaño de las grietas en lo que se refiere a la corrosión.

Los resultados de las pruebas de laboratorio en las vigas de concreto reforzado para determinar las dimensiones de las grietas son variables. En las dimensiones influyen mucho la contracción y otros factores temporales. El propósito de los cálculos de control de grietas no es realmente limitar su tamaño a ciertos valores máximos rígidos, sino más bien utilizar los detalles razonables de las varillas, basándose en las experiencias de campo y de laboratorio, para poder controlar las grietas dentro de ciertos límites razonables.



Torre Lake Point, Chicago, Illinois.
(Cortesía de Portland Cement Association.)

En 1968 se desarrolló la siguiente ecuación con objeto de estimar los anchos máximos de las grietas que se presentan en las caras de tensión de miembros sometidos a la flexión.[9] Es meramente una ecuación simplificada que sólo toma en cuenta algunas de las muchas variables que influyen en el tamaño de las grietas.

$$w = 0.076\beta_h f_s \sqrt[3]{d_c A}$$

En donde $w =$ ancho estimado de la grieta en milésimas de pulgada.

$\beta_h =$ relación de la distancia al eje neutro desde la fibra extrema a tensión del concreto a la distancia del eje neutro al centroide del acero de tensión (valores por determinar por el método de los esfuerzos de trabajo).

$f_s =$ esfuerzo en el acero, en klb/plg^2 bajo carga de servicio (el proyectista puede usar $0.6f_y$ en estructuras normales).

$d_c =$ *re*cubrimiento de la varilla situada más al exterior, medido desde la fibra extrema de tensión al centro de la varilla o alambre más próximos. (Para un racimo de varillas, d_c se mide al centro de gravedad del racimo.)

$A =$ área efectiva a tensión del concreto alrededor del refuerzo principal (su centroide es el mismo que el del refuerzo) dividida entre el número de varillas

A esta expresión se le llama ecuación de Gergely-Lutz en honor de quienes la desarrollaron. Al aplicarla a vigas, generalmente se obtienen resultados razonables si β_h se toma igual a 1.20. Sin embargo, para losas delgadas en una dirección, se obtienen valores más realistas si β_h se toma igual a 1.35.

El número de varillas de refuerzo presentes en un miembro particular decididamente afecta el valor de A por usarse en la ecuación, así como el ancho calculado de la grieta. Si se usan varillas cada vez más pequeñas para proporcionar el área necesaria, el valor de A será menor, así como los anchos estimados de las grietas.

Si todas las varillas en un grupo particular no son del mismo tamaño, su número (por usarse en la ecuación) debe considerarse igual al área total de acero de refuerzo en el grupo dividida por el área de la varilla de mayor tamaño usada.

El ejemplo 6.3 ilustra la determinación de los anchos estimados de las grietas que ocurren en una viga rectangular reforzada en tensión.

EJEMPLO 6.3

Suponiendo $\beta_h = 1.20$ y $f_y = 60$ klb/plg^2, calcule el ancho estimado de las grietas de flexión que se presentarán en la viga de la figura 6.13. Si la viga va a estar expuesta a aire húmedo, ¿es satisfactorio este ancho en comparación con los valores dados en la tabla 6.3 de este capítulo? Si las grietas resultan muy anchas, revise el diseño del refuerzo y recalcule el ancho de las grietas.

SOLUCIÓN **Sustituyendo en la ecuación de Gergely-Lutz**

$$w = (0.076)(1.20)(0.6 \times 60)\sqrt[3]{(3)\left(\frac{6 \times 16}{3}\right)}$$

$$= \frac{15.03}{1\,000} = 0.015 \text{ plg} > 0.012 \text{ plg} \qquad \underline{\underline{\text{No sirve}}}$$

[9]Gergely, P. y Lutz, L.A., 1968, "Maximum Crack Width in Reinforced Flexural Members", *Causes, Mechanisms and Control of Cracking in Concrete*, SP-20 (Detroit: American Concrete Institute), págs. 87-117.

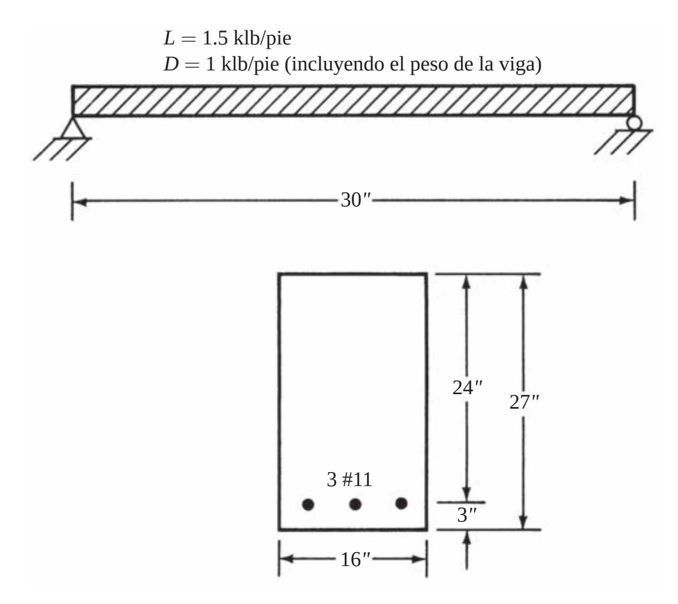


Figura 6.13

Remplace las tres varillas del #11 (4.68 plg^2) con cinco varillas del #9 (5.00 plg^2)

$$w = (0.076)(1.20)(0.6 \times 60)\sqrt[3]{(3)\left(\frac{6 \times 16}{5}\right)} = \frac{12.68}{1\,000} = 0.0127 \text{ plg} > 0.012 \text{ plg} \qquad \underline{\underline{\text{No sirve}}}$$

Ensaye seis varillas del #8 (4.71 plg^2)

$$w = (0.076)(1.20)(0.6 \times 60)\sqrt[3]{(3)\left(\frac{6 \times 16}{6}\right)} = \frac{11.93}{1\,000} = 0.0119 \text{ plg} < 0.012 \text{ plg} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Use 6 varillas del #8

Si los miembros de concreto reforzado se prueban en condiciones cuidadosamente controladas en un laboratorio y se miden las grietas para ciertas cargas, se tendrá una variación considerable en los tamaños de las grietas. Consecuentemente, los cálculos de los anchos de las grietas descritos en este capítulo sólo deberán usarse para ayudar al proyectista a seleccionar buenos detalles para las varillas de refuerzo. Es evidente que los cálculos no son lo suficientemente precisos para una comparación con los tamaños de las grietas en campo.

El esfuerzo de adherencia entre el concreto y el acero de refuerzo decididamente afecta los tamaños y los espaciamientos de las grietas en el concreto. Cuando se usan varillas en racimo, hay sensiblemente menos contacto entre el concreto y el acero en comparación con los casos donde las varillas se colocan separadamente unas de otras. Para estimar con éxito los anchos de las grietas con la ecuación de Gergely-Lutz cuando se usan varillas en racimo, hay que tener en cuenta esta superficie de contacto reducida.[10]

Cuando se tienen varillas en racimo, algunos proyectistas usan un procedimiento muy conservador al calcular el valor de *A*. Para este cálculo ellos suponen que cada racimo es una varilla que tiene un área igual al área total de las varillas en ese racimo. Ciertamente, las propiedades de adherencia de un grupo de varillas en racimo son mejores que las de una sola "varilla equivalente" grande.

---

[10]Nawy, E G., 2005, *Reinforced Concrete: A Fundamental Approach*, 5a. ed. (Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall), págs. 301-303.

Debe darse atención especial al control de grietas en vigas doblemente reforzadas, donde es común usar números pequeño de varillas de tensión de diámetro grande. El cálculo de anchos de grietas para tales vigas puede dar como resultado valores más bien grandes, requiriéndose así el uso de un mayor número de varillas pequeñas con poco espaciamiento entre ellas.

En la sección 10.6.6 del ACI se dan reglas especiales para los espaciamientos del refuerzo para ayudar a controlar la cantidad de agrietamiento en vigas T cuyos patines están en tensión.

6.11 NORMAS DEL CÓDIGO ACI RELATIVAS A GRIETAS

En el código ACI, secciones 10.6.3 y 10.6.4 se requiere que el refuerzo de tensión por flexión esté bien distribuido dentro de las zonas de tensión máxima, de manera que la separación centro a centro del refuerzo más cercano a una superficie de tensión no sea mayor que el valor calculado con la siguiente expresión:

$$s = (15)\left(\frac{40\,000}{f_s}\right) - 2.5c_c \leq (12)\left(\frac{40\,000}{f_s}\right) \qquad \text{(Ecuación 10-4 ACI)}$$

En esta expresión f_s es el esfuerzo de tensión calculado bajo carga de trabajo. Puede calcularse dividiendo el momento flexionante no factorizado entre el brazo del momento interno de la viga (véase el ejemplo 2.2) o simplemente puede tomarse igual a $0.6f_y$. El término c_c representa el recubrimiento libre de la superficie más cercana en tensión a la superficie del refuerzo en tensión en pulgadas.

Para vigas con refuerzo Grado 60 y con 2 plg de recubrimiento libre, la separación máxima entre varillas permitida por el código es

$$s = (15)\left(\frac{40\,000}{0.6 \times 60\,000}\right) - (2.5)(2) = 11.67 \text{ plg} < (12)\left(\frac{40\,000}{0.6 \times 60\,000}\right) = 13.33 \text{ plg}$$

Se requeriría un espaciamiento de las varillas no mayor que 11.67 plg. Este límite puede controlar el espaciamiento de las varillas en losas de una sola dirección, pero probablemente no controle el espaciamiento de las varillas en la viga.

Se considera que estas normas del ACI para separación máxima entre varillas son bastante razonables para losas en una dirección y para vigas con almas anchas. Para vigas con anchos normales de almas usadas en edificios ordinarios, se considera que estimar los anchos de grietas con la ecuación de Gergely-Lutz y comparar los resultados con los valores dados en la tabla 6.3 pueden ser un procedimiento más razonable.[11]

La ecuación del ACI para separación máxima no es aplicable a vigas con exposición extrema o a estructuras que deben ser impermeables al agua. Atención especial debe darse a tales situaciones. Es probablemente correcto usar la ecuación de Gergely-Lutz y un conjunto de anchos máximos de grietas como los de la tabla 6.3 para tales situaciones.

El efecto de las grietas y sus anchos sobre la corrosión del refuerzo no está aún claramente comprendido. No parece haber una relación directa entre ancho de grietas y la corrosión, por lo menos bajo los esfuerzos del refuerzo que ocurren cuando los miembros están sometidos a cargas de servicio. Así, el código 2005 del ACI no distingue entre exposición interior y exterior como lo hacía el código de 1995. La investigación actual parece indicar que la corrosión total que ocurre en el refuerzo es independiente de los anchos de las grietas. Es cierto, sin embargo, que el tiempo requerido para que empiece a manifestarse la corrosión en el refuerzo está inversamente relacionado con los anchos de las grietas.

[11] Nawy, 2005, *Reinforced Concrete*, pág. 303.

Al usar la expresión del ancho de grieta de Gergely-Lutz en unidades SI, la ecuación es $w = 0.0113\beta_h f_s \sqrt[3]{d_c A}$, con los anchos resultantes de grieta en mm.

Se da aquí la versión SI del código ACI para la separación máxima entre varillas a tensión desde el punto de vista del ancho de las grietas. Para usar esta expresión correctamente, s y c_c deben usarse en mm y f_s debe estar en MPa.

$$s = (380)\left(\frac{280}{f_s}\right) - 2.5c_c \leq (300)\left(\frac{280}{f_s}\right)$$

6.12 GRIETAS DIVERSAS

El proyectista principiante aprenderá que es aconsejable incluir unas cuantas varillas de refuerzo en ciertos lugares en algunas estructuras, aun cuando parezca no haber una necesidad teórica para ellas. En ciertos lugares de algunas estructuras (como en contrafuertes, muros de contención, muros de edificios cerca de aberturas, etc.), aparecerán grietas. El joven diseñador debe tratar de aprender de tales situaciones de gente más experimentada. Resultarán así mejores estructuras.

6.13 EJEMPLO CON UNIDADES SI

EJEMPLO 6.4

¿Está la separación de las varillas mostradas en la figura 6.14 dentro de los requisitos del código ACI desde el punto de vista del agrietamiento si $f_y = 420$ MPa?

SOLUCIÓN Para $f_y = 420$ MPa y $c_c = 75 - \frac{28.7}{2} = 60.65$ mm,

$$s = (380)\left(\frac{280}{0.6 \times 420}\right) - (2.5)(60.65) = 271 \text{ mm} < (300)\left(\frac{280}{0.6 \times 420}\right) = 333 \text{ mm}$$

Como la separación real de las varillas de 75 mm es menor que 271 mm, esta separación es aceptable.

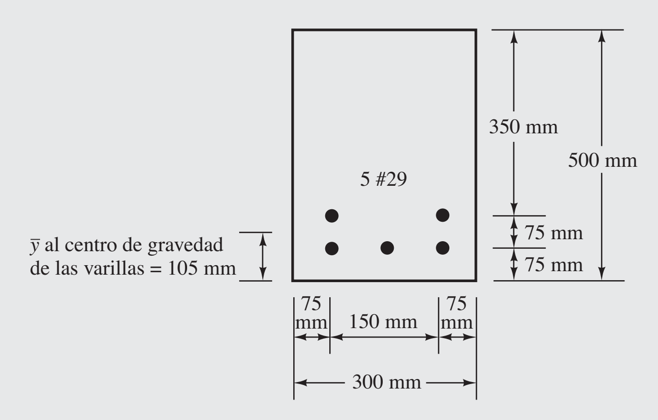


Figura 6.14

6.14 EJEMPLOS CON COMPUTADORA

EJEMPLO 6.5

Repita el ejemplo 6.1 usando la hoja de cálculo Excel en el capítulo 6.

Calculador de deflexión para una viga rectangular simplemente apoyada, uniformemente cargada

	$b =$	12	plg
	$d =$	17	plg
	$h =$	20	plg
	$A_s =$	3.00	plg^2
	$A_s' =$	0.00	plg^2
	$f_c' =$	3	klb/plg^2
	$f_y =$	60	klb/plg^2
	$\gamma_c =$	145	lb/pie^3
	$\lambda =$	1	
	$\xi =$ (de la tabla 6.2 o de la figura 6.4)	2.0	
	$w_D =$	1 000	libra por pie lineal
	$w_L =$	700	libra por pie lineal
	$\ell =$	20	pie
	Deflexión límite (denominador de la tabla 6.1)	180	
	% sustentado de carga viva	30	%
	$E_c =$	3156	klb/plg^2
	$n = E_s/E_c$	9.189	9
	$\rho =$	0.015	
	$n\rho =$	0.132	
	$k =$	0.399	
	$x =$	6.78	plg
	$I_{cr} =$	4 067	plg^4
	$I_g =$	8 000	plg^4
	$f_r =$	4 10.8	lb/plg^2
	$M_{cr} =$	27.4	klb-pie

Carga muerta + carga viva totales			
	$M_{a,D+L} =$	85	klb-pie
	$(M_{cr}/M_{a,D+L})^3 =$	0.0334	
	$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] I_{cr} =$	4 198.3	plg^4
	$\delta_{D+L} =$	0.462	plg
Carga muerta solamente			
	$M_{a,D} =$	50	klb-pie
	$(M_{cr}/M_{a,D})^3$	0.1643	
	$I_e =$	4 713.1	plg^4
	$\delta_D =$	0.242	plg
Carga viva solamente			
	$\delta_L = \delta_{D+L} - \delta_D =$	0.220	plg
δ* inicial a partir de D + %*L			
	$M_{a,D+\%L} =$	60.5	
	$(M_{cr}/M_{a,D+\%L})^3$	0.0928	
	$I_e =$	4 431.6	plg^4
	$\delta_{D+\%L} =$	0.311	plg
δ* inicial solamente a partir de %*L			
	$\delta_{\%L} = (\delta_D + \delta_{\%L}) - \delta_D =$	0.069	plg
***δ* a largo plazo para *D* + *L* permanente a largo plazo**			
	$\rho' =$	0	
	$\lambda_\Delta = \xi/(1+\rho')$	2	
	$\delta_{LT} = d_L + \lambda_\Delta \delta_D + \lambda_\Delta \delta_{\%L} =$	0.843	plg
	$\delta_{\text{límite}} =$	1.3333333	plg
	La deflexión cumple con la tabla 6.1		

PROBLEMAS

6.1 ¿Qué factores hacen difícil estimar exactamente la magnitud de las deflexiones en miembros de concreto reforzado?

6.2 ¿Por qué las deflexiones en miembros de concreto aumentan con el paso del tiempo?

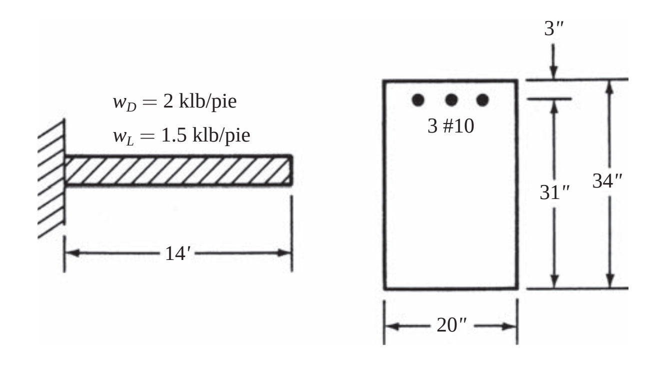
6.3 ¿Cómo pueden limitarse las deflexiones en vigas de concreto?

6.4 ¿Por qué es necesario limitar el ancho de las grietas en miembros de concreto reforzado? ¿Cómo puede hacerse esto?

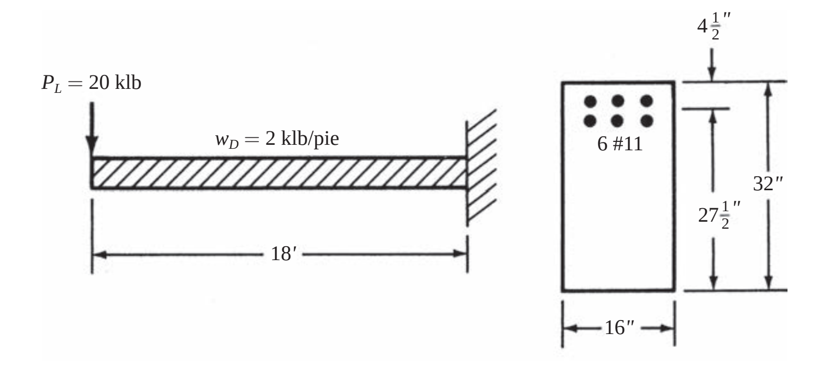
Deflexiones

En los problemas 6.5 a 6.10, calcule las deflexiones instantáneas para las cargas muertas y vivas mostradas. Use $f_y = 60\,000$ lb/plg^2, $f_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $n = 8$. Los pesos de las vigas están incluidos en los valores *de* w_D.

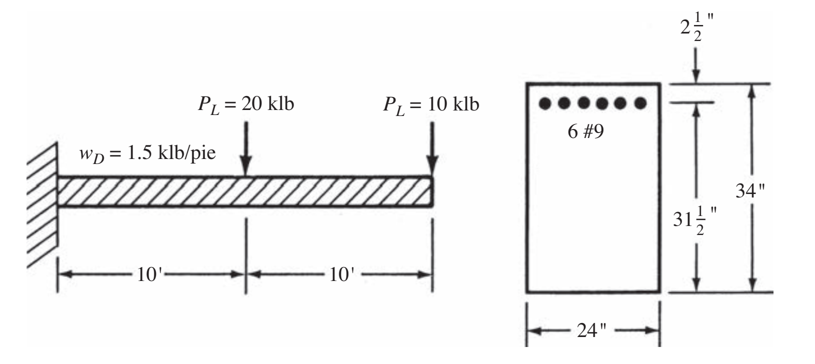
Problema 6.5 (*Resp.* 0.418 plg.)



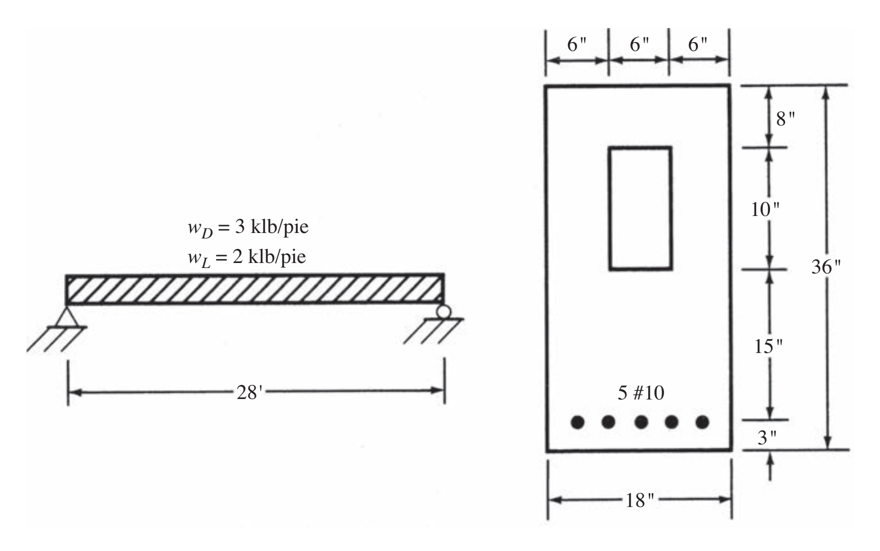
Problema 6.6



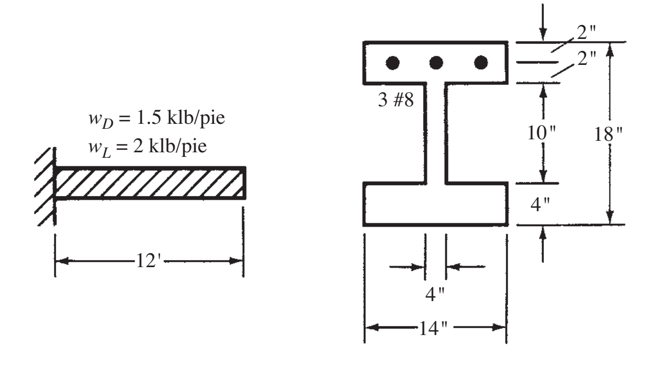
Problema 6.7 (*Resp.* 1.14 plg.)



Problema 6.8



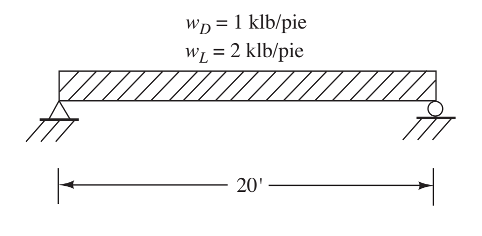
Problema 6.9 (*Resp.* 1.54 plg.)

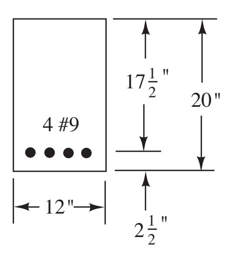


Problema 6.10 Repita el problema 6.8 con una carga viva concentrada adicional de 25 klb en el centro del claro ℄.

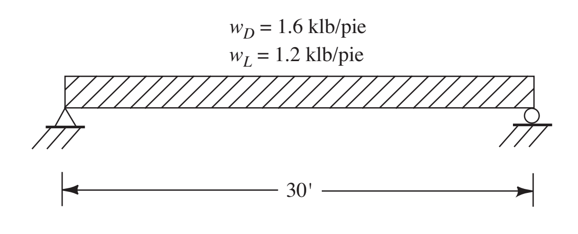
En los problemas 6.11 y 6.12, calcule las deflexiones instantáneas y las deflexiones a largo plazo después de 4 años, suponiendo que 30% de las cargas vivas están continuamente aplicadas durante 48 meses. $f_y = 60\,000$ lb/plg^2; $f'_c = 400$ lb/plg^2, $n = 8$.

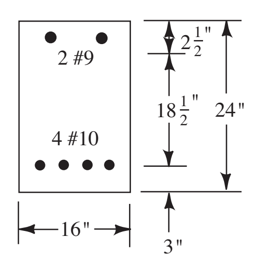
Problema 6.11 (*Resp.* δ instantánea para $w_D + w_L$ total $= 0.610$ plg, a largo plazo $\delta = 1.043$ plg.)





Problema 6.12

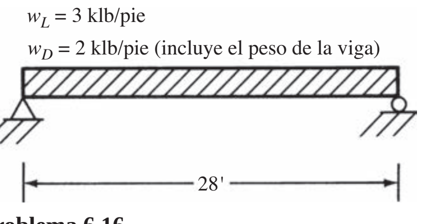




6.13 Repita el problema 6.12 sin las dos varillas de compresión del #9 de la parte superior. (*Resp.* δ instantánea para $D + L$ total $=$ 1.47 plg:, δ a largo plazo $= 2.66$ plg.)

6.14 Repita el problema 6.12 usando concreto aligerado con arena ($\gamma_c = 125$ lb/pie^3).

6.15 Repita el problema 6.13 usando concreto ligero ($\gamma_c = 100$ lb/pie^3). (*Resp.* δ instantánea para $w_D + w_L$ total $= 1.76$ plg, γ a largo plazo $= 3.18$ plg.)



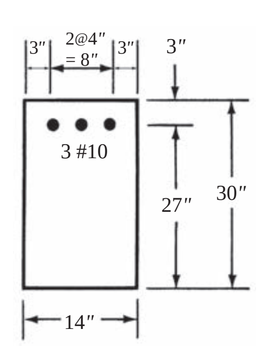
Problema 6.16

Ancho de grietas

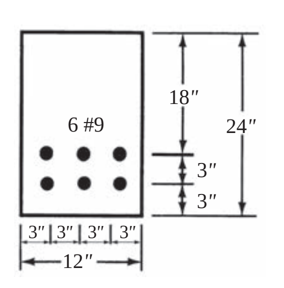
6.16 Seleccione una sección rectangular de viga para el claro y las cargas dados en la figura acompañante. Use $\rho = \frac{1}{2}\rho_b$, varillas del #9, $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2. Calcule los anchos de grietas máximos estimados usando la ecuación de Gergely-Lutz. ¿Son menores que el valor máximo sugerido en la tabla 6.3 para aire seco?

En los problemas 6.17 y 6.18 estime los anchos máximos de grietas con la ecuación de Gergely-Lutz. Compare los resultados con los máximos sugeridos dados en la tabla 6.3. Suponga $f_y = 60$ klb/plg^2 y $\beta_h = 1.20$. Calcule también las separaciones máximas permisibles entre varillas según la ecuación 10.4 del ACI. Suponga condiciones de aire húmedo.

Problema 6.17 (*Resp*. 0.0144 > 0.012 plg; separación máxima del ACI = 10.75 plg.)

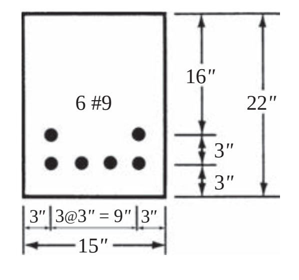


Problema 6.18

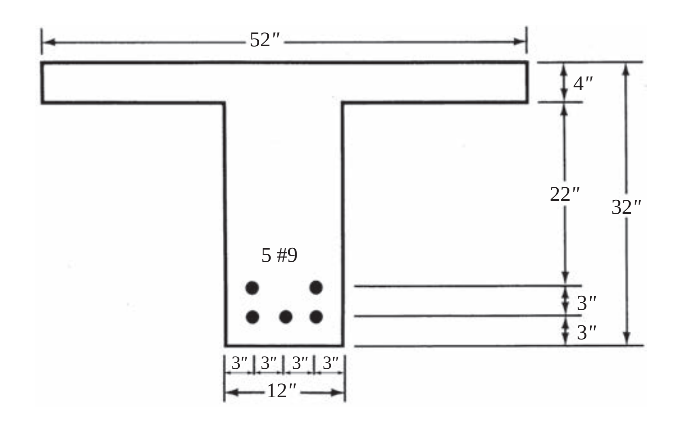


Problemas 6.19, 6.20 y 6.21. Las mismas preguntas que en los problemas 6.17 y 6.18, pero suponga una exposición al interior.

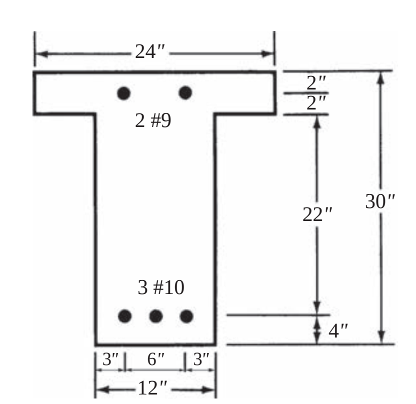
Problema 6.19 (*Resp*. 0.0129 plg < 0.016 plg; separación máxima del ACI = 10.93 plg.)



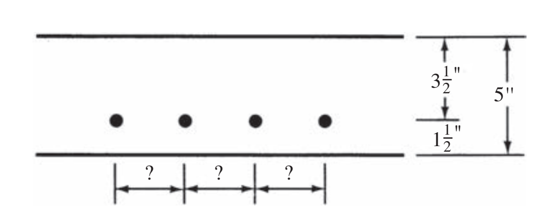
Problema 6.20



Problema 6.21 (*Resp.* 0.0165 > 0.016 plg; 8.25 plg.)



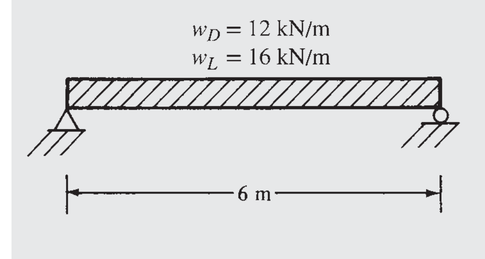
Problema 6.22 ¿Cuál es la separación máxima permisible para varillas del #5 en la losa en una dirección mostrada que satisface los requisitos de agrietamiento del código ACI? f_y = 60 000 lb/plg^2.

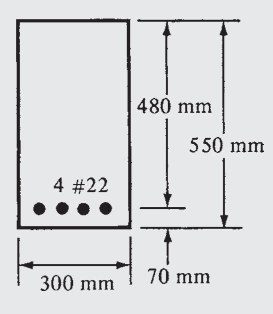


Problemas en unidades SI

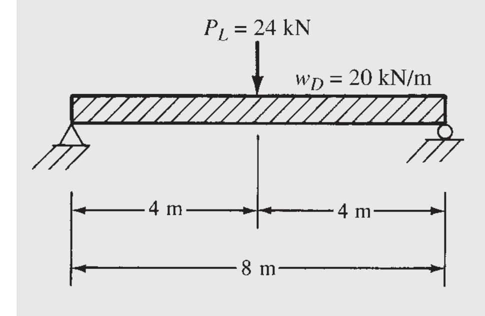
En los problemas 6.23 a 6.25 calcule las deflexiones instantáneas. Use concreto de peso normal con $f_c' = 28$ Mpa, $f_y = 420$ Mpa. Suponga que los valores de w_D mostrados incluyen los pesos de las vigas. $E_s = 200\,000$ MPa.

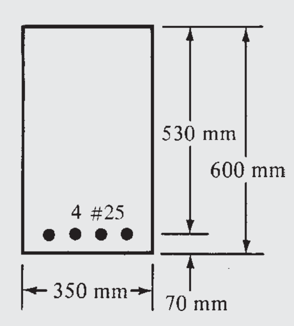
Problema 6.23 (*Resp*. 9.88 mm.)



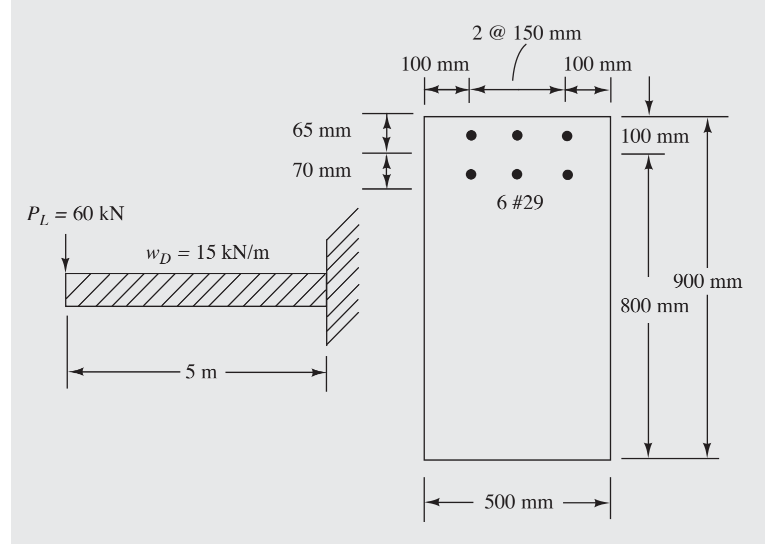


Problema 6.24





Problema 6.25 (*Resp*. 10.22 mm.)



Problemas 6.26 y 6.27 ¿Estas vigas satisfacen los requisitos de separación máxima del código ACI si $f_y = 420$ MPa?

Problema 6.26 La viga del problema 6.21.

Problema 6.27 La viga del problema 6.25 ($s = 275$ mm).

Problema 6.28 Resuelva el problema 6.17 usando la hoja de cálculo Excel en el capítulo 6.

7

Adherencia, longitudes de desarrollo y empalmes

7.1 CORTE Y DOBLADO DE LAS VARILLAS (BARRAS) DE REFUERZO

Las vigas diseñadas hasta ahora se seleccionaron con base en los momentos máximos. Estos momentos se han presentado en o cerca del centro del claro para los momentos positivos y en las caras de los apoyos para los momentos negativos. En otros puntos de las vigas, los momentos fueron menores. Aunque es posible variar los peraltes de las vigas en cierta proporción a los momentos flexionantes, normalmente es más económico usar secciones prismáticas y reducir o cortar algo del refuerzo donde los momentos flexionantes son lo suficientemente pequeños. El acero de refuerzo es bastante caro y cortarlo donde es posible hacerlo puede reducir en forma apreciable los costos.

Si el momento flexionante disminuye a 50% de su máximo, aproximadamente 50% de las varillas puede cortarse o quizá doblarse hacia arriba o hacia abajo hasta la otra cara de la viga, para hacerlas continuas con el refuerzo en la otra cara. En este análisis, se considera la viga simplemente apoyada con carga uniforme de la figura 7.1. Esta viga tiene seis varillas y se quieren cortar dos de ellas cuando el momento decrece un tercio y dos varillas más cuando el momento disminuye otro tercio. En este análisis, el momento máximo se divide en tres partes iguales por medio de las líneas horizontales mostradas. Si el diagrama de momentos se dibuja a escala, es satisfactorio un método gráfico para encontrar los puntos teóricos de corte.

Para el diagrama parabólico de momentos de la figura 7.1, se pueden escribir las siguientes expresiones y despejar las longitudes de las varillas x_1 y x_2 mostradas en la figura:

$$\frac{x_1^2}{(\ell/2)^2} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{x_2^2}{(\ell/2)^2} = \frac{4}{6}$$

Para diagramas de momentos de forma diferente, tendrán que escribirse otras expresiones matemáticas o bien usar un método gráfico.

En realidad, la capacidad por momento último de diseño:

$$\phi M_n = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right)$$

no varía exactamente en proporción con el área de las varillas de refuerzo como se ilustra en el ejemplo 7.1, debido a variaciones en la altura del bloque de compresión conforme cambia el área de acero. Sin

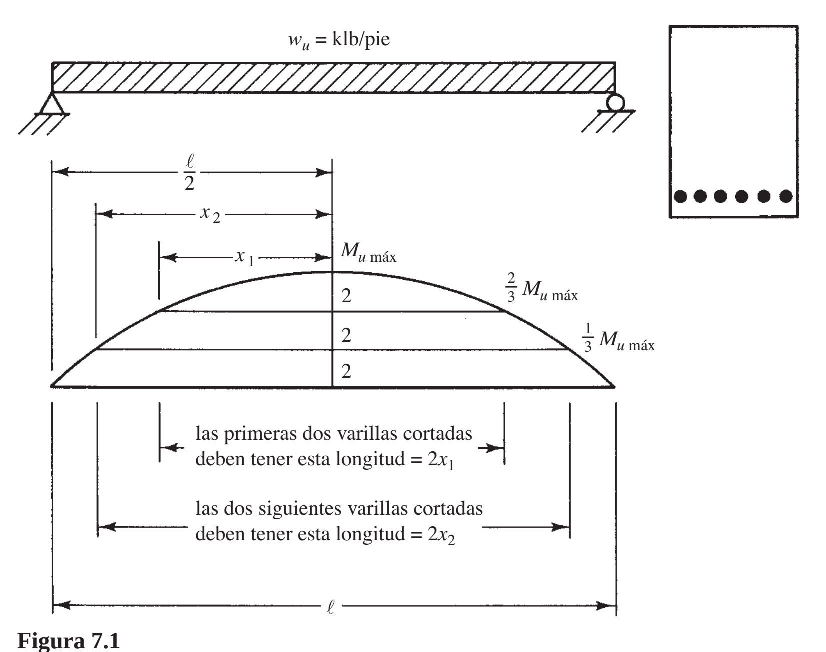


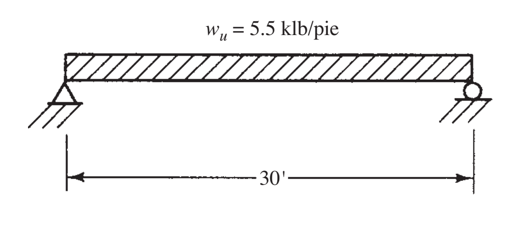
Figura 7.1

embargo, el cambio es tan pequeño, que para todos los propósitos prácticos la capacidad por momento de una viga puede suponerse directamente proporcional al área de acero.

Se mostrará en este capítulo que las capacidades por momento, calculadas como se ilustra en este problema de ejemplo, tendrán que reducirse si no son provistas las suficientes longitudes más allá de los puntos teóricos de corte para que las varillas desarrollen sus esfuerzos plenos.

EJEMPLO 7.1

Para la viga con carga uniforme simplemente apoyada que se muestra en la figura 7.2, determine los puntos teóricos de corte en cada extremo de la viga donde pueden cortarse dos varillas y luego determine los puntos donde dos varillas más pueden cortarse. $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2, $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.



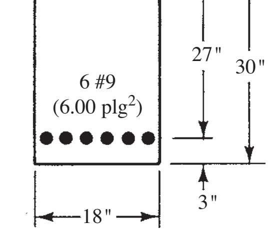


Figura 7.2

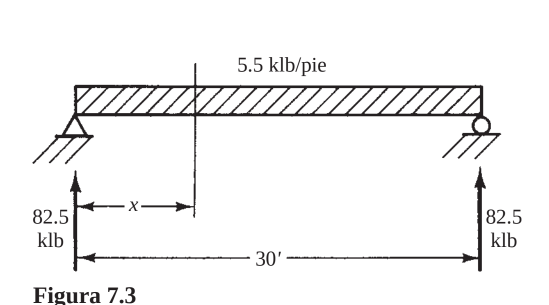


Figura 7.3

231 pie-klb
439 pie-klb
623 pie-klb
439 pie-klb
231 pie-klb
Todas las 6 varillas de 16.16′
4 varillas de 23.75′

Figura 7.4 Diagrama ϕM_n para la viga en la figura 7.2.

SOLUCIÓN Cuando la viga tiene sólo cuatro varillas,

$$a = \frac{(4.00)(60)}{(0.85)(3)(18)} = 5.23''$$

$$\phi M_n = (0.9)(4.00)(60)\left(27 - \frac{5.23}{2}\right) = 5\,267 \text{ plg-klb} = 439 \text{ pie-klb}$$

Cuando el momento disminuye a 439 pie-klb, teóricamente pueden cortarse dos de las seis varillas.

Cuando la viga tiene sólo dos varillas,

$$a = \frac{(2.00)(60)}{(0.85)(3)(18)} = 2.61''$$

$$\phi M_n = (0.9)(2.00)(60)\left(27 - \frac{2.61}{2}\right) = 2\,775 \text{ plg-klb} = 231 \text{ pie-klb}$$

Cuando el momento disminuye a 231 pie-klb, teóricamente pueden cortarse dos varillas más dejando dos varillas en la viga.

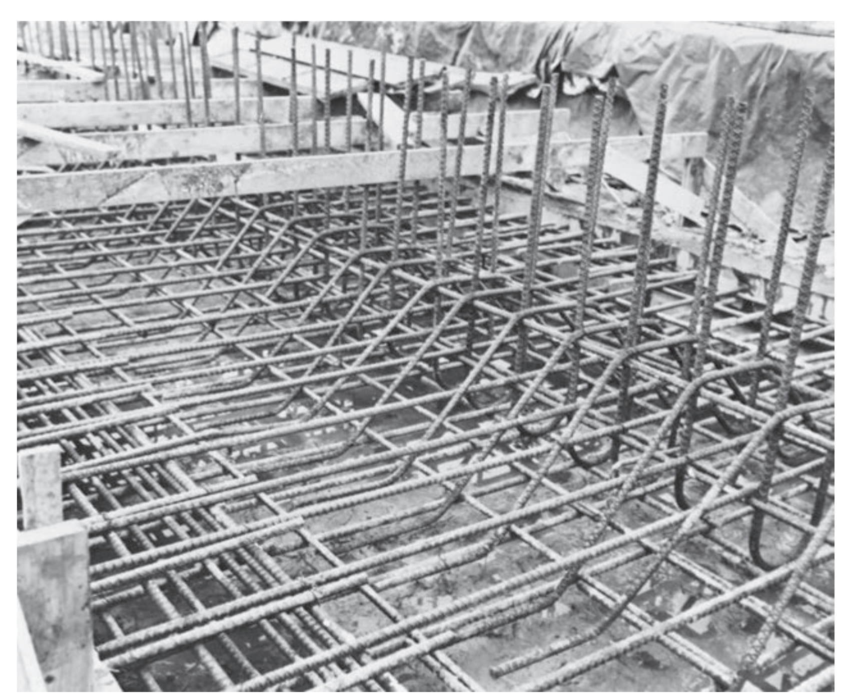
(Observe que ρ con 6 varillas $\frac{6.00}{(18)(27)} = 0.0123$, que es menor que $\rho_{\text{máx}} = 0.0136$ de la tabla A.7 del apéndice. También, esta ρ es $> \rho_{\text{mín}}$ de $\frac{200}{60\,000} = 0.00333$.)

El momento en cualquier sección de la viga a una distancia x del apoyo izquierdo es como sigue, haciendo referencia a la figura 7.3:

$$M = 82.5x - (5.5x)\left(\frac{x}{2}\right)$$

De esta expresión se puede determinar la posición de los puntos en la viga donde el momento es 439 pie-klb y 231 pie-klb. Los resultados se muestran en la figura 7.4.

Comentario. Si se emplea el procedimiento aproximado (donde las varillas se cortan meramente con base en la proporción del número de varillas al momento máximo, como se ilustró con las ecuaciones en la pág. 181), las primeras dos varillas tendrán longitudes iguales a 17.2 pies (en comparación con el valor teóricamente correcto de 16.16 pies) y las segundas dos varillas tendrán longitudes iguales a 24.45 pies (en comparación con el valor teóricamente correcto de 23.75 pies). Entonces puede verse que el procedimiento aproximado conduce a resultados bastante razonables.



Edificio de laboratorios de la Portland Cement Association, Skokie, Illinois.
(Cortesía de Portland Cement Association.)

En esta sección se analizaron los puntos teóricos de corte. Como se verá en las secciones posteriores de este capítulo, las varillas deben prolongarse a distancias adicionales debido a las variaciones de los diagramas de momento, a los requisitos de anclaje de las varillas, etc. En la sección 7.11 se verá con mayor detalle el corte y doblado de las varillas de refuerzo.

7.2 ESFUERZOS DE ADHERENCIA

Una hipótesis básica que se hace en el diseño del concreto reforzado es que no debe existir ningún deslizamiento de las varillas en relación con el concreto circundante. En otras palabras, el acero y el concreto deben aglomerarse o permanecer *adheridos* para que actúen como una unidad. Si no hay adherencia entre ambos materiales y si las varillas no están ancladas en sus extremos, éstas se zafarán del concreto. Como consecuencia, la viga de concreto se comportará como un miembro sin refuerzo y estará sujeta a un colapso repentino tan pronto como el concreto se agriete.

Es obvio que la magnitud de los esfuerzos de adherencia cambiará en una viga de concreto reforzado conforme cambien los momentos flexionantes en la viga. Cuanto mayor sea la tasa de cambio del momento flexionante (que ocurre en las posiciones de alto esfuerzo cortante), mayor será la tasa de cambio de las tensiones en las varillas, y por tanto, de los esfuerzos de adherencia.

Lo que acaso no es tan obvio es el hecho de que los esfuerzos de adherencia son también drásticamente afectados por el desarrollo de grietas de tensión en el concreto. En un punto donde se presente una grieta, toda la tensión longitudinal será resistida por la varilla de refuerzo. A una distancia pequeña a lo largo de la varilla, en un punto fuera de la grieta, la tensión longitudinal será resistida tanto por la varilla como por el concreto no agrietado. En esta distancia pequeña puede darse un cambio grande en la tensión de la varilla debido al hecho de que el concreto no agrietado ahora está resistiendo la tensión.

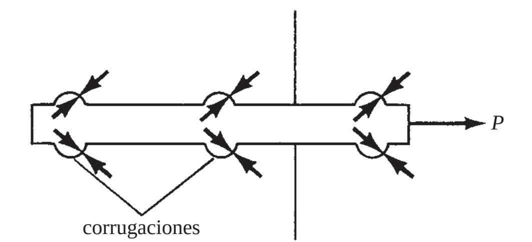


Figura 7.5 Fuerzas de apoyo en la varilla y apoyo de las corrugaciones (costillas) de la varilla en el concreto.

Así, el esfuerzo de adherencia en el concreto circundante, que era cero en la grieta, cambiará drásticamente dentro de esta distancia pequeña a medida que cambia la tensión en la varilla.

En el pasado era usual calcular los esfuerzos máximos teóricos de adherencia en puntos en los miembros y compararlos con ciertos valores permisibles obtenidos en pruebas. Sin embargo, actualmente se enfoca el problema desde un punto de vista último, donde la situación es algo diferente. Incluso si las varillas están completamente separadas del concreto en tramos considerables de su longitud, la resistencia última de la viga no se verá afectada si las varillas están ancladas en sus extremos de manera que no se puedan deslizar.

La adherencia de las varillas de refuerzo al concreto se debe a varios factores, incluyendo la adherencia química entre los dos materiales, la fricción debida a la rugosidad natural de las varillas y el apoyo en el concreto de las corrugaciones estrechamente espaciadas en las superficies de las varillas. En el siguiente análisis se considera la aplicación de la fuerza P a la varilla mostrada en la figura 7.5.

Cuando primero se aplica la fuerza a la varilla, la resistencia al deslizamiento se debe a la adhesión entre la varilla y el concreto. Si se usaran varillas lisas, no se necesitaría mucha tensión en las varillas para romper esta adherencia, en particular la adyacente a una grieta en el concreto. Si esto ocurriera en una varilla lisa, sólo la fricción impediría el deslizamiento de la varilla. Se tiene también algo de efecto de Poisson debido a la tensión en las varillas. Al estar tensionadas se reduce un poco su sección, lo cual hace que se deslicen más fácilmente. Si usáramos varillas lisas de refuerzo en las vigas, se tendría muy poca resistencia por adherencia y las vigas serían sólo ligeramente más resistentes que si no tuviesen refuerzo. La introducción de la corrugación en las varillas, para que además de la adhesión y de la fricción, hubiera también una resistencia debido al apoyo del concreto en las corrugaciones (o deformaciones) de las varillas, así como también la llamada resistencia de fricción al cortante del concreto entre las corrugaciones.

Las varillas corrugadas se usan en casi todo tipo de trabajo. Sin embargo, las varillas lisas o las mallas de alambre lisas se usan algunas veces para el refuerzo lateral en los miembros a compresión (como los estribos o las espirales que se describen en el capítulo 9), para miembros sometidos a torsión, y para el refuerzo confinado en empalmes (ACI R3.5.4).

Como resultado de estos hechos, las varillas de refuerzo se fabrican con corrugaciones. La adherencia química y la fricción entre las corrugaciones son insignificantes y la adherencia se debe primordialmente al apoyo sobre las costillas de la corrugación. Con base en pruebas, los patrones de agrietamiento en el concreto muestran que los esfuerzos de apoyo están inclinados respecto al eje de las varillas en aproximadamente de 45° a 80° (el ángulo es afectado apreciablemente por la forma de las costillas).[1]

[1]Goto, Y., 1971,"Cracks Formed on Concrete Around Deformed Tensioned Bar", *ACI Journal,* Proceedings 68, pág. 244.



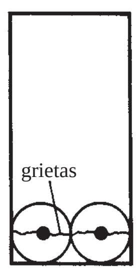
La varilla cuadrada y torcida, anteriormente usada para aumentar la adherencia entre el concreto y el acero. (Cortesía de Clemson University Communications Center.)

Como se muestra en la figura 7.5, se desarrollan fuerzas iguales y opuestas entre las varillas de refuerzo y el concreto. Estas fuerzas internas se deben a la acción de cuña de las costillas al apoyarse contra el concreto. Ocasionan esfuerzos de tensión en una porción cilíndrica de concreto alrededor de cada varilla. Es un efecto parecido al que se da en un tubo de concreto lleno de agua que presiona radialmente contra la pared del tubo, sometiéndolo a tensión. Si la tensión llega a ser muy alta, el tubo se agrieta.

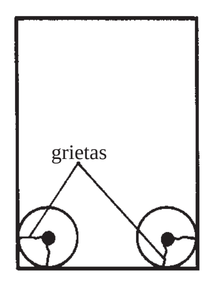
De manera similar, si los esfuerzos de adherencia en una viga llegan a ser muy grandes, el concreto alrededor de las varillas se separa y eventualmente la separación se extenderá hasta el lado y/o la parte inferior de la viga. Si cualquiera de estos tipos de separaciones llega hasta el extremo de la varilla, ésta se deslizará y la viga fallará. Cuanto más cercana sea la separación entre las varillas y menor sea el recubrimiento, más delgado será el cilindro de concreto alrededor de cada varilla y más probable será una falla debido a la ruptura de la adherencia.

La figura 7.6 muestra ejemplos de fallas de adherencia que pueden ocurrir para diferentes valores del recubrimiento de concreto y de la separación entre las varillas. Estos valores son mostrados por MacGregor.[2]

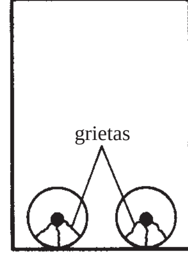
La resistencia a la separación a lo largo de las varillas depende de un buen número de factores, tales como el espesor del recubrimiento de concreto, el espaciamiento de las varillas, la presencia de recubrimiento en las varillas, los tipos de agregados que se usen, el efecto del confinamiento transversal de los estribos, etc. Como hay tantas variables, es imposible hacer pruebas de adherencia que sean válidas para una gran variedad de estructuras. No obstante, el ACI ha tratado de hacer esto mismo con ecuaciones, que se describirán en las siguientes secciones.



a) Recubrimiento lateral y media separación libre entre varillas menor que el recubrimiento del fondo



b) Recubrimiento en los lados y en el fondo igual o menor que media separación libre entre varillas



c) Recubrimiento en el fondo menor que el recubrimiento lateral y menor que media separación libre entre varillas

Figura 7.6 Tipos de falla por adherencia.

[2]MacGregor, J. G., 2005, *Reinforced Concrete Mechanics and Design*, 4a. ed. (Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall), pág. 334.

7.3 LONGITUDES DE ANCLAJE PARA EL REFUERZO DE TENSIÓN

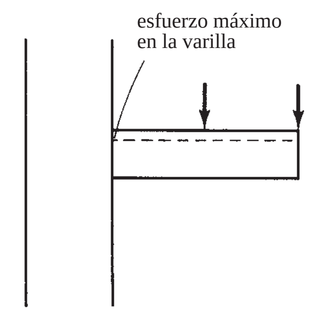
Para este análisis, nos referiremos a la viga en voladizo de la figura 7.7. Puede verse que tanto el momento máximo en la viga como los esfuerzos máximos en las varillas de tensión, se presentan en la cara del empotramiento. Teóricamente, el momento es cero a una pequeña distancia hacia atrás del apoyo y podría pensarse por lo tanto que las varillas de refuerzo ya no se necesitan. Ésta es la situación representada en la figura 7.7(*a*). Obviamente, si las varillas se cortaran en la cara del apoyo, la viga fallaría.

Los esfuerzos en las varillas deben transmitirse al concreto mediante la adherencia entre el acero y el concreto antes de que se puedan cortar las varillas. En este caso éstas deben prolongarse cierta distancia dentro del apoyo y hacia la viga para anclarla o para desarrollar su resistencia. Esta distancia, llamada *longitud de desarrollo o longitud de anclaje* (ℓ_d), se muestra en la figura 7.7(*b*). Puede definirse como la longitud mínima de empotramiento de una varilla que es necesaria para que trabaje a su esfuerzo de fluencia, más cierta distancia adicional para asegurar la tenacidad del miembro. Un análisis similar puede hacerse para varillas en otras situaciones y en otros tipos de vigas.

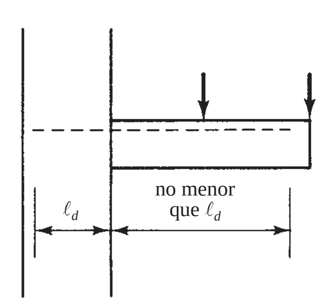
Como ya se mencionó, durante muchos años el ACI requirió que los proyectistas calcularan los esfuerzos de adherencia con una fórmula que estaba basada en el cambio de momento en una viga. Luego los valores calculados se comparaban con los esfuerzos permisibles de adherencia del código. Originalmente, la resistencia a la adherencia se medía mediante pruebas de extracción. Se empotraba una varilla en un cilindro de concreto, y se usaba un gato para ver cuánta fuerza era necesaria para sacarla. El defecto de tal prueba es que el concreto queda trabajando a compresión, lo cual impide la formación de grietas. Sin embargo, en un miembro a flexión existe una situación totalmente diferente, debido a la naturaleza de estira y afloja de los esfuerzos de adherencia causada por las grietas de tensión en el concreto. En años recientes, se han efectuado pruebas más realistas con vigas; las expresiones para longitudes de desarrollo del código ACI que se presentarán en este capítulo se basan primordialmente en las pruebas realizadas en el Instituto Nacional de Estándares y Tecnología y en la Universidad de Texas.

Las longitudes de anclaje usadas para varillas o alambres corrugados en tensión no deben ser menores que los valores calculados con la ecuación 12-1 del ACI o 12 plg La sustitución en esta ecuación, que se da a continuación, proporciona valores en términos de diámetros de varillas $\left(\frac{\ell_d}{d_b}\right)$. Esta forma de respuesta es muy conveniente, diciéndose, por ejemplo, 30 diámetros de varillas, 40 diámetros de varillas, etcétera.

$$\ell_d = \frac{3}{40}\frac{f_y}{\lambda\sqrt{f'_c}}\frac{\psi_t\psi_e\psi_s}{\left(\frac{c_b+K_{tr}}{d_b}\right)}d_b \qquad \text{(Ecuación 12-1 ACI)}$$



a) Ninguna longitud de desarrollo en el apoyo (la viga fallará)



b) Varillas prolongadas una distancia ℓ_d en el empotramiento

Figura 7.7

o

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{3}{40}\frac{f_y}{\lambda\sqrt{f'_c}}\frac{\psi_t\psi_e\psi_s}{\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}\right)}$$

O en unidades SI,

$$\ell_d = \frac{9}{10}\frac{f_y}{\lambda\sqrt{f'_c}}\frac{\psi_t\psi_e\psi_s}{\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}\right)}d_b$$

Esta expresión, que parece incluir tantos términos, es mucho más fácil de usar que lo que parece a primera vista, ya que varios de los términos son usualmente iguales a 1.0. Aun si no son iguales a 1.0, los factores se pueden obtener rápidamente.

En los siguientes párrafos se describe cada uno de los términos en la ecuación que no han aparecido previamente. Su valor en diferentes situaciones se da en la tabla 7.1.

1. *Posición del refuerzo.* Las varillas horizontales que tienen por lo menos 12 plg* de concreto fresco colocado debajo de ellas, no se adhieren tan bien al concreto como las varillas situadas cerca del fondo de dicho material. A estas varillas se les denomina *varillas superiores.* Durante la colocación y vibrado del concreto, algo de aire y agua excedente tienden a subir hacia la parte superior del concreto, y alguna porción puede quedar atrapada bajo las varillas más altas. Además, puede darse cierto asentamiento del concreto debajo. Como consecuencia, el refuerzo no se adhiere tan bien al concreto debajo, y se requieren por ello longitudes de desarrollo mayores. Para tomar en cuenta este efecto se usa el *factor ψ_t de la posición del refuerzo*.
2. *Recubrimiento de las varillas.* Las varillas de refuerzo recubiertas con epóxido se usan frecuentemente hoy en día para proteger al acero de situaciones severas de corrosión, como las que se presentan cuando se usan productos químicos descongelantes. Las cubiertas de los puentes y las losas de los estacionamientos en regiones de clima muy frío se encuentran en esta clase. Cuando se usan recubrimientos en las varillas, la adhesión se reduce y las longitudes de desarrollo deben incrementarse. Para tomar este hecho en cuenta, se usa en la ecuación el término ψ_e o *factor de recubrimiento*.
3. *Tamaños del refuerzo.* Si se usan varillas pequeñas en un miembro para obtener cierta área transversal total, el área superficial total de las varillas será sensiblemente mayor que si se usan varillas de mayor diámetro para obtener la misma área total. Como consecuencia, las longitudes de desarrollo requeridas para las varillas más pequeñas, con sus mayores áreas superficiales de adherencia (en proporción con sus áreas transversales) son menores que las requeridas para las varillas de mayor diámetro. Este factor se toma en cuenta con el *factor de tamaño del refuerzo ψ_s.*
4. *Agregados de peso ligero.* El peso muerto del concreto se puede reducir sustancialmente sustituyendo el agregado regular de piedra por el de peso ligero. El uso de tales agregados (arcilla o pizarra expansiva, escoria, etc.), conduce generalmente a concretos de menor resistencia. Tales concretos tienen resistencias menores a la rajadura, por lo cual las longitudes de desarrollo tienen que ser mayores. En la ecuación, λ es el *factor de modificación de concreto de peso ligero estudiado en la* sección 1.12.
5. *Separación entre varillas o dimensiones del recubrimiento.* Si el recubrimiento del concreto o la separación libre entre las varillas son muy pequeños, el concreto puede rajarse, como se mostró anteriormente en la figura 7.6. Esta situación se toma en consideración con el término $(c_b + K_{tr})/d_b$ en la expresión para la longitud de desarrollo. Se llama *término de confinamiento.* En la ecuación c_b representa la menor de las distancias del centro de la varilla o el alambre en tensión a la superficie más cercana de concreto, o la media separación entre centros del refuerzo.

*300 mm en el sistema SI.

Tabla 7.1 Factores que se utilizan en las expresiones para determinar las longitudes de desarrollo requeridas para varillas corrugadas y alambres corrugados en tensión (ACI 12.2.4).

1. $\psi_t =$ *factor de posición del refuerzo*	
Refuerzo horizontal situado de tal manera que más de 12 plg de concreto fresco es colado en el miembro abajo de la longitud de desarrollo o empalme	1.3
Otro refuerzo	1.0
2. $\psi_e =$ *factor de recubrimiento*	
Varillas recubiertas con epóxido o alambres con recubrimiento menor que $3d_b$, o separación libre menor que $6d_b$	1.5
Todas las otras varillas o alambres recubiertos con epóxido	1.2
Refuerzo no recubierto y bañado en cinc	1.0
Sin embargo, el producto de $\psi_t\psi_e$ *no tiene que tomarse mayor que 1.7.*	
3. $\psi_s =$ *factor de tamaño del refuerzo*	
Varillas Núm. 6 y menores y alambres corrugados	0.8
Varillas Núm. 7 y mayores	1.0
En unidades SI	
Varillas Núm. 19, menores y alambres corrugados	0.8
Varillas Núm. 22 y mayores	1.0
4. λ *(lambda) = factor de concreto con agregado de peso ligero*	
Cuando se usa concreto con agregado ligero, λ no excederá	0.75
Sin embargo, cuando se especifica f_{ct}, λ se podrá tomar igual a $6.7\sqrt{f'_c}/f_{ct}$	
En unidades SI, este valor es $\dfrac{\sqrt{f'_c}}{1.8f_{ct}}$	
Pero no mayor que	1.0
Cuando se usa concreto de peso normal	1.0
5. $c_b =$ *separación* o dimensión del recubrimiento, plg	
Use la menor, ya sea la distancia del centro de la varilla o alambre a la superficie más cercana de concreto, o bien la mitad de la separación centro a centro de las varillas o alambre por desarrollar.	

En esta expresión, K_{tr} es un factor llamado *índice de refuerzo transversal*. Se usa para tomar en cuenta la contribución del refuerzo de confinamiento (estribos o ligas) a través de los posibles planos de rajaduras.

$$K_{tr} = \frac{40A_{tr}}{sn}$$

donde

$A_{tr} =$ área de la sección transversal total de todo el refuerzo transversal que tenga la separación s de centro a centro y una resistencia a la fluencia f_{yt}.

$n =$ número de varillas o alambres que van a desarrollarse a lo largo del plano de rajadura. Si el acero está en dos capas, n es el mayor número de varillas en una capa individual.

$s =$ separación centro a centro del refuerzo transversal.

En su sección 12.2.3, el código permite conservadoramente el uso de $K_{tr} = 0$ para simplificar los cálculos aun cuando exista refuerzo transversal. La sección 12.2.3 del ACI limita el valor de $c_b + K_{tr}/d_b$ usado en la ecuación a un valor máximo de 2.5. (Se ha encontrado que si se usan valores mayores que 2.5, las longitudes de desarrollo más cortas resultantes incrementan el peligro de fallas por extracción.)

Los cálculos implicados en la aplicación de la ecuación 12-1 del ACI son muy sencillos, como se ilustra en el ejemplo 7.2.

$$\text{En unidades SI, } K_{tr} = \frac{A_{tr} f_{yt}}{10sn}$$

EJEMPLO 7.2

Determinar la longitud de desarrollo requerida para las varillas no recubiertas del #8 de fondo mostradas en la figura 7.8.

a) suponga $K_{tr} = 0$ y

b) use el valor calculado de K_{tr}.

SOLUCIÓN De la tabla 7.1

$\psi_t = 1.0$ para varillas de fondo

$\psi_e = 1.0$ para varillas no recubiertas

$\psi_s = 1.0$ para varillas del #8

$\lambda = 1.0$ para concreto de peso normal

$c_b =$ recubrimiento lateral de las varillas medido desde el centro de las varillas $= 2\frac{1}{2}$ plg

o bien

$c_b =$ la mitad de la separación centro a centro de las varillas $= 1\frac{1}{2}$ plg ←

a) Usando la ecuación 12-1 del ACI con K_{tr} = 0

$$\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = \frac{1.50 + 0}{1.00} = 1.50 < 2.50 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{3}{40}\frac{f_y}{\lambda\sqrt{f'_c}}\frac{\psi_t\psi_e\psi_s}{\left(\dfrac{c_b + K_{tr}}{d_b}\right)}$$

$$= \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{60\ 000}{(1.0)\sqrt{3\ 000}}\right)\frac{(1.0)(1.0)(1.0)}{1.50}$$

$$= \underline{\underline{55 \text{ diámetros}}}$$

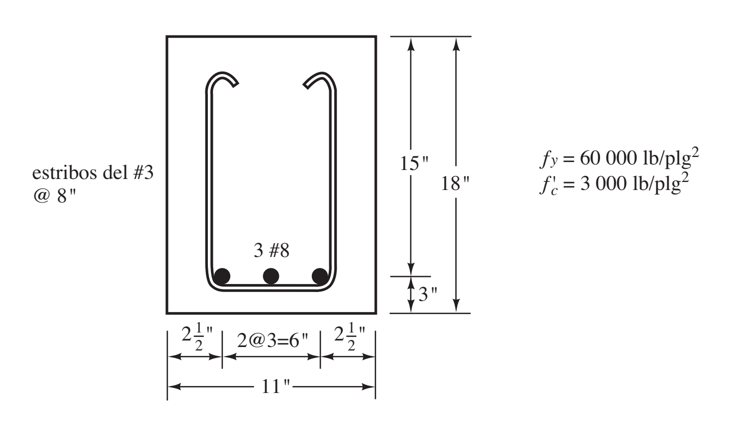


Figura 7.8

b) Usando el valor calculado de K_{tr} y la ecuación 12-1 del ACI

$$K_{tr} = \frac{40\,A_{tr}}{sn} = \frac{(40)(2)(0.11)}{(8)(3)} = 0.367$$

$$\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = \frac{1.50 + 0.367}{1.0} = 1.867 < 2.5 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{60\ 000}{\sqrt{3\ 000}}\right)\frac{(1.0)(1.0)(1.0)(1.0)}{1.867} = \underline{\underline{44\text{ diámetros}}}$$

Al determinar las longitudes de desarrollo requeridas, hay dos especificaciones más del ACI, a saber:

1. La sección 12.1.2 establece que los valores de $\sqrt{f'_c}$ usados en las ecuaciones no deben ser mayores que 100 lb/plg^2 o bien $\frac{25}{3}$ MPa en unidades SI. (Este límite se impone porque no ha habido la suficiente investigación sobre el desarrollo de varillas en concreto de alta resistencia como para justificar valores superiores a $\sqrt{f'_c}$, lo cual resultaría en valores menores de $\frac{\ell_d}{d_b}$.)
2. Cuando la cantidad del refuerzo de flexión proporcionado excede la cantidad teórica requerida y donde las especificaciones usadas no requieren específicamente que las longitudes de desarrollo se basen en f_y, el valor de $\frac{\ell_d}{d_b}$ puede multiplicarse por $(A_{s\text{ requerido}}/A_{s\text{ proporcionado}})$ de acuerdo con la sección 12.2.5 del ACI. Este factor de reducción no se puede usar para el desarrollo del refuerzo en los soportes para el refuerzo positivo, ni para el desarrollo de los refuerzos por contracción y temperatura, ni tampoco para algunas otras situaciones más indicadas en el R12.2.5. Esta reducción tampoco es permitida en regiones de riesgo sísmico alto, tal como se describe en ACI 318-08, capítulo 21.

En vez de usar la ecuación 12-1 del ACI para calcular las longitudes de desarrollo, el ACI en su sección 12.2 permite el uso de un enfoque algo más simple y conservador (como se muestra en la tabla 7.2 en este punto) para ciertas condiciones. Con este enfoque, el ACI reconoce que en un gran número de casos los proyectistas usan valores de separación y recubrimiento así como de refuerzo confinado, que dan por resultado un valor de $\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}$ igual a por lo menos 1.5. Fue con base en este valor y los valores apropiados de ψ_s, que se determinaron las expresiones en la tabla 7.2.

Para valores en unidades SI, véase la sección 12.2.2 del código 318M-08.

Si se usa un recubrimiento mínimo igual a d_b y una separación libre mínima entre varillas de $2d_b$ (o una separación libre mínima entre varillas igual a d_b, junto con un mínimo de ligas o estribos),

Tabla 7.2 Ecuaciones simplificadas para la longitud de desarrollo.

	Varillas del #6 y menores y alambres corrugados	Varillas del #7 y mayores
Separación libre entre varillas por desarrollarse o empalmarse no menor que d_b, recubrimiento libre no menor que d_b y estribos o amarres a todo lo largo de ℓ_d no menor que el mínimo del código o bien Separación libre entre varillas por desarrollarse o empalmarse no menor que $2d_b$, y recubrimiento libre no menor que d_b	$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{f_y \psi_t \psi_e}{25\,\lambda\sqrt{f'_c}}$	$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{f_y \psi_t \psi_e}{20\,\lambda\sqrt{f'_c}}$
Otros casos	$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{3 f_y \psi_t \psi_e}{50\,\lambda\sqrt{f'_c}}$	$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{3 f_y \psi_t \psi_e}{40\,\lambda\sqrt{f'_c}}$

pueden usarse las expresiones en la tabla 7.2. De otra manera es necesario usar la ecuación 12-1 más rigurosa del ACI.

El autor considera que la aplicación de las así llamadas ecuaciones simplificadas requiere casi tanto esfuerzo como el que sea necesario para usar la ecuación más larga. Además, las longitudes de desarrollo calculadas con las ecuaciones “más simples” son a menudo mucho más largas que las determinadas con la ecuación regular, lo que las hace menos económicas.

Por estas razones el autor recomienda el uso de la ecuación 12-1 para calcular longitudes de desarrollo. Sin embargo, al usar esta ecuación de forma más larga se podría suponer que $K_{tr} = 0$, ya que los resultados obtenidos así son sólo un poco más conservadores que los obtenidos con la ecuación completa. *El autor empleará la ecuación 12-1 con* $K_{tr} = 0$ *para todas las aplicaciones después de este capítulo.*

Los ejemplos 7.3 y 7.4 siguientes ilustran la determinación de las longitudes de desarrollo usando cada uno de los métodos que han sido descritos en esta sección.

EJEMPLO 7.3

Las varillas del #7 de fondo mostradas en la figura 7.9 están recubiertas con epóxido. Suponiendo concreto de peso normal, $f_y = 60\,000$ lb/plg² y $f'_c = 3\,500$ lb/plg², determinar las longitudes de desarrollo requeridas

a) Usando las ecuaciones simplificadas de la tabla 7.2.

b) Usando la ecuación completa 12-1 del ACI con el valor calculado de K_{tr}.

c) Usando la ecuación 12-1 del ACI con $K_{tr} = 0$.

SOLUCIÓN Con referencia a la tabla 7.1

$\psi_t = 1.0$ para varillas de fondo

$\psi_e = 1.5$ para varillas recubiertas con epóxido y separación < $6d_b$

$\psi_t\psi_e = (1.0)(1.5) = 1.5 < 1.7$ $\underline{\underline{\text{OK}}}$

$\psi_s = 1.0$ para varillas #7 y mayores

$\lambda = 1.0$ para concreto de peso normal

$c_b =$ recubrimiento $= 3$ plg

o bien

$c_b =$ mitad de la separación centro a centro entre varillas $= 1\frac{1}{2}$ plg $\leftarrow$

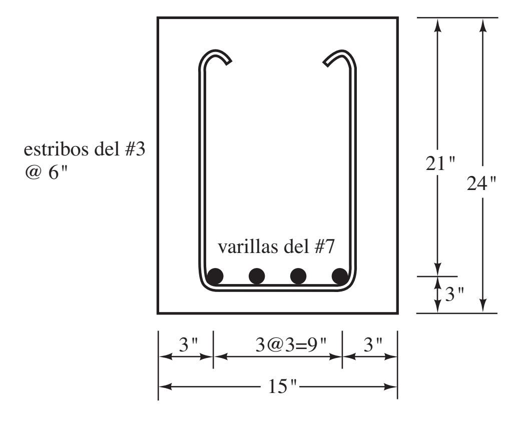


Figura 7.9

a) Usando la ecuación simplificada

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{f_y \psi_t \psi_e}{20\,\lambda\sqrt{f'_c}} = \frac{(60\,000)(1.0)(1.5)}{20(1.0)\sqrt{3\,500}} = 76 \text{ diámetros}$$

b) Usando la ecuación 12-1 del ACI con valor calculado de K_{tr}

$$K_{tr} = \frac{40A_{tr}}{sn} = \frac{(40)(2)(0.11)}{(6)(4)} = 0.367$$

$$\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = \frac{1.5 + 0.367}{0.875} = 2.13 < 2.50 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{3}{40}\,\frac{f_y}{\lambda\sqrt{f'_c}}\,\frac{\psi_t\psi_e\psi_s}{\dfrac{c_b + K_{tr}}{d_b}}$$

$$= \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{60\,000}{(1.0)\sqrt{3\,500}}\right)\frac{(1.0)(1.5)(1.0)}{2.13}$$

$$= \underline{\underline{54 \text{ diámetros}}}$$

c) Usando la ecuación 12-1 del ACI con K_{tr} = 0

$$\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = \frac{1.5 + 0}{0.875} = 1.71 < 2.50 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{60\,000}{(1.0)\sqrt{3\,500}}\right)\frac{(1.0)(1.5)(1.0)}{1.71}$$

$$= \underline{\underline{67 \text{ diámetros}}}$$

EJEMPLO 7.4

El área requerida de acero de refuerzo para la viga de concreto de peso ligero de la figura 7.10 es de 2.88 plg^2. Las varillas superiores del #8 mostradas no están recubiertas. Calcule sus longitudes de desarrollo si $f_y = 60\,000$ lb/plg^2 y $f'_c = 3\,500$ lb/plg^2.

a) Usando las ecuaciones simplificadas.

b) Usando la ecuación 12-1 completa del ACI.

c) Usando la ecuación 12-1 con $K_{tr} = 0$.

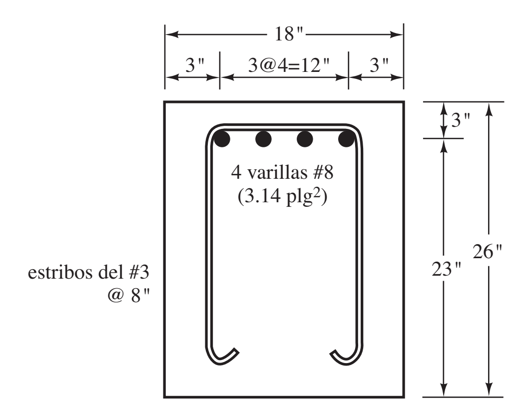


Figura 7.10 Sección transversal de viga en voladizo.

SOLUCIÓN Con referencia a la tabla 7.1

$\psi_t = 1.3$ para varillas superiores

$\psi_e = 1.0$ para varillas no recubiertas

$\psi_t \psi_e = (1.3)(1.0) < 1.7$ $\underline{\underline{\text{OK}}}$

$\psi_s = 1.0$ para varillas #7 y mayores

$\lambda = 0.75$ para concreto de peso ligero

$c_b =$ recubrimiento $= 3$ plg

o bien

$c_b =$ mitad de la separación centro a centro entre varillas $= 2$ plg $\leftarrow$

a) usando la ecuaciones simplificadas

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{f_y \psi_t \psi_e}{20\lambda\sqrt{f'_c}} = \frac{(60\ 000)(1.3)(1.0)}{20(0.75)\sqrt{3\ 500}} = 88 \text{ diámetros}$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} \text{ reducida por exceso de refuerzo a } \left(\frac{2.88}{3.14}\right)(88) = \underline{\underline{81 \text{ diámetros}}}$$

b) Usando la ecuación 12-1 del ACI con valor calculado de K_{tr}

$$K_{tr} = \frac{40A_{tr}}{sn} = \frac{(40)(2)(0.11)}{(8)(4)} = 0.275$$

$$\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = \frac{2.0 + 0.275}{1.0} = 2.275 < 2.5 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{3}{40}\frac{f_y}{\lambda\sqrt{f'_c}}\frac{\psi_t \psi_e \psi_s}{\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}}$$

$$= \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{60\ 000}{(0.75)\sqrt{3\ 500}}\right)\frac{(1.3)(1.0)(1.0)}{2.275}$$

$$= 58 \text{ diámetros}$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} \text{ reducida por exceso de refuerzo a } \left(\frac{2.88}{3.14}\right)(58) = \underline{\underline{53 \text{ diámetros}}}$$

c) Usando la ecuación 12-1 del ACI con K_{tr} = 0

$$\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = \frac{2.0 + 0}{1.0} = 2.0 < 2.5$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{60\ 000}{(0.75)\sqrt{3\ 500}}\right)\frac{(1.3)(1.0)(1.0)}{2.0}$$

$$= 66 \text{ diámetros}$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} \text{ reducida por exceso de refuerzo a } \left(\frac{2.88}{3.14}\right)(66) = \underline{\underline{61 \text{ diámetros}}}$$

7.4 LONGITUDES DE ANCLAJE PARA VARILLAS EN RACIMO

Cuando se usan varillas en racimo se requieren mayores longitudes de desarrollo, porque no hay un "núcleo" de concreto entre las varillas que proporcione resistencia al deslizamiento. La sección 12.4.1 del código establece que las longitudes de desarrollo y empalme en varillas en racimo deben determinarse calculando primero las longitudes necesarias para las varillas individuales, incrementando luego esos valores en 20% para tres varillas en racimo y en 33% para racimos de cuatro varillas.

Cuando se calculan los factores relativos al recubrimiento y la separación libre de un racimo, se considera el área total de las varillas como si fuese el de una sola varilla. En otras palabras, es necesario remplazar el haz de varillas con una varilla sola ficticia con un diámetro tal que su área de sección transversal iguale a la del racimo de varillas. Esto resulta conservador porque las propiedades de adherencia de las varillas en racimo son en realidad mejores que las de una sola varilla ficticia. Al determinar c_b, el término de confinamiento, y el factor ψ_e, se considera que la varilla ficticia tiene un centroide que coincide con el del racimo de varillas. El ejemplo 7.5 presenta el cálculo de la longitud de desarrollo necesaria para un racimo de tres varillas del #8.

EJEMPLO 7.5

Calcular la longitud de desarrollo requerida para las varillas en racimo no recubiertas mostradas en la figura 7.11, si $f_y = 60\,000$ lb/plg^2 y $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y el concreto es de peso normal. Usar la ecuación 12-1 del ACI y suponer $K_{tr} = 0$.

SOLUCIÓN Con referencia a la tabla 7.1

$\psi_t = \psi_c = \psi_s = \lambda = 1.0$

Área de 3 varillas del #8 = 2.35 plg^2

Diámetro d_{bf} de una sola varilla de 2.35 plg^2 de área

$$\frac{\pi d_{bf}^2}{4} = 2.35$$
$$d_{bf} = 1.73 \text{ plg}$$

Encuentre el valor más bajo para c_b [figura 7.11(*b*)].

$$c_{b1} = \text{recubrimiento lateral de las varillas} = 2 + \tfrac{3}{8} + 1.00 = 3.38 \text{ plg} \leftarrow$$

$$c_{b2} = \text{recubrimiento inferior de las varillas} = 2 + 3/8 + 0.79 d_b{}^{3} = 2 + 3/8 + 0.79(1.00) = 3.16 \text{ plg}$$

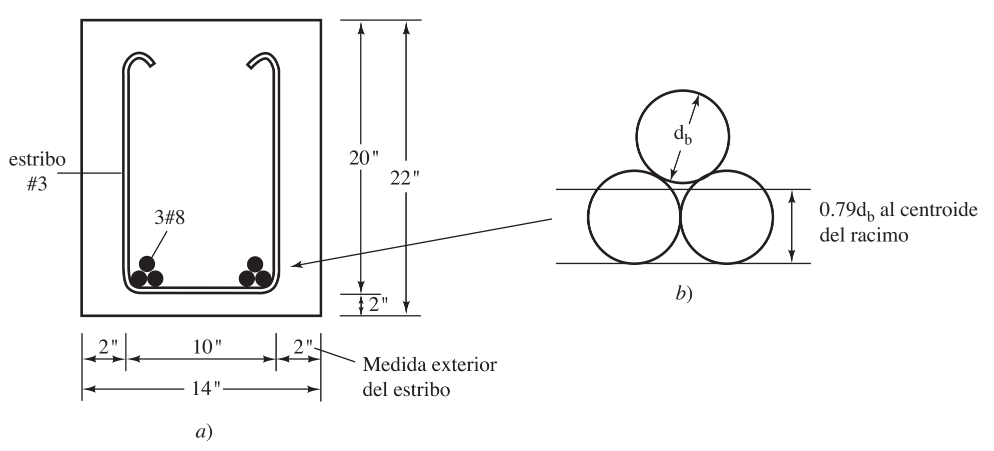


Figura 7.11

[3] Véase la figura 7.11(*b*) para esta dimensión.

donde d_b es el diámetro real de la varilla (no el ficticio).

$$c_{b3} = \tfrac{1}{2}\text{de la separación entre centros de las varillas} = \frac{10 - (2)\left(\frac{3}{8}\right) - (2)(1.00)}{2} = 3.62 \text{ plg}$$

Usando la ecuación 12-1 del ACI con K_{tr} = 0

$$\frac{c_b + K_{tr}}{d_{bf}} = \frac{3.16 + 0}{1.73} = 1.83 < 2.5$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{60\,000}{(1.0)\sqrt{4\,000}}\right)\frac{(1.0)(1.0)(1.0)}{1.83}$$

$$= 39 \text{ diámetros}$$

Pero de acuerdo con la sección 12.4.1 del ACI, esta longitud debe aumentarse 20% para racimos de 3 varillas.

$$\frac{\ell_d}{d_b} = (1.20)(39) = 47 = 47d_b = 47 \text{ plg}$$

Observe que se usa en la última ecuación el diámetro real de la varilla, no de la varilla ficticia.

7.5 GANCHOS

Cuando no se dispone de suficiente espacio para anclar las varillas a *tensión* prolongándolas según sus longitudes de desarrollo requeridas, tal como se describió en la última sección de este texto, pueden emplearse ganchos. (*Los ganchos se consideran inservibles para varillas en compresión para propósitos de longitud de desarrollo.*)

La figura 7.12 muestra detalles de los ganchos estándar a 90 y 180° especificados en las secciones 7.1 y 7.2 del código ACI. Puede usarse en el extremo libre un gancho a 90° con una extensión de 12 diámetros de varilla ($12d_b$) o bien un gancho de 180° con una extensión de 4 diámetros de varilla ($4d_b$),

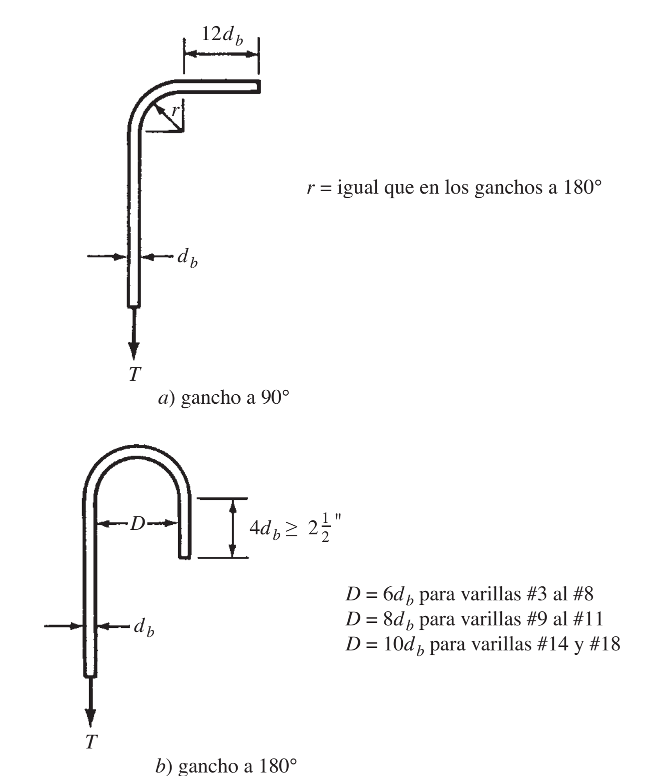


Figura 7.12 Ganchos.

pero no menos de 2½ plg en el extremo libre. Los radios y diámetros mostrados se miden en la parte interior de los dobleces.

Las dimensiones dadas para ganchos se desarrollaron para proteger a los miembros contra desprendimiento del concreto o rotura de la varilla, independientemente de las resistencias del concreto, de los tamaños de las varillas o de los esfuerzos presentes en éstas.

En realidad, los ganchos no proveen un incremento apreciable en la resistencia del anclaje porque el concreto en el plano del gancho es algo vulnerable al desprendimiento. Esto quiere decir que el aumentar la longitud de las varillas más allá de los ganchos (es decir, más allá de los valores especificados de $12d_b$ o $4d_b$), realmente no incrementa la resistencia del anclaje.

La longitud de desarrollo que se requiere para un gancho es directamente proporcional al diámetro de la varilla. La razón de esto es que la magnitud de los esfuerzos de compresión en el concreto en el interior del gancho está gobernada por d_b. Para determinar las longitudes de desarrollo que se necesitan en los ganchos de tipo estándar, el ACI (12.5.2) requiere el cálculo de

$$\ell_{dh} = \frac{0.02\psi_e f_y d_b}{\lambda\sqrt{f'_c}}$$

El valor de ℓ_{dh}, según la sección 12.5.1 del ACI, no debe ser menor de 6 plg u 8 d_b. Para varillas corrugadas el ACI, en la sección 12.5.2, establece que ψ_e en esta expresión se puede considerar igual a 1.2 para refuerzo recubierto con epóxido y el valor de λ usado igual a 0.75 para concreto con agregado ligero. Para todos los demás casos ψ_e y λ deben considerarse iguales a 1.0.

En unidades SI, $\ell_{dh} = \dfrac{0.24\psi_e f_y}{\lambda\sqrt{f'_c}} d_b$

La longitud de desarrollo ℓ_{dh}, se mide desde la sección crítica de la varilla hasta el extremo exterior o borde de los ganchos, como se muestra en la figura 7.13.

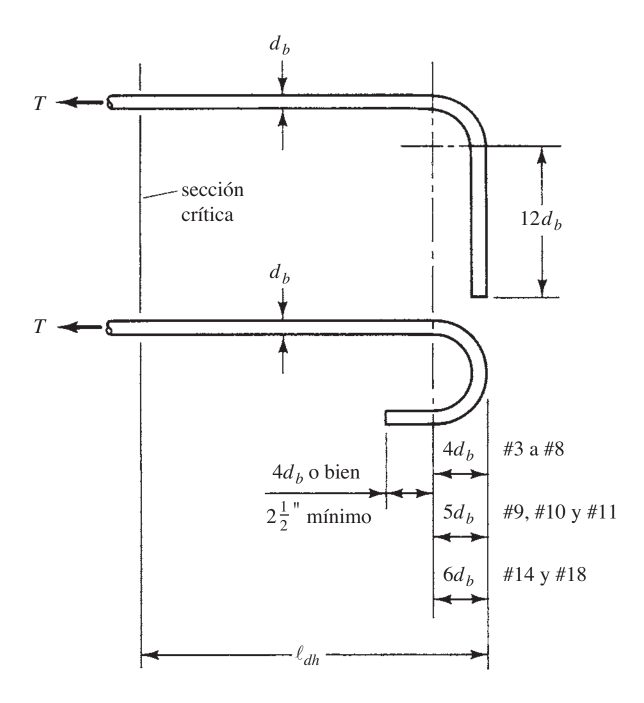


Figura 7.13 Detalles de una varilla con dobladura para el anclaje o desarrollo de ganchos estándar.

Los factores de modificación que tal vez deban multiplicarse sucesivamente por ℓ_{dh}, se listan en la sección 12.5.3 del código y se resumen en los incisos (*a*) a (*d*). Estos valores tienen aplicación sólo para los casos en que se usan ganchos de tipo estándar. El efecto de ganchos con mayores radios no lo cubre el código. Para el diseño de ganchos, no se hace ninguna distinción entre varillas superiores y otras varillas. (Es difícil distinguir entre parte superior y parte inferior cuando se trata de ganchos.)

a) *Recubrimiento.* Cuando los ganchos se hacen con varillas del #11 o más pequeñas y tienen valores de recubrimiento lateral normal al plano de los ganchos no menores de $2\frac{1}{2}$ plg y si el recubrimiento en las extensiones de la varilla más allá de los ganchos de 90° no es menor de 2 plg, multiplique por 0.7.

b) *Estribos.* Cuando los ganchos hechos de varillas #11 o menores están confinados vertical u horizontalmente por estribos a lo largo de su longitud completa de desarrollo ℓ_{dh} y los estribos están separados entre sí a no más de $3d_b$ (donde d_b es el diámetro de la varilla con gancho), multiplique por 0.8. Esta situación se muestra en la figura 7.14. (Las dimensiones detalladas para los ganchos con estribos se dan en la sección 7.1.3 del código ACI.)

c) Cuando se usan ganchos a 180° consistentes en varillas del #11 o más pequeñas que se confinan con estribos colocados perpendicularmente a las varillas a las que se les provee de longitud de desarrollo y los estribos están separados entre sí a no más de $3d$ a lo largo de la longitud de desarrollo ℓ_{dh} del gancho, multiplique por 0.8. Si el gancho a 90° mostrado en la figura 7.14 es remplazado con un gancho a 180° y los estribos son perpendiculares (no paralelos) a la varilla longitudinal a la que se le provee de longitud de desarrollo, la figura 7.14 se aplica a este caso igualmente.

d) Si no se requiere en especial longitud de anclaje o de desarrollo para f_y de las varillas, es permisible multiplicar ℓ_{dh} por A_s requerido/A_s suministrado.

El peligro de una falla por agrietamiento del concreto es realmente alto, si tanto el recubrimiento lateral (perpendicular al gancho) como el superior e inferior (en el plano del gancho) son pequeños. Por consiguiente el código (12.5.4) establece que cuando se usen ganchos estándares con recubrimiento tanto lateral como superior e inferior menor de $2\frac{1}{2}$ plg, en los extremos discontinuos de miembros, los ganchos deberán rodearse con estribos separados a no más de $3d_b$ en toda la longitud de desarrollo ℓ_{dh}. El primer amarre o estribo debe confinar la parte doblada del gancho dentro de una distancia de $2d_{bh}$ del exterior del doblez. Además, el factor de modificación 0.8 de los incisos (*b*) y (*c*) en este punto no será aplicable. Si la varilla longitudinal a la cual se le provee longitud de desarrollo con el gancho mostrado en la figura 7.14 estuviera en un extremo discontinuo de un miembro, tal como el extremo libre de una

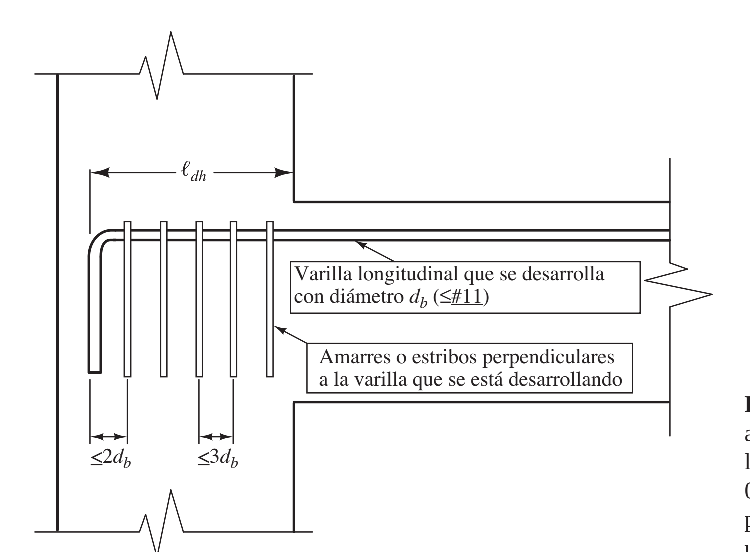


Figura 7.14 Detalle del estribo o el amarre para ganchos a 90° que llenan los requisitos con el multiplicador 0.8. Los estribos o amarres mostrados pueden ser verticales (como se ilustra) u horizontales.

viga en voladizo, se *requieren* los estribos mostrados en esa figura a menos que los recubrimientos lateral y superior sean de por lo menos 2½ plg.

El ejemplo 7.6, que sigue, ilustra los cálculos necesarios para determinar las longitudes de desarrollo requeridas en el apoyo para las varillas de tensión de una viga en voladizo. Se determinan las longitudes para varillas rectas o con ganchos.

EJEMPLO 7.6

Determinar la longitud de desarrollo o empotramiento requerida para las varillas recubiertas con epóxido de la viga mostrada en la figura 7.15.

a) Si las varillas son rectas, suponiendo $K_{tr} = 0$.

b) Si se usa un gancho de 180°.

c) Si se usa un gancho de 90°.

Las seis varillas mostradas del #9 se consideran como varillas superiores. $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN **a) Varillas rectas**

$\psi_t = 1.3$ para varillas superiores

$\psi_e = 1.5$ para varillas recubiertas con recubrimiento $< 3d_b$ o separación libre $< 6d_b$

$\psi_t\psi_e = (1.3)(1.5) = 1.95 > \underline{1.7 \therefore \text{use } 1.7}$

$\psi_s = 1.0$ para varillas #9

$\lambda = 1.0$ para concreto de peso normal

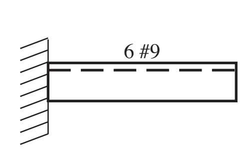
$c_b =$ recubrimiento lateral $=$ recubrimiento superior $= 2.5$ plg

$c_b =$ media distancia centro a centro de separación entre varillas $= 2.25$ plg ←

$$\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = \frac{2.25 + 0}{1.128} = 1.99 < 2.5 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{60\,000}{(1.0)\sqrt{4\,000}}\right)\frac{(1.7)(1.0)}{1.99} = 61 \text{ diámetros}$$

$$\ell_d = (61)(1.128) = \underline{\underline{69 \text{ plg}}}$$



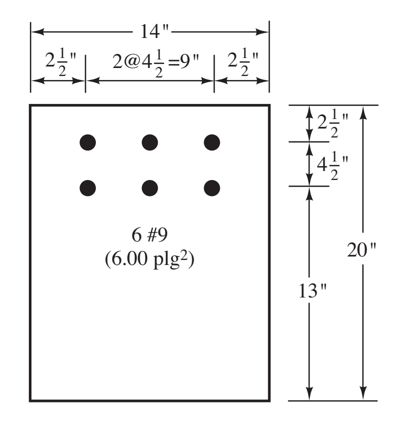


Figura 7.15

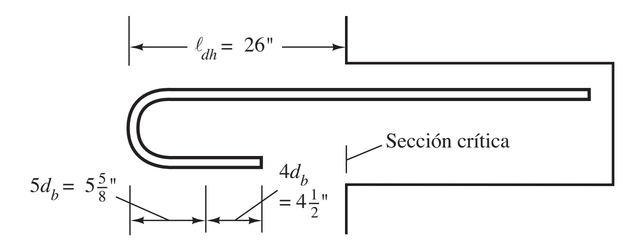


Figura 7.16 Gancho de 180°.

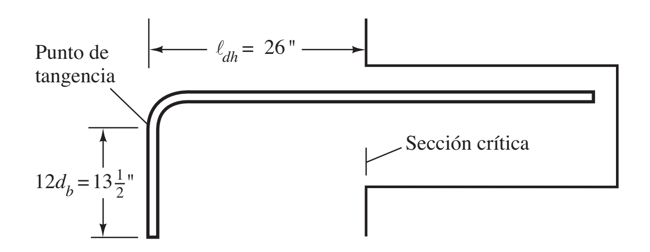


Figura 7.17

b) Usando ganchos de 180° (véase la figura 7.16) observe que $\psi_e = 1.2$ como se requiere en la sección 12.5.2 del ACI para ganchos recubiertos con epóxido

$$\ell_{dh} = \frac{0.02\psi_e f_y d_b}{\lambda\sqrt{f'_c}} = \frac{(0.02)(1.2)(60\,000)(1.128)}{(1.0)\sqrt{4\,000}}$$

$$= 25.68 \text{ plg} \quad \underline{\underline{\text{Digamos 26 plg}}}$$

Nota: Las dimensiones mostradas en la sección transversal de la viga (figura 7.15) indican 2½ plg del centro de la varilla a la parte superior y al lado de la viga. El recubrimiento es $2.5 - d_b/2 = 1.936'' < 2.5''$. Si este gancho estuviera en el extremo libre de una viga en voladizo, se requerirían estribos y el factor de reducción de 0.8 no sería aplicable. En este ejemplo, el gancho está en una columna, así es que no se requieren estribos especiales. Si se suministraran, sería aplicable una reducción de 0.8. En este ejemplo, no son provistos.

c) Usando ganchos de 90° (véase la figura 7.17)

$$\ell_{dh} = 26''$$

ya que el factor de reducción de 0.8 no aplica porque no se proveen estribos.

7.6 LONGITUDES DE ANCLAJE PARA MALLA DE ALAMBRE SOLDADA EN TENSIÓN

La sección 12.7 del código ACI provee las longitudes de desarrollo mínimas requeridas para mallas soldadas de alambre corrugado, en tanto que la sección 12.8 provee los valores mínimos para malla soldada de alambre simple.

La longitud de desarrollo mínima requerida para malla de alambre corrugado soldada en tensión medida desde la sección crítica, es igual al valor determinado para ℓ_d según la sección 12.2.2 o 12.2.3 del ACI multiplicado por un factor de malla de alambre, ψ_w, según la sección 12.7.2 o 12.7.3 del ACI.

Este factor, que se muestra en seguida, contiene el término *s*, que es la separación del alambre por desarrollar. La longitud de desarrollo resultante no debe ser menor de 8 plg, excepto en el cálculo de empalmes. Podrá notarse que los recubrimientos epóxidos parecen tener poco efecto sobre las longitudes requeridas para la malla de alambre soldada y por ello es permisible usar $\psi_e = 1.0$.

El factor de malla de alambre, ψ_w, para malla de alambre soldada con por lo menos un alambre transversal dentro de la longitud de desarrollo a no menos de 2 plg de la sección crítica es

$$\psi_w = \frac{f_y - 35\,000}{f_y} \text{ no menor que } \frac{5d_b}{s}$$

pero no tiene que tomarse > 1.0.

En unidades SI para malla de alambre soldada con por lo menos un alambre transversal dentro de la longitud de desarrollo, a no menos de 50 mm desde el punto de la sección crítica, el factor de malla de alambre ψ_w, es $\frac{f_y - 240}{f_y}$ no menor que $\frac{5d_b}{s}$, pero no tiene que tomarse > 1.0.

La resistencia de fluencia de la malla de alambre liso soldada se considera adecuadamente desarrollada por dos alambres transversales si el más cercano no está a menos de 2 plg de la sección crítica. Sin embargo, el código (sección 12.8) dice que la longitud de desarrollo, ℓ_d, medida de la sección crítica al alambre transversal más exterior, no debe ser menor que el valor calculado con la siguiente ecuación, en donde A_w es el área del alambre individual que va a desarrollarse.

$$\ell_d = 0.27\,\frac{A_w}{s}\left(\frac{f_y}{\lambda\sqrt{f'_c}}\right) \text{ pero no } < 6 \text{ plg}$$

O en unidades SI

$$\ell_d = 3.3\,\frac{A_w}{s}\left(\frac{f_y}{\lambda\sqrt{f'_c}}\right) \text{ pero no } < 150 \text{ mm}$$

Las longitudes de desarrollo obtenidas para el alambre liso o el corrugado se pueden reducir, así como lo fueron longitudes de desarrollo anteriores, multiplicándolas por ($A_{s \text{ requerido}}/A_{s \text{ suministrado}}$) (ACI 12.2.5), pero los resultados no deben ser menores que los valores mínimos dados anteriormente.

7.7 LONGITUDES DE ANCLAJE PARA VARILLAS A COMPRESIÓN

No se tiene mucha información experimental disponible acerca de los esfuerzos de adherencia y sobre las longitudes necesarias de empotramiento para el acero de compresión. Sin embargo, es obvio que las longitudes de empotramiento deben ser menores que las requeridas para las varillas de tensión. Una razón para ello es que no se tienen grietas de tensión que faciliten el deslizamiento. Otra es que se tiene algún apoyo de los extremos de las varillas sobre el concreto, lo que también ayuda a desarrollar (anclar) la carga.

El código (12.3.2) establece que la longitud de desarrollo básica mínima provista a las varillas de compresión (ℓ_{dc}) no debe ser menor que el valor calculado con la siguiente expresión:

$$\ell_{dc} = \frac{0.02 f_y d_b}{\lambda\sqrt{f'_c}} \geq 0.0003 f_y d_b \text{ pero no menor que 8 plg}$$

O en unidades SI

$$\ell_{dc} = \frac{0.02 f_y d_b}{\lambda\sqrt{f'_c}} \geq 0.0003 f_y d_b \text{ pero no menor que 200 mm}$$

Si se usa más acero de compresión que el requerido por el análisis, ℓ_{dc} se puede multiplicar por ($A_{s\ \text{requerido}}/A_{s\ \text{suministrado}}$) de acuerdo con la sección 12.3.3 del ACI. Cuando las varillas están rodeadas por espirales en cualquier clase de miembros de concreto, los miembros resultan considerablemente más resistentes debido al confinamiento o restricción lateral del concreto. El uso normal de espirales se da en las columnas zunchadas, que se estudian en el capítulo 9. Si las varillas de compresión están rodeadas por espirales de diámetro no menor que $\frac{1}{4}$ plg y paso no mayor que 4 plg, o para estribos del #4 espaciados a no más de 4 plg centro a centro, el valor de ℓ_{dc} se puede multiplicar por 0.75 (ACI 12.3.3). En ningún caso la longitud de desarrollo puede ser menor que 8 plg. Por tanto

$$\ell_d = \ell_{dc} \times \text{factores de modificación aplicables} \geq 8.0 \text{ plg}$$

En el ejemplo 7.7 se presenta un problema introductorio de longitud de desarrollo para varillas en compresión. Las fuerzas en las varillas en el fondo de la columna de la figura 7.18 deben transmitirse mediante espigas a la zapata de concreto reforzado. Las espigas como las mostradas usualmente se doblan en sus partes inferiores (como se muestra en la figura) y se fijan firmemente al refuerzo principal de la zapata. Sin embargo, el doblez o los ganchos de las espigas no cuentan como parte de las longitudes de desarrollo requeridas para varillas a compresión (ACI 12.5.5), ya que son ineficaces.

De manera similar, las fuerzas en las espigas deben anclarse o desarrollarse dentro de la columna. En el ejemplo 7.7, las longitudes de desarrollo requeridas dentro de la columna y en la zapata son diferentes, porque los valores de f'_c para la zapata y para la columna son diferentes en este caso. El tema de las espigas y la transmisión de fuerza de muros y columnas a zapatas se estudian con cierto detalle en el capítulo 12. (Las longitudes de desarrollo determinadas en este ejemplo son para varillas a compresión, como es el caso normalmente en la base de las columnas. sin embargo, si es posible un levantamiento de la columna, será necesario considerar las longitudes de desarrollo por tensión, que seguramente serán los valores que rijan.)

EJEMPLO 7.7

Las fuerzas en las varillas de la columna de la figura 7.18 deben transmitirse a la zapata por medio de espigas del #9. Determinar las longitudes de desarrollo necesarias para las espigas *a*) dentro de la zapata y *b*) dentro de la columna si $f_y = 60\,000$ lb/plg^2. El concreto en la columna y en la zapata es de peso normal.

SOLUCIÓN **a)** Hacia abajo en la zapata,

$$\ell_{dc} = \frac{0.02 d_b f_y}{\lambda\sqrt{f'_c}} = \frac{(0.02)(1.128)(60\,000)}{(1.0)\sqrt{3\,000}} = 24.71'' \leftarrow$$

$$\ell_{dc} = (0.0003)(1.128)(60\,000) = 20.30''$$

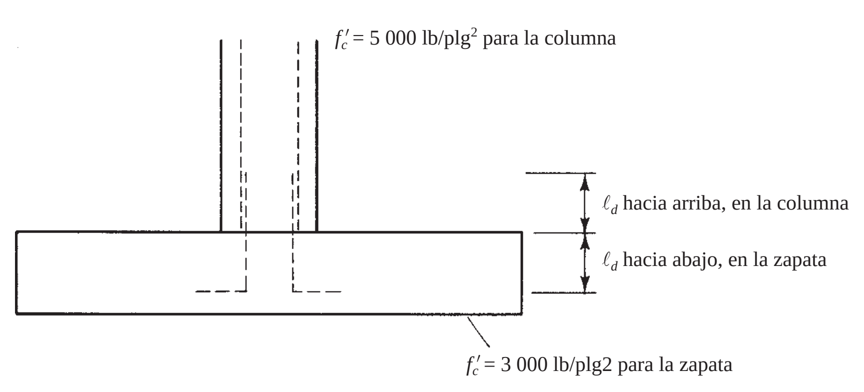


Figura 7.18

Por tanto, $\ell_d = 24.71''$, digamos 25″, ya que no hay factores de modificación aplicables. De ninguna manera ℓ_d puede ser menor que 8 plg

b) Hacia arriba en la columna,

$$\ell_{dc} = \frac{(0.02)(1.128)(60\ 000)}{(1.0)\sqrt{5\ 000}} = 19.14''$$

$$\ell_{dc} = (0.0003)(1.128)(60\ 000) = 20.30'' \longleftarrow$$

Por tanto $\ell_d = 20.30''$, digamos 21″ (no puede ser < 8″), ya que no hay factores de modificación aplicables. (*Respuesta:* Prolongue las espigas 25″ hacia dentro de la zapata y 21” hacia arriba en la columna.)

Nota: Los detalles de las varillas mostrados en la figura 7.18 son poco satisfactorios para las zonas sísmicas, ya que las varillas deberían doblarse hacia dentro y no hacia afuera. La razón para este requisito es que el código, en el capítulo 21, sobre diseño sísmico, dispone que los ganchos deben ahogarse en concreto confinado.

7.8 SECCIONES CRÍTICAS PARA LA LONGITUD DE ANCLAJE

Antes de aplicar en detalle las expresiones para la longitud de desarrollo, es necesario entender claramente cuáles son los puntos críticos para los esfuerzos de tensión y compresión en las varillas a lo largo de la viga.

Primero, es obvio que las varillas trabajarán a sus esfuerzos máximos en aquellos puntos en que ocurren los momentos máximos. Por tanto, esos puntos no deben estar más cercanos en cualquier dirección a los extremos de la varilla que los valores ℓ_d calculados.

Sin embargo, existen otros puntos críticos para las longitudes de desarrollo. Por ejemplo, se presenta una situación crítica siempre que las varillas vecinas de una varilla de tensión han sido cortadas o dobladas hacia la otra cara de la viga. Teóricamente, si el momento se reduce a un tercio, una tercera parte de las varillas se cortan o doblan y las varillas restantes quedan trabajando a sus esfuerzos de fluencia. Para esas varillas serían requeridas las longitudes de desarrollo totales.

Esto podría traer a colación otras consideraciones en la estimación de la longitud de desarrollo requerida para las varillas restantes. El código (12.10.3) requiere que las varillas que se corten o doblen se prolonguen una distancia más allá de sus puntos teóricos de corte a flexión de d o 12 diámetros de las varillas, lo que sea mayor. Además, el punto en que las otras varillas se cortan o doblan debe estar por lo menos a una distancia ℓ_d de sus puntos de esfuerzo máximo (ACI 12.10.4). Por ende, estos dos requisitos muy bien podrían dar lugar a que las varillas restantes trabajen a un esfuerzo menor que f_y, lo que permitiría que sus longitudes de desarrollo se reduzcan. Sin embargo, normalmente se aplica un punto de vista conservador, en el que se supone que las varillas restantes trabajan a un esfuerzo f_y.

7.9 EFECTO DEL MOMENTO Y EL CORTANTE COMBINADOS EN LAS LONGITUDES DE ANCLAJE

El código ACI no considera específicamente el hecho de que el cortante afecta al esfuerzo de tensión por flexión en el refuerzo. El código (12.10.3) ciertamente requiere que las varillas se extiendan una distancia no menor que el peralte efectivo d del miembro o 12 diámetros de las varillas, rigiendo lo que sea mayor, más allá del punto teórico del corte. El comentario (R12.10.3) establece que esta extensión se requiere para tomar en cuenta el hecho de que las posiciones de los momentos máximos pueden desplazarse debido a cambios en la carga, el asentamiento de los apoyos, y a otros factores. Puede demostrarse que una grieta de tensión diagonal en una viga sin estribos puede desplazar la posición del esfuerzo de tensión calculado a una distancia aproximadamente igual a d hacia el punto de momento nulo. Cuando se tienen estribos, el efecto existe todavía pero en forma menos severa.

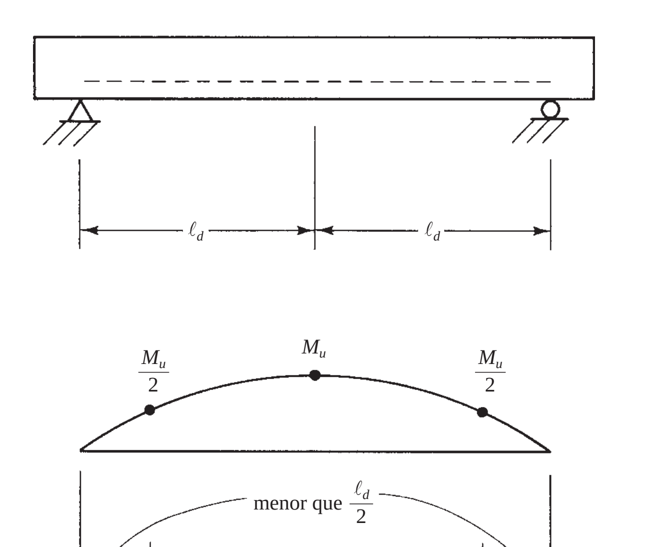


Figura 7.19

El efecto combinado del cortante y la flexión actuando simultáneamente sobre una viga puede producir una falla prematura debido al sobreesfuerzo del refuerzo por flexión. El profesor Charles Erdei[4-6] ha investigado considerablemente este tema. Sus investigaciones han demostrado que el refuerzo del alma participa en la resistencia al momento flexionante. Demostró que la presencia de grietas inclinadas aumenta la fuerza en el refuerzo de tensión en todos los puntos del claro a cortante, excepto en la región de momento máximo. El resultado equivale a tener un diagrama de momentos desplazado y esto conduce a considerar que ℓ_d debería medirse en el diagrama de momentos desplazado y no en el diagrama básico. El profesor Erdei explica claramente el desplazamiento del momento y la relación entre la longitud de desarrollo y el desplazamiento del diagrama de momentos.

El extinto profesor P.M. Ferguson[7] estableció que, decidamos o no usar el concepto de momento desplazado, es conveniente escalonar los puntos de corte de las varillas (y que aún es mejor doblarlas que cortarlas).

7.10 EFECTO DE LA FORMA DEL DIAGRAMA DE MOMENTO EN LAS LONGITUDES DE ANCLAJE

Una consideración adicional acerca de las longitudes de desarrollo mostrará la necesidad de tomar en cuenta la forma del diagrama de momento. Para ilustrar este punto, consideremos la viga uniformemente cargada que se muestra en la figura 7.19 con su diagrama parabólico de momentos. *Se supondrá que la longitud de las varillas de refuerzo a cada lado del centro de la viga es igual a la longitud de desarrollo ℓ_d calculada.* El análisis que sigue mostrará que esta distancia no es suficiente para desarrollar propiamente las varillas para este diagrama de momentos.[8]

---

[4]Erdei, C.K., 1961,“Shearing Resistance of Beams by the Load-Factor Method”, *Concrete and Constructional Engineering*, 56(9), págs. 318-319.
[5]Erdei, C.K., 1962, “Design of Reinforced Concrete for Combined Bending and Shear by Ultimate Load Theory”, *Journal of the Reinforced Concrete Association*, 1(1).
[6]Erdei, C.K., 1963, “Ultimate Resistance of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear and Bending”, *European Concrete Committees Symposium on Shear,* Wiesbaden, Alemania Occidental, págs. 102-114.
[7]Ferguson, P.M., 1979, Reinforced *Concrete Fundamentals,* 4a. ed. (Nueva York: John Wiley & Sons), pág 187.
[8]Ferguson, *Reinforced Concrete Fundamentals*, págs. 191-193.

En el centro de la viga en la figura 7.19 se supone que el momento es igual a M_u y que las varillas trabajan a un esfuerzo f_y. Entonces, la longitud de desarrollo de las varillas en cualquier lado del centro de la viga no debe ser menor que ℓ_d. Si se desplaza uno a lo largo de este diagrama parabólico de momentos hasta un punto en que el momento ha disminuido al valor de $M_u/2$, es correcto suponer igual a $\ell_d/2$ una longitud de desarrollo requerida desde este punto.

El análisis anterior muestra claramente que las varillas tendrán que prolongarse más allá del centro rebasando la distancia ℓ_d. Para que el momento disminuya a 50%, hay que desplazarse más allá de la mitad hacia el extremo de la viga.

7.11 CORTE O DOBLADO DE LAS VARILLAS DE REFUERZO (CONTINUACIÓN)

En esta sección se presentan algunas observaciones finales respecto al corte de varillas, un tema que se estudió en la sección 7.1. Las últimas secciones han suministrado información considerable relativa a los puntos donde las varillas pueden cortarse. Se presenta aquí un resumen de los requisitos previamente mencionados, conjuntamente con alguna información adicional. Primero se exponen algunos comentarios respecto al corte.

Cuando algunas de las varillas a tensión se cortan en un punto en una viga, ocurre un repentino incremento en el esfuerzo de tensión en las varillas restantes. Para que este incremento ocurra debe existir un aumento considerable en las deformaciones unitarias de la viga. Tales incrementos en las deformaciones muy posiblemente pueden causar grandes grietas de tensión en el concreto. Si éstas se llegan a formar, habrá una sección transversal reducida en la viga para proporcionar resistencia al cortante y, en consecuencia, una mayor posibilidad de falla por cortante.

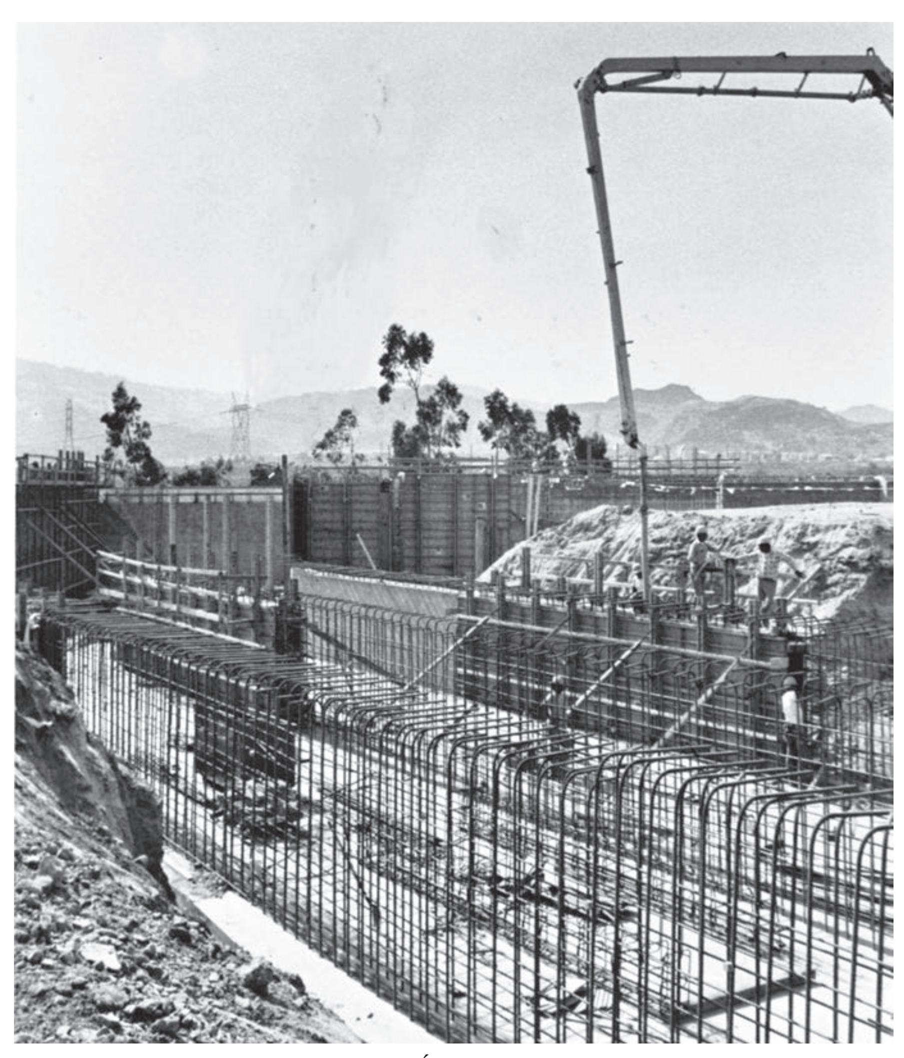
Para minimizar la posibilidad de una falla por cortante, la sección 12.10.5 del código ACI establece que *por lo menos una* de las siguientes condiciones debe cumplirse si se cortan varillas en una zona de tensión:

1. El esfuerzo cortante en el punto de corte no debe exceder de dos terceras partes de la resistencia de diseño al cortante ϕV_n en la viga, incluyendo la resistencia de cualquier refuerzo por cortante (ACI 12.10.5.1).
2. Debe suministrarse un área del refuerzo por cortante que exceda la requerida para cortante y torsión para una distancia igual a $\frac{3}{4}d$ del punto de corte. El área mínima de este refuerzo y su separación máxima se dan en la sección 12.10.5.2 del código.
3. Cuando se usan varillas del #11 o menores, las varillas no cortadas deben proveer el doble del área de acero requerida para la flexión en el punto de corte y el cortante no debe exceder tres cuartos del cortante permisible (ACI 12.10.5.3).

Los diagramas de momentos usados en diseño son sólo aproximados. Las variaciones en la carga, el asentamiento de los apoyos, la aplicación de cargas laterales y otros factores pueden causar cambios en esos diagramas. En la sección 7.9 de este capítulo vimos que las fuerzas cortantes pueden alterar apreciablemente los esfuerzos de tensión en las varillas de refuerzo, cambiando así los diagramas de momento. Como resultado de estos factores, el código (12.10.3) dice que las varillas de refuerzo deben continuarse en una distancia de 12 diámetros de varilla o el peralte efectivo d del miembro, el que sea mayor (excepto en los soportes de claros simples y en los extremos libres de vigas en voladizo), más allá de sus puntos teóricos de corte.

Hay otras reglas diversas para las longitudes de desarrollo que se aplican específicamente al refuerzo de momento positivo, al refuerzo de momento negativo y a las vigas continuas. Estas reglas se estudiarán en el capítulo 14 de este texto. Otro tema que se verá en ese capítulo y que es de considerable interés para los estudiantes, son las reglas empíricas que frecuentemente se usan en la práctica para determinar los puntos de corte y de doblado de las varillas.

En el ejemplo 7.8 se presenta otro ejemplo de longitud de desarrollo más bien breve. Se selecciona una sección rectangular satisfactoria con su refuerzo para la condición de carga y claro dados. Se busca determinar dónde pueden cortarse dos de las cuatro varillas, considerando tanto el momento como la longitud de anclaje.



Proyecto hidráulico en el Condado de Los Ángeles. (Cortesía de The Burke Company.)

EJEMPLO 7.8

La viga de sección rectangular con cuatro varillas del #8 mostrada en la figura 7.20(*b*) se ha seleccionado para la carga y claro mostrados en la parte (*a*) de la figura. Determinar el punto de corte para dos de las varillas, considerando el diagrama real de momentos y la longitud de desarrollo requerida.

La capacidad por momento de diseño (ϕM_n) de esta viga se ha calculado como igual a 359.7 pie-klb cuando tiene cuatro varillas, e igual a 185.3 pie-klb cuando tiene dos varillas. (Observe que ρ con dos varillas $= \frac{1.57}{(18)(27)} = 0.00323 < \rho_{\text{mín}} = \frac{200}{60\,000} = 0.00333$, pero este valor se considera lo suficientemente cercano.) Además, ℓ_d para las varillas se ha determinado igual a 41 plg, usando la ecuación 12-1 del ACI con $\lambda = 0.75$ y $K_{tr} = 0.275$ basándose en estribos del #3 para $s = 8$ plg (parecido al ejemplo 7.4).

SOLUCIÓN La solución para este problema se muestra en la figura 7.21. Las dos varillas comienzan en el extremo izquierdo de la viga. Como no se dispone de longitud de desarrollo, la capacidad de momento de diseño del miembro es cero. Si nos movemos una distancia ℓ_d del punto *A* en el extremo izquierdo de la viga al punto *B*, la capacidad de momento de diseño aumentará linealmente de 0 a 185.3 pie-klb. Del punto *B* al punto *C* permanece igual a 185.3 pie-klb.

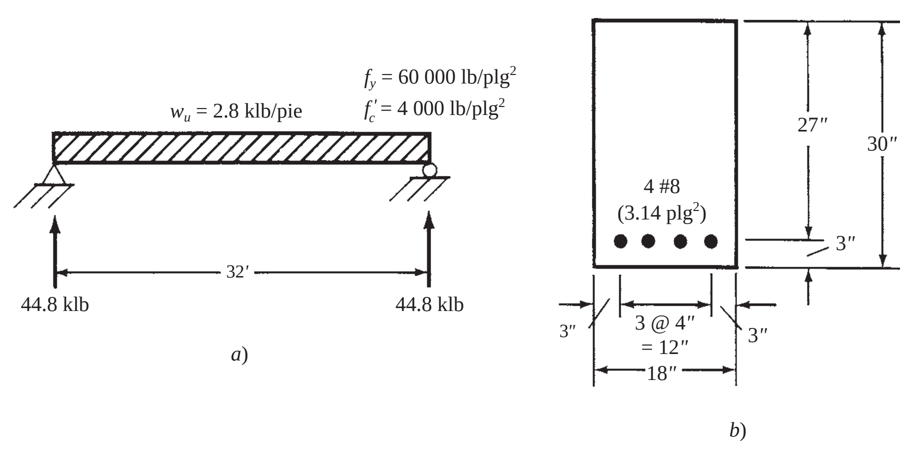


Figura 7.20

En el punto *C* se alcanza el punto de corte de las varillas, y de *C* a *D* (una distancia igual a ℓ_d) la capacidad de momento de diseño aumentará de 185.3 pie-klb a 359.7 pie-klb. (En la figura 7.21(*a*) las varillas parecen estar en dos lechos. Están realmente en un solo nivel, pero el autor las ha mostrado de esta manera para que el lector pueda ver mejor cuántas varillas hay en cualquier punto a lo largo de la viga.)

La resistencia de diseño de la viga no puede ser menor en ningún punto a lo largo del claro que el momento flexionante verdadero causado por las cargas. Podemos ver entonces que el punto *C* está localizado donde el momento flexionante verdadero es igual a 185.3 pie-klb. La reacción de la izquierda para esta viga es de 44.8 klb, como se muestra en la figura 7.20(*a*). Usando este valor, se escribe una expresión para el momento en el punto *C* (185.3 pie-klb) a una distancia *x* del apoyo izquierdo. De la expresión resultante puede despejarse *x*.

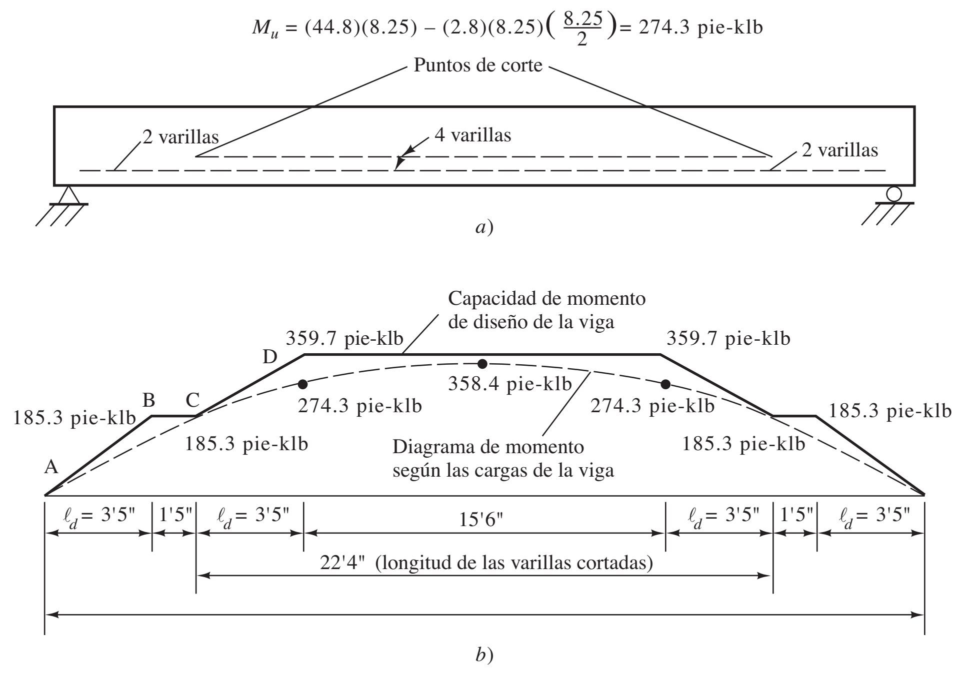


Figura 7.21

$$44.8x - (2.8x)\left(\frac{x}{2}\right) = 185.3$$
$$x = 4.88 \text{ pies} \quad \text{Digamos a 4 pies 10 plg}$$

Cuando se alcanza el punto *D* (3 pies 5 plg a la derecha de *C* y 8 pies 3 plg del apoyo izquierdo), la capacidad de momento requerida es

$$M_u = (44.8)(8.25) - (2.8)(8.25)\left(\frac{8.25}{2}\right) = 274.3 \text{ pie-klb}$$

En esta sección se hizo referencia anteriormente a la sección 12.10.5 del ACI, que considera el cortante en los puntos de corte. Se supone que esta viga estará diseñada correctamente para cortante, tal como se describe en el siguiente capítulo y que se cumplirán los requisitos del ACI.

7.12 EMPALMES DE VARILLAS EN MIEMBROS A FLEXIÓN

Los empalmes de campo en las varillas de refuerzo suelen ser necesarios debido a las limitaciones en las longitudes de las varillas disponibles, a los requisitos de juntas de construcción y a los cambios de varillas grandes a varillas más pequeñas. Aunque los fabricantes de acero normalmente surten las varillas de refuerzo en longitudes de 60 pies, conviene a menudo trabajar en el campo con varillas de longitudes más cortas, necesitando así el uso de empalmes con más frecuencia.

El lector debe notar cuidadosamente que el código ACI, en sus secciones 1.2.1(h) y 12.14.1 claramente establece que el proyectista es responsable de las especificaciones de los tipos y posiciones de los empalmes de refuerzo.

El método más común de empalmar varillas del #11 o menores es simplemente traslapar las varillas una sobre la otra. Las varillas traslapadas pueden estar separadas entre sí o estar en contacto; se prefieren los empalmes con las varillas en contacto, ya que entonces éstas pueden unirse con alambre. Tales varillas mantienen mejor sus posiciones durante el colado del concreto. Aunque los empalmes traslapados son fáciles de armar, la naturaleza complicada tanto de la transferencia de los esfuerzos como de las grietas locales que con frecuencia ocurren cerca de los extremos de las varillas, es una desventaja. Obviamente, los esfuerzos de adherencia juegan una parte importante en la transferencia de las fuerzas de una varilla a otra. Por esto, las longitudes requeridas de empalme se relacionan estrechamente con las longitudes de desarrollo. Es necesario comprender que la distancia libre mínima especificada entre varillas, también se aplica a la distancia de contacto en los empalmes traslapados y empalmes adyacentes (ACI, sección 7.6.4).

Los empalmes traslapados no son muy satisfactorios en varias situaciones. Entre éstas se cuentan: 1) cuando ocasionan hacinamiento; 2) cuando los traslapes resultan muy largos, como para las varillas #9 al #11 del grado 60; 3) cuando deben usarse varillas #14 o #18 porque el código (12.14.2) no permite que éstas se empalmen por traslape, excepto en algunas situaciones especiales y 4) cuando se dejan sobresalir varillas de longitudes muy largas de las estructuras existentes de concreto para propósitos de ampliación futura. Para tales situaciones pueden usarse otros tipos de empalmes, tales como los soldados o los hechos con dispositivos mecánicos. Los empalmes soldados, desde el punto de vista de la transmisión de esfuerzos, son los mejores empalmes, pero pueden ser caros y causar problemas metalúrgicos. El resultado puede ser en particular desastroso en zonas de alta sismicidad. El código ACI (12.14.3.4) estipula que los empalmes soldados deben efectuarse por medio de soldaduras laterales, a fin de que la conexión sea capaz de desarrollar al menos 125% de la resistencia de fluencia especificada de las varillas. Se considera preferible el empalme a tope las varillas, en particular cuando se usan varillas #7 o mayores. Los empalmes que no cumplan estos requisitos de resistencia pueden emplearse en puntos donde las varillas no estén esforzadas a sus esfuerzos máximos de tensión. Debe tenerse presente que los empalmes soldados son usualmente los más caros debido al alto precio de la mano de obra y a los costos de una supervisión adecuada.

Los conectores mecánicos consisten comúnmente en algún tipo de manguete de empalme que se ajusta en los extremos de las varillas por conectar, y dentro del cual se coloca una lechada metálica de relleno para interbloquear las ranuras dentro del manguito con las corrugaciones de la varilla. Desde el punto de vista de la transferencia de esfuerzos, los buenos conectores mecánicos son los mejores tipos de unión después de los empalmes soldados. Tienen la desventaja de que puede ocurrir algún deslizamiento en las conexiones y, por tanto, presentarse algunas grietas en el concreto en la zona de empalme.

Antes de presentar los requisitos específicos del código ACI, haremos algunos comentarios generales que expliquen brevemente los antecedentes de tales requisitos. Los siguientes comentarios están tomados de un artículo publicado por George F. Leyh del CRSI.[9]

1. El empalme del refuerzo nunca puede reproducir exactamente el mismo efecto que un refuerzo continuo.
2. La meta de las disposiciones de empalmes es requerir una condición dúctil donde el refuerzo fluya antes de que falle la conexión. Las fallas en los empalmes ocurren repentinamente sin dar aviso y con resultados peligrosos.
3. Los empalmes traslapados fallan debido a la separación del concreto a lo largo de las varillas. Si algún tipo de refuerzo cerrado envuelve al refuerzo principal (como los estribos y espirales para columnas descritos en el capítulo 9), se reduce la probabilidad de una separación y se necesitarán entonces longitudes menores de traslape.
4. Cuando los esfuerzos en el refuerzo se reducen en la zona de empalme, se aminora también la probabilidad de una falla de la conexión. Por esta razón, los requisitos del código son menos restrictivos cuando los esfuerzos son pequeños.

Los empalmes deben situarse lejos de los puntos de esfuerzo máximo de tensión. Además, no todas las varillas deben empalmarse en la misma sección, sino que tales posiciones deben ser escalonadas. Si tienen que empalmarse dos varillas traslapadas de diámetros diferentes, la longitud del traslape usado debe ser igual a la longitud requerida para la varilla menor, o bien, a la longitud de desarrollo requerida para la varilla mayor, rigiendo el valor mayor (Código ACI, artículo 12.15.3).

La longitud de un empalme traslapado para varillas en racimo debe ser igual a la longitud requerida para las varillas individuales del mismo tamaño, pero incrementada 20% en haces de tres varillas y 33% en racimos de cuatro varillas (Código ACI, artículo 12.4) porque hay un área menor de contacto entre las varillas y el concreto, y por tanto menor adherencia. Además, no se permite que los empalmes individuales dentro del haz se traslapen entre sí.

7.13 EMPALMES A TENSIÓN

El código (12.15) divide los empalmes a tensión traslapados en dos clases, la A y la B. La clase de empalme por usar depende del nivel de esfuerzo en el refuerzo y del porcentaje de acero que se empalma en una posición dada.

Los *empalmes de clase A* son aquellos donde el refuerzo se traslapa una distancia mínima de 1.0 ℓ_d (pero no menor de 12 plg) y donde la mitad o menos del refuerzo se empalma en cualquier punto.

Los *empalmes de clase B* son aquellos donde el refuerzo se traslapa una distancia mínima de 1.3 ℓ_d (pero no menos de 12 plg) y donde todo el refuerzo se empalma en la misma posición.

El código (12.15.2) establece que los empalmes traslapados de varillas corrugadas y alambre corrugado en tensión, deben ser de la clase B, a menos que: 1) el área de refuerzo provista sea igual a dos o más veces el área requerida por el análisis sobre la longitud entera del empalme y 2) que la mitad o menos del refuerzo se empalme dentro de la longitud de traslape requerida. En la tabla 7.3 se suministra un resumen de esta información, que es la tabla R12.15.2 del Comentario del ACI.

[9] Portland Cement Association, 1972, *Proceedings of the PCA-ACI Teleconference on ACI 318-71 Building Code Requirements* (Skokie, Illinois: Portland Cement Association), pág. 14-1.

Tabla 7.3 Empalmes traslapados a tensión.

	Porcentaje máximo de A_s empalmada dentro de la longitud de traslape requerida	
$\dfrac{A_{s\ \text{proporcionada}}}{A_{s\ \text{requerida}}}$	50	100
Igual a o mayor que 2	Clase A	Clase B
Menor que 2	Clase B	Clase B

Al calcular la ℓ_d se debe multiplicar por 1.0 o 1.3, la reducción por el exceso de refuerzo suministrado no debe usarse porque la clase de empalme (A o B) ya refleja cualquier exceso de esfuerzo en la posición del empalme (véase el Comentario R12.15.1 del ACI).

7.14 EMPALMES A COMPRESIÓN

Las varillas a compresión pueden empalmarse mediante traslape, mediante apoyo a tope y mediante soldadura o dispositivos mecánicos. (Los dispositivos mecánicos constan de varillas o placas u otras piezas soldadas o fijadas transversalmente de alguna manera a las varillas de flexión en las posiciones en donde no está disponible suficiente anclaje.) El código (12.16.1) dice que la longitud mínima de empalme de tales varillas debe ser igual a $0.0005 f_y d_b$ para varillas con f_y de 60 000 lb/plg^2 o menos $(0.0009 f_y - 24) d_b$ para varillas con valores superiores de f_y, pero no menor de 12 plg. Si la resistencia del concreto es menor que 3 000 lb/plg^2, es necesario incrementar en un tercio los traslapes calculados. Se dan valores reducidos en el código para casos donde las varillas están rodeadas por estribos o espirales (12.17.2.4 y 12.17.2.5).

La longitud requerida de los empalmes traslapados para varillas a compresión de diferentes tamaños, es la mayor de las longitudes de empalme calculadas para las varillas menores o la longitud de anclaje a compresión, ℓ_{dc} de las varillas mayores. Es permitido traslapar varillas #14 y #18 a compresión con varillas #11 y menores (12.16.2).

La transmisión de fuerzas entre varillas que siempre trabajan a compresión puede hacerse mediante apoyo a tope de acuerdo con la sección 12.16.4 del código. Para que tal transmisión sea permitida, las varillas deben recortarse a escuadra en sus extremos (con tolerancia de $1\frac{1}{2}°$ de ángulo recto), deben ajustarse con una tolerancia de 3° de apoyo completo después del ensamblado, y deben estar adecuadamente confinadas (con amarres cerrados, estribos cerrados o espirales). La sección 12.17.4 establece además que cuando se usan empalmes a tope en columnas, en cada cara de la columna debe agregarse



Empalme de cople extruido. (Cortesía de la Dywidag Systems International, USA, Inc.)

un refuerzo adicional que sea capaz de suministrar una resistencia a la tensión de por lo menos 25% de la resistencia a la fluencia del refuerzo vertical presente en esa cara.

El código (12.14.2.1) prohíbe el uso de empalmes traslapados para varillas #14 o #18, con una excepción. Cuando las varillas para columnas de esos tamaños están en compresión, se permite conectarlas a las zapatas por medio de espigas de menores tamaños con traslapes, tal como se describe en la sección 15.8.2.3 del código.

7.15 VARILLAS ANCLADAS MECÁNICAMENTE Y CON ANCLAJE INTERNO

Las varillas corrugadas con anclaje interno (figura 1.3) se añadieron al código en la edición de 2008. Tales dispositivos transfieren la fuerza de la varilla al concreto a través de una combinación de fuerza de apoyo en el ancla interna y fuerzas de adherencia a lo largo de la varilla. Hay varias limitaciones para el uso de varillas con anclaje interno, como sigue:

a) el valor de f_y de la varilla no excederá de 60 000 lb/plg^2

b) el tamaño de la varilla no excederá al Núm. 11

c) el concreto será de peso normal

d) el área neta de apoyo del ancla interna A_{brg} no será menor que 4 veces el área de la varilla A_b

e) el recubrimiento libre de la varilla no será menor de $2d_b$

f) La separación libre entre varillas no será menor de $4d_b$

Los requisitos de recubrimiento libre y separación libre en (e) y (f) se miden con respecto a la varilla, no el ancla interna.

La longitud de desarrollo en tensión para varillas corrugadas con anclaje interno que cumplen con ASTM A970 y otros requisitos especiales relacionados con las obstrucciones (sección 3.5.9 del ACI) está dada por:

$$\ell_{dt} = \frac{0.016\psi_e f_y}{\sqrt{f'_c}} d_b$$

Al aplicar esta ecuación, f'_c no puede ser mayor que 6 000 lb/plg^2, y ψ_e es 1.2 para varillas con recubrimiento epóxido y 1.0 de otra manera. El valor calculado de ℓ_{dt} no puede ser menor que $8d_b$ o 6 plg, el que sea mayor. El multiplicador usado anteriormente $(A_{s\text{ requerida}}/A_{s\text{ suministrada}})$ está permitido excepto en casos en donde el desarrollo de f_y se requiere específicamente. No hay términos λ, ψ_t o ψ_s en esta expresión.

En unidades SI, $\ell_{dt} = \dfrac{0.192\psi_e f_y}{\sqrt{f'_c}} d_b$

El código también permite otros dispositivos mecánicos (ACI 12.6.4) que han demostrado ser efectivos mediante pruebas y que han sido aprobados por el inspector de obras.

EJEMPLO 7.9

Repita el ejemplo 7.6 usando una varilla con anclaje interno y compare con los resultados del ejemplo 7.6.

$$\ell_{dt} = \frac{0.016\psi_e f_y}{\sqrt{f'_c}} d_b = \frac{(0.016)(1.2)(60\,000)}{\sqrt{4\,000}} 1.128 = 20.54 \text{ plg, digamos 21 plg}$$

Este valor se compara con 69 plg para una varilla recta y 26 plg para una varilla con gancho a 90 o 180°.

7.16 EJEMPLO CON UNIDADES SI

EJEMPLO 7.10

Determinar la longitud de desarrollo requerida para las varillas inferiores recubiertas de epóxido mostradas en la figura 7.22.

a) suponiendo $K_{tr} = 0$ y

b) calculando K_{tr} con la ecuación apropiada, $f_y = 420$ MPa y $f'_c = 21$ MPa.

SOLUCIÓN De la tabla 6.1

$$\psi_t = 1.0 \text{ para varillas inferiores}$$

$$\psi_e = 1.5 \text{ para varillas recubiertas con epóxido y con separación libre} < 6d_b$$

$$\psi_t \psi_e = (1.0)(1.5) = 1.5 < 1.7 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\psi_s = \lambda = 1.0$$

$$c_b = \text{recubrimiento lateral de las varillas} = 80 \text{ mm}$$

$$c_b = \frac{1}{2} \text{ de la distancia centro a centro de la separación entre varillas} = 40 \text{ mm}$$

a) Usando la ecuación 12-1 del SI con K_{tr} = 0

$$\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = \frac{40 + 0}{25.4} = 1.575 < 2.5 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{9}{10} \frac{f_y}{\lambda \sqrt{f'_c}} \frac{\psi_t \psi_e \psi_s}{\dfrac{c_b + K_{tr}}{d_b}}$$

$$= \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{420}{(1.0)\sqrt{21}}\right)\frac{(1.0)(1.5)(1.0)}{1.575} = \underline{\underline{78.6 \text{ diámetros}}}$$

b) Usando el valor calculado de K_{tr} y la ecuación 12-1 del SI

$$K_{tr} = \frac{42A_{tr}}{sn} = \frac{(42)(2)(71)}{(200)(4)} = 7.45$$

$$\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = \frac{40 + 7.45}{25.4} = 1.87 < 2.5 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

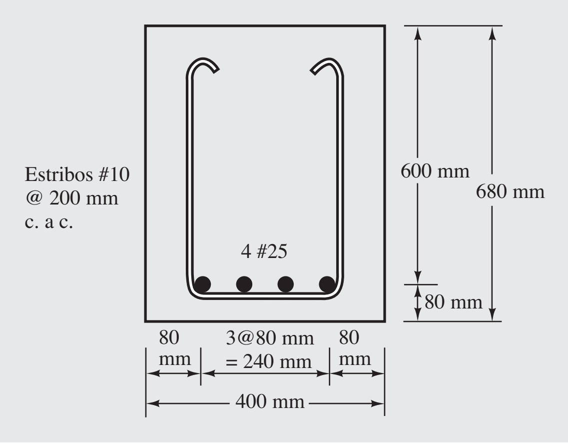


Figura 7.22

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{420}{(1.0)\sqrt{21}}\right)\frac{(1.0)(1.5)(1.0)}{1.87} = \underline{\underline{66.2 \text{ diámetros}}}$$

7.17 EJEMPLO CON COMPUTADORA

EJEMPLO 7.11

Usando la hoja de trabajo titulada Devel length tens - calc As en la hoja de cálculo para el capítulo 7, determinar la longitud de desarrollo ℓ_d en tensión requerida de la viga mostrada en la figura 7.20 si se usa concreto con agregado ligero y estribos #3 a centros de 8 plg.

SOLUCIÓN Ingrese los valores de las celdas en el sombreado amarillo. Algunas celdas son optativas (véase la nota en la salida de abajo). Pase el cursor sobre las celdas para ver los comentarios explicando lo que debe ingresarse. Observe que se dan dos respuestas, una con la reducción $A_{s\text{ reqd}}/A_{s\text{ provided}}$ y una sin ella. En este ejemplo, hay poca diferencia porque esta proporción es casi 1.0.

Longitud de desarrollo, tensión

f'_c =	4 000	lb/plg^2	
f_y =	60 000	lb/plg^2	
f_{yt} =	60 000	lb/plg^2	
b =	18	plg*	
d =	27	plg*	
h =	30	plg*	
A_s =	3.14	plg^2*	
A_{tr} =	0.22	plg^2*	
d_b =	1	plg	
n =	4	*	
s =	8	plg*	
ψ_t =	1.00		
ψ_e =	1.00		*Las celdas indican que esta información es
ψ_s =	1.00		optativa. M_u, b, d, h y A_s son necesarios sólo para hacer cálculos.
λ =	0.75		$A_{s\text{ reqd}}$, A_{tr}, n y s son necesarios sólo si debe usarse el término K_{tr}
c_b =	2.00	plg	todos los términos con * pueden omitirse y
M_u =	358.40	pie-klb*	resultará un valor conservador de l_d.
$\psi_t\,\psi_e$ =	1		
K_{tr} =	0.275		
$(c_b + K_{tr})/d_b$ =	2.28		

$$l_d = \frac{3}{40}\frac{f_y}{\lambda\sqrt{f_c}}\frac{\psi_t\,\psi_e\,\psi_s}{\left[\dfrac{c_b + K_{tr}}{d_b}\right]} d_b =$$

		41.7	diámetros
		41.7	plg (no ajustado para $A_s/A_{s\text{ suministrada}}$)
$A_{s\text{ requerida}}$ =	3.12736	plg^2	
$A_{s\text{ reqd}}/A_{s\text{ suministrada}}$ =	0.995975	l_d =	41.5 plg (ajustado para $A_s/A_{s\text{ suministrada}}$)
		pero no menor que	12 plg

PROBLEMAS

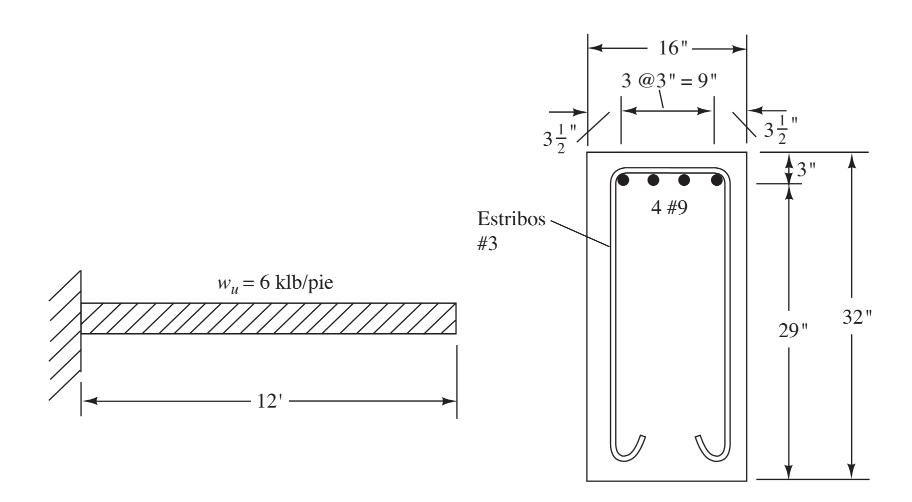
7.1 ¿Por qué es muy difícil calcular los esfuerzos reales de adherencia?

7.2 ¿Qué son varillas superiores? ¿Por qué sus longitudes de desarrollo requeridas son mayores que si no fuesen varillas superiores?

7.3 ¿Por qué los recubrimientos y el espaciamiento de las varillas afectan las longitudes de desarrollo requeridas?

7.4 ¿Por qué la capacidad de anclaje de un gancho estándar no aumenta al extender la varilla más allá del extremo del gancho?

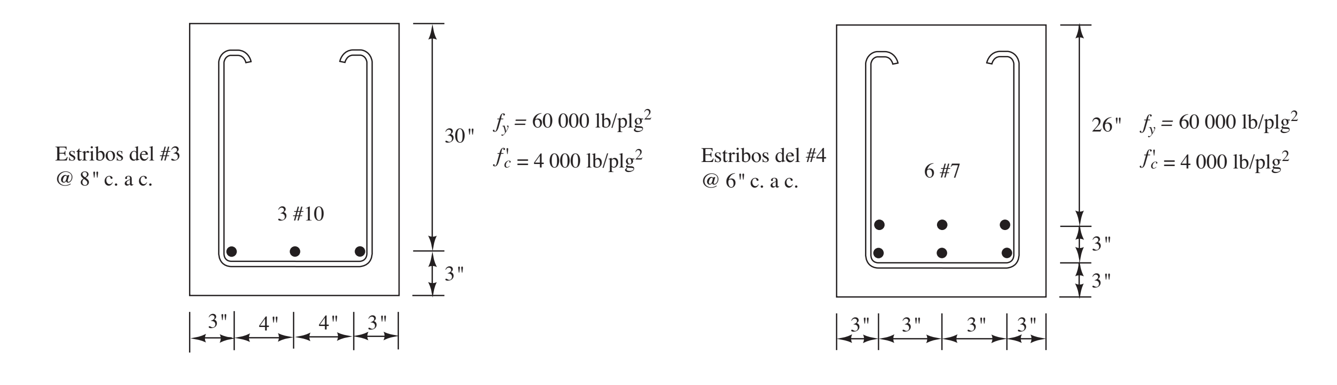
7.5 En la viga en voladizo mostrada, determine el punto donde pueden cortarse dos varillas desde el punto de vista de la resistencia calculada por momento ϕM_n de la viga. $f_y = 60\ 000$ lb/plg², $f'_c = 3\ 000$ lb/plg². (*Resp.* 9.09 pies desde el extremo libre.)



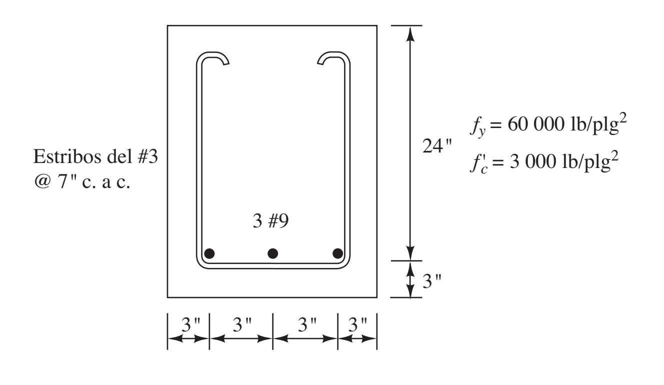
En los problemas 7.6 a 7.9 determine las longitudes de desarrollo requeridas para las situaciones de las varillas de tensión descritas, *a*) usando la ecuación 12-1 del ACI y suponiendo $K_{tr} = 0$, y (*b*) usando la ecuación 12-1 del ACI y el valor calculado de K_{tr}.

7.6 Varillas sin recubrir en concreto de peso normal. $A_{s\ requerida} = 3.44$ plg².

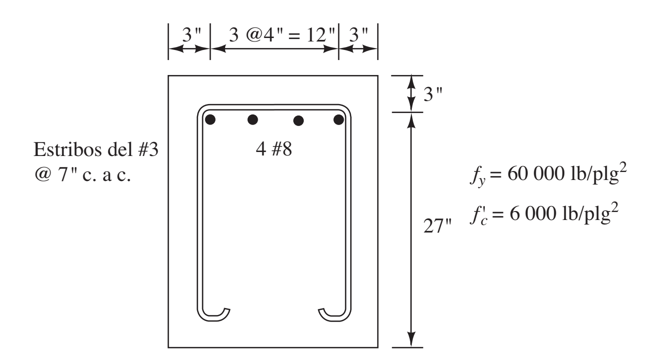
7.7 Varillas sin recubrir en concreto de peso normal. $A_{s\ \text{requerida}} = 3.40$ plg². (*Resp.* 34.2 plg, 23.5 plg.)



7.8 Varillas recubiertas con epóxido en concreto de peso ligero, $A_{s\text{ requerida}} = 276$ plg^2.



7.9 Varillas superiores sin recubrir en concreto de peso normal. $A_{s\text{ requerida}} = 2.92$ plg^2. (*Resp.* 35.1 plg, 30.9 plg.)



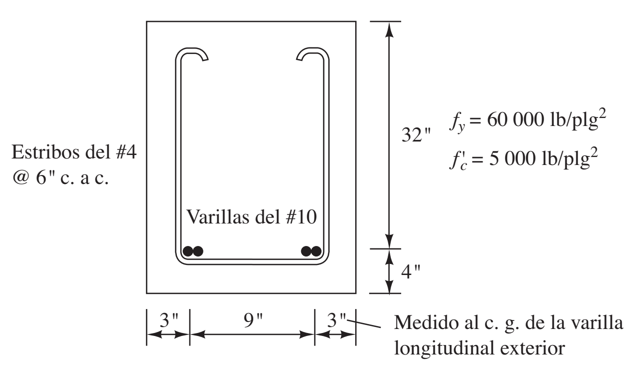
7.10 Repita el problema 7.6 si las varillas están recubiertas con epóxido.

7.11 Repita el problema 7.7 si se usa concreto ligero con $f'_c =$ 3 000 lb/plg^2 y varillas recubiertas con epóxido. (*Resp.* 79.0 plg, 54.2 plg.)

7.12 Repita el problema 7.8 si se usan tres varillas del #6 sin recubrir y A_s requerida $= 1.20$ plg^2.

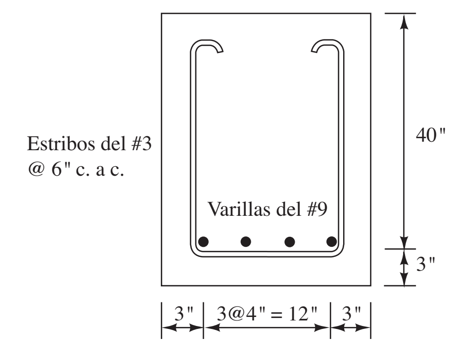
7.13 Repita el problema 7.9 si las varillas están recubiertas con epóxido y se usa concreto de peso ligero. (*Resp.* 61.2 plg, 53.8 plg.)

7.14 Las varillas del #10 en paquete mostradas no están recubiertas y se usan con concreto de peso normal. $A_{s\text{ requerida}} = 4.44$ plg^2.



7.15 Repita el problema 7.14 si las varillas están recubiertas con epóxido y se usan en un concreto de peso ligero con $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2. (*Resp.* 78.8 plg, 63.4 plg, etcétera.)

7.16 Elabore una tabla de longitudes de desarrollo requeridas para la viga mostrada usando $f_y = 60\,000$ lb/plg^2, y valores f'_c de 3 000, 3 500, 4 000, 4 500, 5 000, 5 500 y 6 000 lb/plg^2. Suponga que las varillas no están recubiertas y que se usa concreto de peso normal. Aplique la ecuación 12-1 del ACI y suponga $K_{tr} = 0$.



7.17 Repita el problema 7.16 si se usan varillas del #8. (*Resp.* 41.1 plg, 38.0 plg, 35.6 plg, 33.5 plg, 31.8 plg, etcétera.)

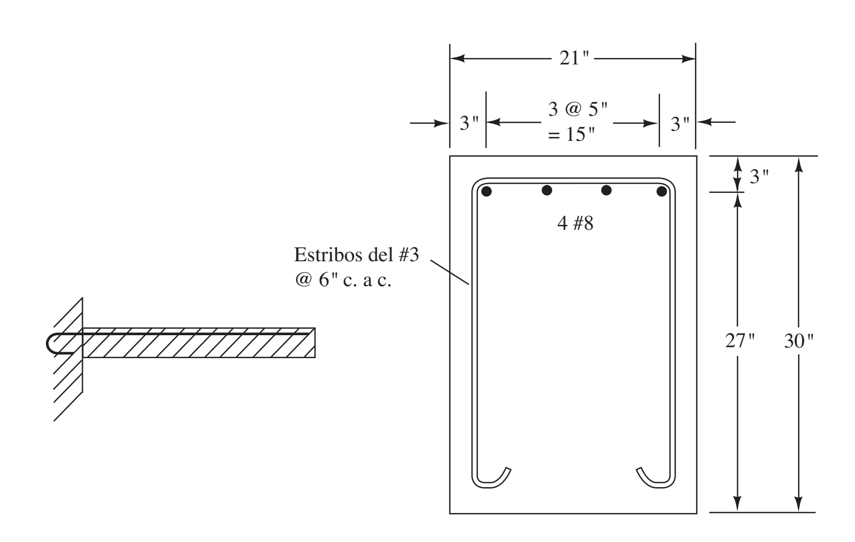
7.18 Repita el problema 7.16 si se usan varillas del #7.

7.19 Repita el problema 7.16 si se usan varillas del #6 recubiertas con epóxido en concreto de peso ligero. (*Resp.* 39.4 plg, 36.5 plg, 34.2 plg, 32.2 plg, 30.5 plg, etcétera.)

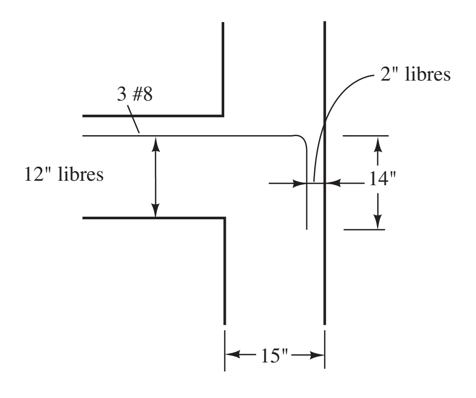
7.20 a) Determine la longitud de desarrollo a tensión requerida para las varillas del #8 sin recubrimiento mostradas si se usa concreto de peso normal y varillas rectas. Use la ecuación 12-1 del ACI y calcule el valor de K_{tr}. $f_c' = 4\ 000$ lb/plg², $f_y = 60\ 000$ lb/plg².

b) Repita la parte **(a)** si se usan ganchos de 180°.

Suponga en todos los casos que el recubrimiento lateral, superior e inferior es por lo menos de 2½ plg.



7.21 ¿Están suficientemente ancladas las varillas no recubiertas del #8 mostradas con sus ganchos a 90°? $f_c' = 4\ 000$ lb/plg², $f_y = 60$ klb/plg². El recubrimiento lateral y superior es de 2½ plg en las extensiones de las varillas. Se usa concreto de peso normal. $A_{s\ reqd} = 2.20$ plg². (*Resp.* $\ell_{dh} = 12.4$ plg, suficiente.)

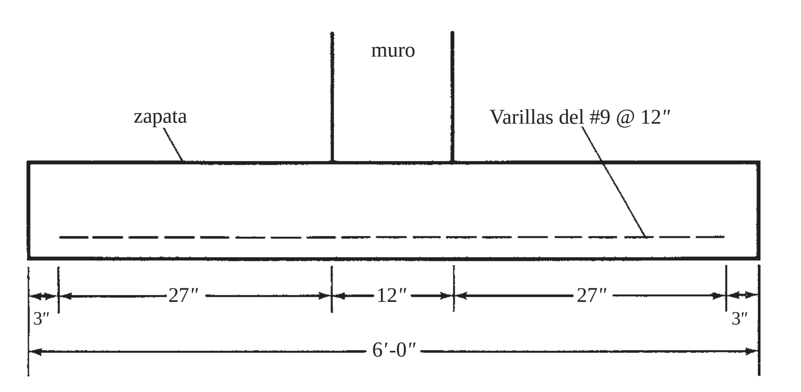


7.22 Repita el problema 7.21 si se usan varillas con anclaje interno en lugar de ganchos de 90°.

7.23 Repita el problema 7.7 si las varillas están en compresión. (*Resp.*15.6 plg.)

Para los problemas 7.24 al 7.29 use la ecuación 12-1 del ACI y suponga $K_{tr} = 0$.

7.24 El área requerida de las varillas para la zapata del muro mostrado es de 0.87 in^2 por pie de ancho: se tienen varillas del #9 recubiertas con epóxido a 12 plg entre centros. Suponga que el momento máximo ocurra en la cara de la pared. Si $f_y = 60\,000$ lb/plg^2 y $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2, ¿tienen las varillas suficiente longitud de desarrollo? Suponga que $c_b = 3$ plg.

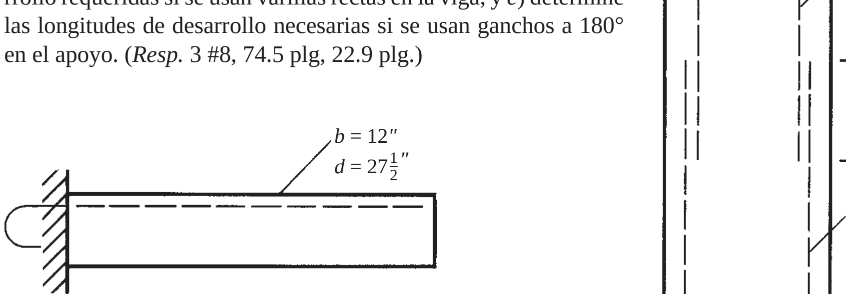


7.25 Repita el problema 7.24 usando #8 @ 9" y sin recubrimiento epóxido. (*Resp.* $\ell_d = 23.6 < 27$ plg. OK.)

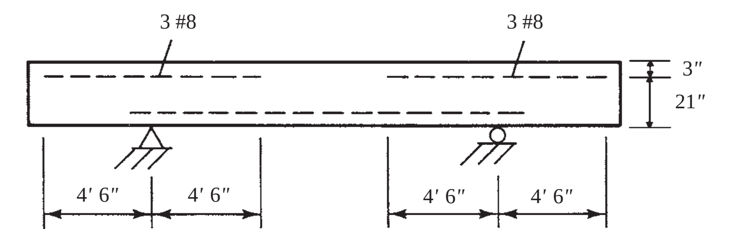
7.26 En el problema 7.24 se tiene longitud insuficiente de desarrollo. Liste cuatro modificaciones de diseño que reducirían la longitud de desarrollo requerida.

7.27 La viga mostrada está sometida a un M_u de 200 pie-klb en el apoyo. Si $c_b = 1.5$, $K_{tr} = 0$, el concreto es ligero, $f_y = 60\,000$ lb/plg^2 y $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2, haga lo siguiente: *a*) seleccione varillas del #8 colocadas en una fila, *b*) determine las longitudes de desarrollo requeridas si se usan varillas rectas en la viga, y *c*) determine las longitudes de desarrollo necesarias si se usan ganchos a 180° en el apoyo. (*Resp.* 3 #8, 74.5 plg, 22.9 plg.)

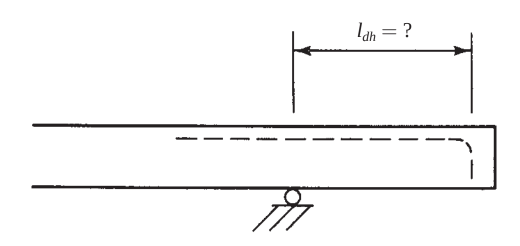
7.28 En la columna mostrada, las varillas inferiores de la columna son del #8 y las superiores son del #7. Las varillas están unidas por estribos separados a 12 plg entre centros. Si $f_y = 60\,000$ lb/plg^2 y $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2, ¿Cuál es la longitud mínima de empalme traslapado requerida? Considere concreto de peso normal para la columna de 12 plg × 12 plg.



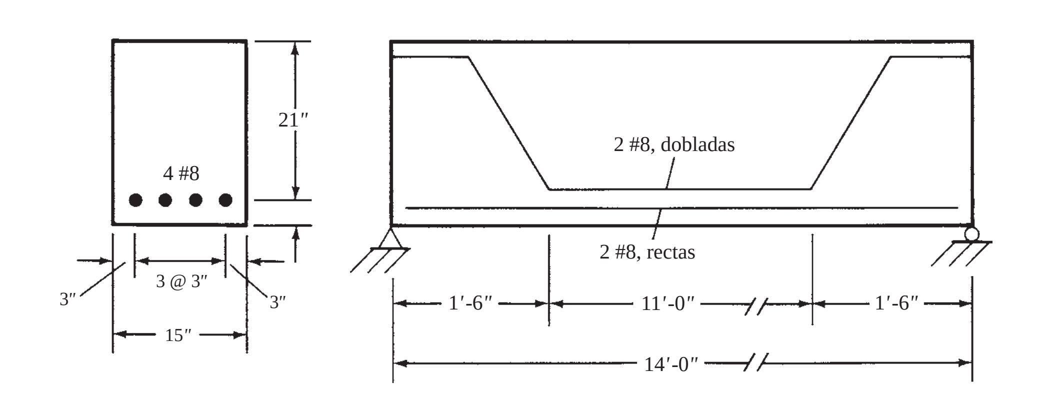
7.29 Los cálculos indican que se requieren 2.24 plg^2 de acero superior o negativo para la viga mostrada. Se han escogido tres varillas del #8. ¿Son satisfactorias las longitudes de desarrollo mostradas de 4 pies 6 plg si $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2? Las varillas están separadas entre sí a 3 plg centro a centro con 3 plg de recubrimiento lateral y superior medido desde el c. g. de las varillas. Use $K_{tr} = 0$ (*Resp.* No; $\ell_d = 58.8$ *plg.*)



7.30 Los cálculos indican que se requieren 4.90 plg^2 de acero superior o negativo para la viga mostrada. Si se han seleccionado cuatro varillas del #10 no recubiertas y si $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2, determine la longitud de desarrollo mínima necesaria para los ganchos a 90° estándares mostrados. Suponga que las varillas tienen un recubrimiento libre lateral y superior de 3 plg y un recubrimiento superior medido desde el c. g. de las varillas, y que se emplearán en concreto de peso normal. Las varillas no están unidas por amarres o estribos espaciados a $3d_b$ o menos.



7.31 Si $f_y = 75\,000$ lb/plg^2, $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2, $w_D = 1.5$ klb/pie y $w_L = 5$ klb/pie, ¿son satisfactorias las longitudes de desarrollo de las varillas rectas? Suponga que las varillas se extienden 6 plg más allá del centro del claro ℄ de las reacciones y que $K_{tr} = 0$. $A_{s\ \text{requerida}} = 3.05$ plg^2. Las varillas no están recubiertas, y el concreto es de peso normal. (*Resp.* $\ell_d = 66.5$ plg, la longitud de desarrollo es adecuada.)



Empalmes de compresión

7.32 Determine los traslapes de los empalmes a compresión necesarios para una columna de concreto reforzado de 14 plg × 14 plg con estribos (cuyas áreas efectivas exceden de 0.0015 hs como se describe en la sección 12.17.2.4 del código) para los casos siguientes. Se tienen ocho varillas longitudinales del #8 separadas uniformemente alrededor de la columna.

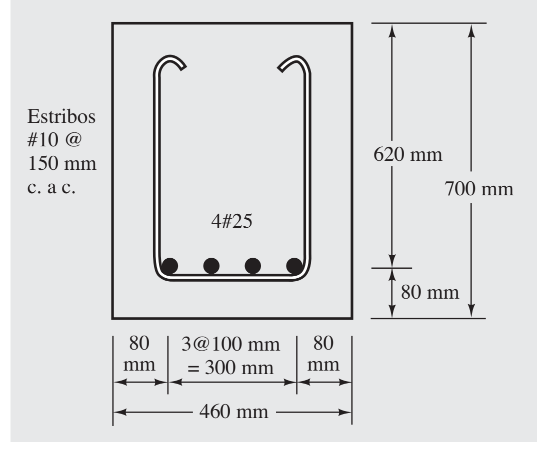
a) $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2

b) $f'_c = 2\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 50\,000$ lb/plg^2

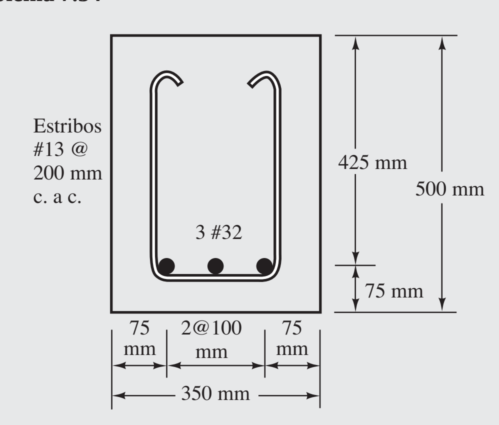
Problemas con unidades SI

En los problemas 7.33 a 7.36, determine las longitudes de desarrollo en tensión requeridas *a*) usando la ecuación métrica 12-1 del ACI, suponiendo $K_{tr} = 0$ y *b*) usando la ecuación métrica 12-1 del ACI y el valor calculado de K_{tr}. Use $f_y = 420$ MPa y $f'_c = 28$ MPa.

Problema 7.33 (*Resp.* 922 mm, 769 mm.)



Problema 7.34



7.35 Repita el problema 7.33 si las varillas son #19 y si se usan estribos #10 a 150 mm c. a c. (*Resp.* 437 mm, 437 mm.)

7.36 Repita el problema 7.34 si las varillas están recubiertas con epóxido.

Problemas para computadora

Para los problemas 7.37 y 7.38, use la hoja de cálculo del capítulo 7.

7.37 Repita el problema 7.6. (*Resp.* 52.1 plg, 44.0 plg.)

7.38 Repita el problema 7.9.

7.39 Repita el problema 7.22 (*Resp.* $\ell_{dt} = 14.2$ plg > 13 plg disponible ∴ No sirve.)

8

Cortante y tensión diagonal

8.1 INTRODUCCIÓN

Como ya se mencionó en varias ocasiones en los capítulos anteriores de este libro, el objetivo del proyectista de estructuras de concreto reforzado hoy en día es producir miembros dúctiles que den aviso de fallas incipientes. Para lograr esta meta, el código ACI provee valores del cortante de diseño que tienen factores de seguridad mayores contra fallas por cortante que los previstos para fallas por flexión. Las fallas por cortante de las vigas de concreto reforzado son muy diferentes de las fallas por flexión. Las fallas por cortante ocurren repentinamente, sin previo aviso. Por tanto, las vigas se diseñan para fallar por flexión bajo cargas que son considerablemente menores a aquellas que causarían las fallas por cortante. Por consecuencia, esos miembros fallan dúctilmente. Pueden agrietarse y sufrir grandes deflexiones si se sobrecargan, pero no se desploman como lo harían si la falla por cortante fuese posible.

8.2 ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS DE CONCRETO

Aunque nadie ha podido determinar exactamente la resistencia del concreto a esfuerzo de cortante puro, el asunto no tiene mucha importancia porque el estado de esfuerzo de cortante puro nunca se da en las estructuras de concreto. Además, de acuerdo con la mecánica de materiales, si se produce cortante puro en un plano de un miembro, se producirá en otro plano un esfuerzo principal de tensión de igual magnitud. Como la resistencia a tensión del concreto es menor que su resistencia al corte, el concreto fallará por tensión antes de que se alcance su resistencia al cortante.

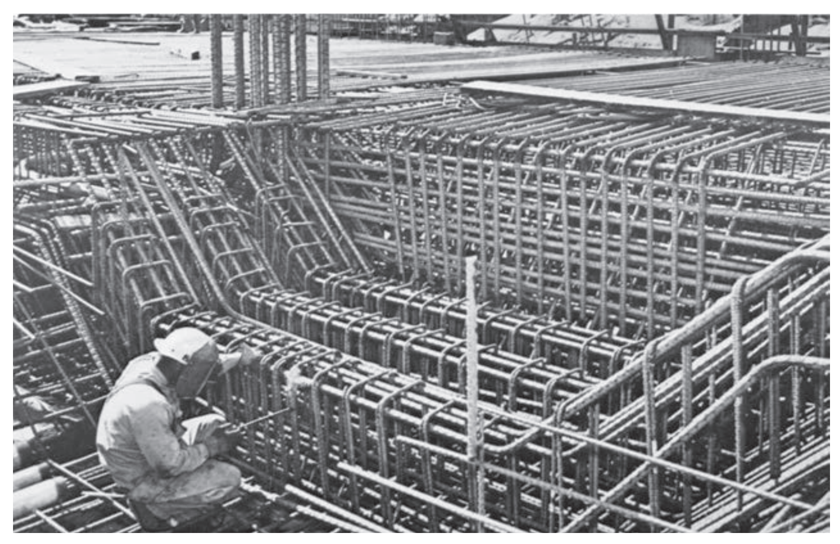
Usted ha aprendido previamente que en las vigas elásticas homogéneas, donde los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones unitarias, ocurren dos clases de esfuerzos (de flexión y cortantes) y que pueden calcularse con las siguientes expresiones:

$$f = \frac{Mc}{I}$$

$$v = \frac{VQ}{Ib}$$

Un elemento de una viga no localizado en una fibra extrema o en el eje neutro, está sujeto a ambos tipos de esfuerzos de flexión y de cortante. Estos esfuerzos se combinan para producir esfuerzos inclinados de compresión y tensión llamados *esfuerzos principales*, que se pueden calcular con la siguiente expresión:

$$f_p = \frac{f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + v^2}$$



Estructuras voluminosas de concreto reforzado. (Cortesía de Bethlehem Steel Corporation.)

La dirección de los esfuerzos principales se puede determinar con la siguiente fórmula, en la que α es la inclinación del esfuerzo respecto al eje de la viga:

$$\tan 2\alpha = \frac{2v}{f}$$

Obviamente, en posiciones diferentes a lo largo de la viga, las magnitudes relativas de v y f cambian, así como las direcciones de los esfuerzos principales. Puede verse de la ecuación anterior que en el eje neutro los esfuerzos principales se encuentran a un ángulo de 45° con la horizontal.

A estas alturas, usted ya habrá entendido que los esfuerzos de tensión en el concreto son muy importantes. Los esfuerzos diagonales principales de tensión, llamados *tensión diagonal*, ocurren en lugares y bajo ángulos diferentes en las vigas de concreto y deben ser cuidadosamente considerados. Si alcanzan ciertos valores, debe suministrarse refuerzo adicional, llamado *refuerzo de alma*.

El análisis presentado hasta ahora referente a la tensión diagonal se aplica más bien a las vigas de concreto simple. Sin embargo, si se están considerando vigas de concreto reforzado, la situación es diferente, porque los esfuerzos longitudinales de tensión por flexión son resistidos muy satisfactoriamente por el refuerzo longitudinal. Sin embargo, estas varillas, no proveen una resistencia significativa a los esfuerzos de tensión diagonal.

8.3 CONCRETO DE PESO LIGERO

En la sección 318 del código ACI de 2008, el efecto del concreto con agregado ligero sobre la resistencia al cortante se modificó por la introducción del término λ (véase la sección 1.12). Este término se añadió a la mayoría de las ecuaciones que contienen $\lambda\sqrt{f'_c}$. El término combinado resultante, $\lambda\sqrt{f'_c}$, aparece a lo largo de todo este capítulo así como en el capítulo 7 sobre longitud de desarrollo y en el capítulo 15 sobre torsión. Si se usa concreto de peso normal, entonces λ se toma simplemente igual a 1. Este enfoque unificado para los efectos del agregado ligero sobre la resistencia y otras propiedades del concreto es una mejora lógica y simplificadora que se encuentra en el código ACI de 2008.

8.4 RESISTENCIA DEL CONCRETO AL CORTANTE

Se ha hecho una gran cantidad de trabajo de investigación sobre el tema del cortante y de la tensión diagonal en las vigas no homogéneas de concreto reforzado y se han desarrollado muchas teorías. A pesar de todo este trabajo y de todas las teorías resultantes, nadie ha podido proporcionar una explicación convincente del mecanismo de falla involucrado. Como consecuencia, los procedimientos de diseño se basan primordialmente en los datos de pruebas.

Si V_u se divide entre el área efectiva de la viga $b_w d$, el resultado se denomina *esfuerzo cortante medio*. Este esfuerzo no es igual al esfuerzo de tensión diagonal, sino que sirve meramente como indicador de su magnitud. Si este indicador excede un cierto valor, se considera necesario emplear un refuerzo por cortante en el alma. En el código ACI las ecuaciones básicas de cortante se presentan en términos de fuerzas cortantes y no de esfuerzos cortantes. En otras palabras, los esfuerzos cortantes medios descritos en este párrafo se multiplican por las áreas efectivas de las vigas para obtener fuerzas cortantes totales.

En este análisis, V_n se considera la resistencia nominal o teórica por cortante de un miembro. Esta fuerza es provista por el concreto y el refuerzo de cortante.

$$V_n = V_c + V_s$$

La resistencia de diseño por cortante de un miembro, ϕV_n, es igual a ϕV_c y ϕV_s, que debe ser al menos igual a la fuerza cortante factorizada que se use, V_u.

$$V_u = \phi V_c + \phi V_s$$

La resistencia al cortante suministrada por el concreto, V_c, se considera igual a una resistencia de esfuerzo cortante medio (normalmente $2\lambda\sqrt{f'_c}$) multiplicado por el área efectiva de la sección transversal del miembro, $b_w d$, en donde b_w es el ancho de una viga rectangular o del alma de una viga T o de una viga I.

$$V_c = 2\lambda\sqrt{f'_c}\,b_w d \qquad \text{(Ecuación 11-3, ACI)}$$

O en unidades del SI con f'_c en MPa

$$V_c = \left(\frac{\lambda\sqrt{f'_c}}{6}\right) b_w d$$

Las pruebas en vigas han mostrado algunos hechos interesantes acerca de la ocurrencia de grietas a diferentes valores del esfuerzo cortante medio. Por ejemplo, en donde ocurren momentos grandes se presentan extensas grietas de flexión, aun cuando se haya proporcionado el suficiente acero longitudinal de refuerzo. Como consecuencia, el área no agrietada de la sección transversal de la viga se reduce considerablemente y la resistencia nominal V_c por cortante puede ser tan baja como $1.9\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$. Por otra parte, en las zonas donde el momento es pequeño, la sección transversal se encontrará sin grietas o muy ligeramente agrietada y una porción grande de la sección transversal está disponible para resistir el cortante. Para un caso así, las pruebas muestran que una V_c de aproximadamente $3.5\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$ se puede desarrollar antes de que ocurra una falla por cortante.[1]

Basándose en esta información, el código (11.2.1.1) sugiere en forma conservadora que V_c (la fuerza cortante que el concreto puede resistir sin refuerzo en el alma) puede ser tan alta como $2\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$. Como alternativa, puede usarse la siguiente fuerza cortante (Sección 11.2.1.2 del código), que toma en cuenta tanto los efectos del refuerzo longitudinal como las magnitudes del momento y de la fuerza cortante. Este valor debe calcularse separadamente para cada punto que se considere en la viga.

$$V_c = \left(1.9\lambda\sqrt{f'_c} + 2\,500\rho_w \frac{V_u d}{M_u}\right) b_w d \leq 3.5\lambda\sqrt{f'_c}b_w d \qquad \text{(Ecuación 11-5, ACI)}$$

[1]Comité 326 del ACI-ASCE, 1962, "Shear and Diagonal Tension", parte 2, *Journal ACI*, 59, pág. 277.

En unidades del SI

$$V_c = \left(\lambda\sqrt{f'_c} + 120\rho_w \frac{V_u d}{M_u}\right)\frac{b_w d}{7} \leq 0.3\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$$

En estas expresiones, $\rho_w = A_s/b_w d$ y M_u es el momento factorizado que ocurre simultáneamente con V_u, la fuerza cortante factorizada en la sección considerada. La cantidad $V_u b/M_u$ no debe tomarse mayor que la unidad al calcular V_c por medio de las expresiones anteriores.

Con estas expresiones puede verse que V_c aumenta conforme se incrementa la cantidad de refuerzo (representada por ρ_w). Al aumentar la cantidad de acero, la longitud y el ancho de las grietas se reducen. Si las grietas se mantienen más estrechas, queda más concreto para resistir el cortante y habrá un contacto más estrecho entre el concreto en los lados contrarios de las grietas. Por tanto, habrá más resistencia al cortante por fricción (llamada *trabazón de agregado*) en los dos lados de las grietas.

Aunque esta expresión más complicada para V_c puede usarse fácilmente para diseños con computadora, resulta muy tediosa su aplicación cuando se usan calculadoras manuales. La razón de esto es que los valores de ρ_w, V_u y M_u cambian constantemente a lo largo del claro, requiriendo el cálculo de V_c en numerosas posiciones. Como consecuencia, normalmente se usa el valor alterno $2\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$. Si el mismo miembro va a construirse muchas veces, el uso de la expresión más complicada puede justificarse.

8.5 AGRIETAMIENTO POR CORTANTE EN VIGAS DE CONCRETO REFORZADO

Las grietas inclinadas pueden desarrollarse en las almas de vigas de concreto reforzado ya sea como extensiones de las grietas de flexión o bien ocasionalmente como grietas independientes. La primera de estas dos clases de grietas es la *grieta por flexión-cortante*, un ejemplo de la cual se muestra en la figura 8.1. Éstas son las grietas usuales por cortante que se encuentran en las vigas de concreto presforzado y sin presforzar. Para que ocurran, el momento debe ser mayor que el momento de agrietamiento y el esfuerzo cortante debe ser bastante grande. Las grietas forman ángulos de aproximadamente 45° respecto al eje de la viga y probablemente se inician en la parte superior de una grieta de flexión. Las grietas de flexión aproximadamente verticales no son peligrosas, a menos que se tenga una combinación crítica de esfuerzo cortante y esfuerzo de flexión en la parte superior de una de las grietas de flexión.

Ocasionalmente, una grieta inclinada se desarrollará independientemente en una viga, aun cuando no se tengan grietas de flexión en esa localidad. Tales grietas, llamadas *grietas por cortante en el alma*, algunas veces ocurrirán en las almas de secciones presforzadas, en particular en aquellas con patines grandes y almas delgadas. También ocurren en ocasiones cerca de los puntos de inflexión de vigas continuas o cerca de los apoyos simples. En tales lugares suelen ocurrir momentos pequeños y grandes fuerzas cortantes. Estos tipos de grietas se forman en cerca de la mitad de la altura de las secciones y se

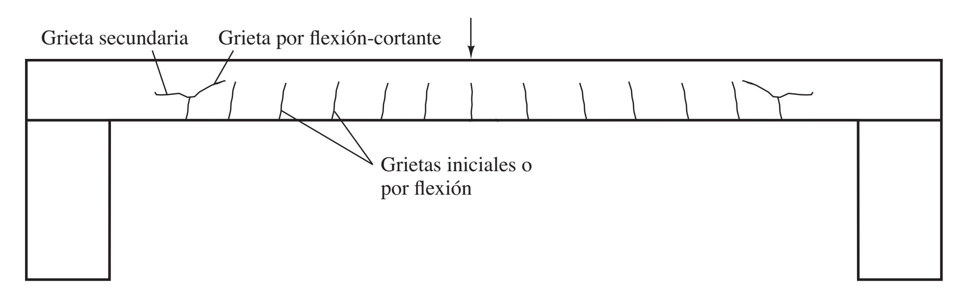


Figura 8.1 Grietas por flexión-cortante.

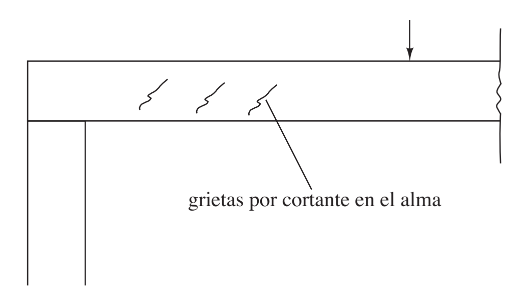


Figura 8.2 Grietas por cortante en el alma.

prolongan hacia la superficie de tensión a lo largo de una trayectoria diagonal. Las grietas por cortante en el alma se ilustran en la figura 8.2.

Conforme una grieta avanza hacia el eje neutro, el resultado será una cantidad reducida de concreto disponible para resistir la fuerza cortante, es decir, los esfuerzos cortantes aumentarán su valor en el concreto arriba de la grieta.

Recuérdese que en el eje neutro los esfuerzos de flexión son nulos y los esfuerzos cortantes alcanzan sus valores máximos. Los esfuerzos cortantes por consiguiente determinarán qué ocurre con las grietas en esa zona.

Después de que una grieta se ha desarrollado, el miembro fallará, a menos que la sección agrietada de concreto pueda resistir las fuerzas aplicadas. Si no existe refuerzo en el alma, los siguientes factores podrán transmitir el esfuerzo cortante: 1) la resistencia al cortante de la sección no agrietada arriba de las grietas (se estima igual a entre 20 y 40% de la resistencia total), 2) la trabazón del agregado, es decir, la fricción desarrollada debida a la trabazón del agregado sobre las superficies del concreto a los lados opuestos de las grietas (se estima entre 33 y 50% de la resistencia total), 3) la resistencia del refuerzo longitudinal a una fuerza de fricción llamada *acción de espiga* (se estima entre 15 y 25% de la resistencia total) y 4) un comportamiento tipo arco atirantado que en las vigas de peralte algo grande es producido por las varillas longitudinales que actúan como tirante y por el concreto no agrietado arriba y a los lados de las grietas que actúan como arco.[2]

8.6 REFUERZO DEL ALMA

Cuando la fuerza cortante factorizada V_u es grande, significa que graves grietas van a ocurrir, a menos que se proporcione algún tipo de refuerzo adicional. Este refuerzo usualmente toma la forma de estribos que rodean el refuerzo longitudinal a lo largo de las caras de las vigas. Los estribos más comunes tienen forma de ⊔, pero también pueden tener forma de ⊔⊓⊔ o ser de una sola rama vertical como se muestra en la figura 8.3(*a*) a (*c*). Se considera que los estribos de ramas múltiples como el de la figura 8.3(*e*) inhiben la separación en el plano de las varillas longitudinales. Como consecuencia, son generalmente preferibles para vigas anchas que los mostrados en la figura 8.3(*d*). Algunas veces conviene usar estribos con empalme de traslape, como los mostrados en la figura 8.3(*g*). Estos estribos, que se describen en la sección 12.13.5 del ACI, son ocasionalmente apropiados para miembros muy peraltados, en particular en aquellos cuyo peralte varía gradualmente. *Sin embargo, se considera que no son satisfactorios en zonas sísmicas.*

Las varillas llamadas *colgantes* (usualmente con aproximadamente el mismo diámetro que los estribos) se colocan en los lados de compresión de las vigas para soportar los estribos, como se ilustra en la figura 8.3(*a*) a 8.3(*j*). Los estribos pasan alrededor del acero de tensión y para cumplir con los requisitos de anclaje se prolongan hasta el lado de compresión de la viga tan práctico como sea posible y se enganchan alrededor de los colgantes. El doblado de los estribos alrededor de los colgantes reduce los esfuerzos de aplastamiento bajo los ganchos. Si estos esfuerzos son muy grandes, el concreto se aplasta y los estri-

[2]Taylor, H.P.J., 1974, "The Fundamental Behavior of Reinforced Concrete Beams in Bending and Shear", *Shear in Reinforced Concrete*, Vol. 1, SP-42 (Detroit: American Concrete Institute), págs. 43-47.

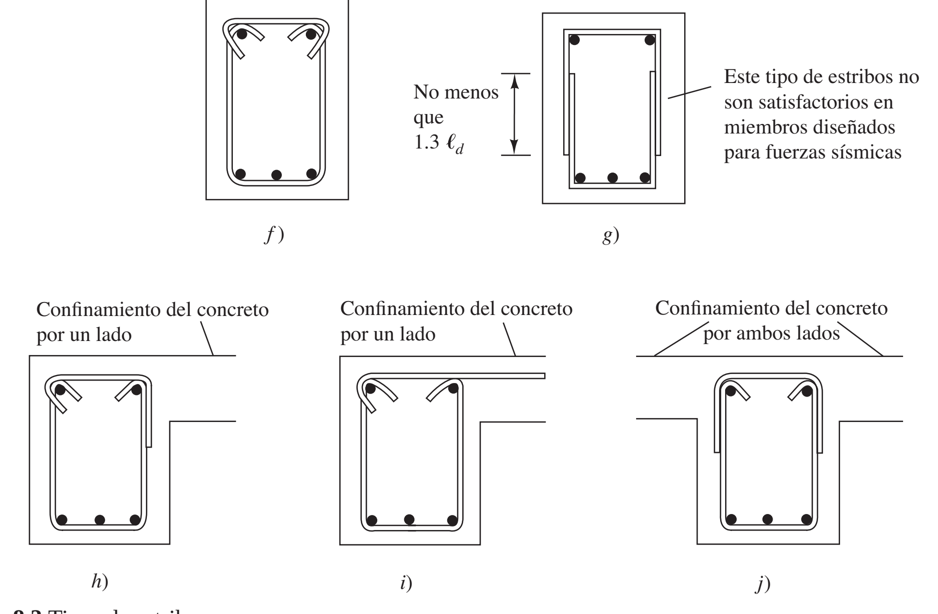


Figura 8.3 Tipos de estribos.

bos se desgarran. Cuando existe una torsión considerable en un miembro, es necesario usar estribos cerrados, como se muestra en las partes(*f*) a (*j*) de la figura 8.3 y como se analiza en el capítulo 15.

El ancho de las grietas diagonales está directamente relacionado con la deformación unitaria en los estribos. Consecuentemente, el ACI 11.4.2 no permite que el esfuerzo de fluencia de diseño de los estribos exceda de 60 klb/plg^2. Este requisito limita el ancho de las grietas que pueden desarrollarse. Tal resultado es importante desde el punto de vista de la apariencia y trabazón del agregado. Cuando se limita el ancho de las grietas, se desarrolla una mayor trabazón en el agregado. Una ventaja adicional de limitar el esfuerzo de fluencia es que los requisitos de anclaje en la parte superior de los estribos no son tan estrictos como lo serían para estribos con mayor resistencia a la fluencia.

La limitación de 60 000 lb/plg^2 no se aplica a la malla de alambre corrugado soldada, porque las investigaciones recientes han mostrado que el uso de alambres de alta resistencia ha sido realmente satisfactorio. Las pruebas han mostrado que los anchos de grietas inclinadas de cortante, bajo condiciones de carga de servicio, son menores para las mallas de alambre de alta resistencia que los que ocurren en vigas reforzadas con estribos corrugados de Grado 60. El esfuerzo máximo permitido para la malla de alambre corrugado soldada es de 80 000 lb/plg^2 (ACI 11.4.2).

En unidades del SI, los valores máximos de esfuerzo de fluencia de diseño que se pueden usar son 420 MPa para refuerzo común de cortante y 550 MPa para malla de alambre corrugado soldada.

8.7 COMPORTAMIENTO DE LAS VIGAS CON REFUERZO DEL ALMA

El comportamiento real de las vigas con refuerzo del alma no se ha llegado a entender hasta ahora, aunque se han propuesto diversas teorías a través de los años. Una teoría que se ha usado ampliamente por casi 100 años es la llamada analogía de la armadura, en donde una viga de concreto reforzado con refuerzo por esfuerzo cortante se comporta como una armadura estáticamente determinada de cuerdas paralelas con nudos articulados. El concreto de la zona de compresión por flexión se identifica con la cuerda superior de la armadura y el acero de refuerzo por tensión con la cuerda inferior. El alma de la armadura está constituida por los estribos actuando como miembros verticales a tensión y por las porciones de concreto entre las grietas de tensión diagonal aproximadamente a 45° actuando como miembros diagonales a compresión.[3,4] El refuerzo por cortante usado es similar en su acción a la celosía de una armadura. Por esta razón suele usarse el término *refuerzo de alma* con referencia al refuerzo por cortante. Una "armadura" del tipo descrito aquí se muestra en la figura 8.4.

Aunque la analogía de la armadura se ha usado por muchos años para describir el comportamiento de las vigas de concreto reforzado con refuerzo en el alma, no describe exactamente la manera en que se transmiten las fuerzas cortantes. Por ejemplo, el refuerzo del alma aumenta la resistencia a cortante de una viga, pero tiene poco que ver con la transferencia del corte en una viga antes de que se formen las grietas inclinadas.

El código requiere refuerzo del alma en casi todas las vigas importantes. En la sección 11.4.6.1, se requiere un área mínima de refuerzo en el alma para todos los miembros de concreto que trabajen a flexión excepto (*a*) zapatas y losas sólidas, (*b*) ciertas unidades de núcleo hueco, (*c*) viguetas de piso de concreto, (*d*) vigas de poco peralte con h no mayor que 10 plg, (*e*) vigas integradas a las losas con h menor que 24 plg y h no mayor que el mayor de $2\frac{1}{2}$ veces el espesor del patín o la mitad del ancho del alma, o (*f*) vigas construidas con concreto de peso normal reforzado con fibra de acero con f'_c no excediendo de 6 000 lb/plg^2, h no mayor que 24 plg y V_u no mayor que $2\phi\sqrt{f'_c}b_w d$. Varias pruebas han mostrado que las fallas por esfuerzo cortante no ocurren antes que las fallas por flexión en miembros poco peraltados. Las fuerzas cortantes se distribuyen a través de estas secciones anchas. En las viguetas, la redistribución se da a través de las losas hacia las viguetas adyacentes. Las fibras de acero en forma de gancho o bayoneta en dosis ≥ 100 lb por yarda cúbica exhiben resistencias al corte mayores en las pruebas de laboratorio. Sin embargo, no se recomienda el uso de estas fibras cuando el concreto está expuesto a cloruros, tales como las sales de descongelamiento.

Los estribos inclinados o diagonales que están alineados aproximadamente con las direcciones de los esfuerzos principales, son más eficientes para resistir el cortante e impedir o atrasar la formación

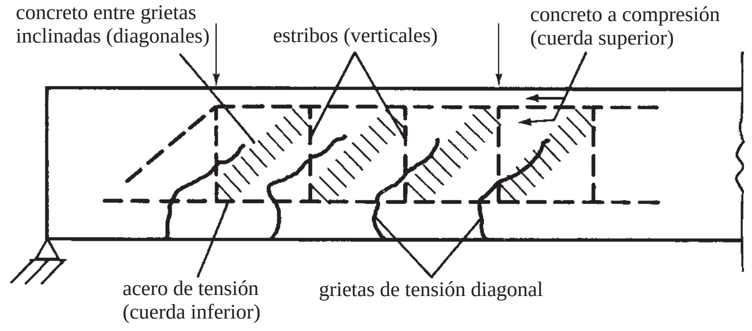


Figura 8.4 Analogía de la armadura.

[3]Ritter, W., 1899, *Die Bauweise Hennebique* (Schweizerische Bauzeitung, XXXIII, no. 7).
[4]Mörsch, E., 1912, *Der Eisenbetenbau, seine Theorie und Anwendung* (Stuttgart: Verlag Konrad Witttwer).

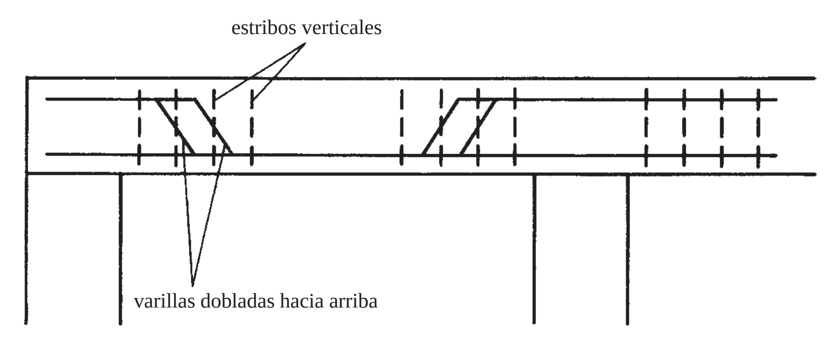


Figura 8.5 Refuerzo de alma con varillas dobladas hacia arriba.

de grietas diagonales. Sin embargo, tales estribos usualmente no se consideran muy prácticos en Estados Unidos debido a los altos costos de mano de obra requeridos para colocarlos. Realmente, pueden ser bastante prácticos en las vigas de concreto precolado donde las varillas y los estribos se preensamblan formando jaulas antes de ser usados y también donde las mismas vigas se duplican muchas veces.

Las varillas dobladas hacia arriba (usualmente en ángulos de 45°) son otro tipo satisfactorio de refuerzo de alma (figura 8.5). Aunque las varillas dobladas hacia arriba son comúnmente usadas en los miembros a flexión en Estados Unidos, el proyectista promedio considera rara vez el hecho que pueden resistir la tensión diagonal. Dos razones para no tomar en cuenta su contribución a resistir la tensión diagonal, consisten en que generalmente hay sólo unas pocas, si las hay, en una viga y pueden no estar convenientemente ubicadas para usarse como refuerzo de alma.

Las grietas diagonales ocurrirán en las vigas con refuerzo de cortante bajo casi las mismas cargas con que ocurren en las vigas del mismo tamaño sin dicho refuerzo. El refuerzo de cortante se manifiesta sólo después de que las grietas han empezado a formarse. En ese momento, las vigas deben tener suficiente refuerzo de cortante para resistir la fuerza cortante no resistida por el concreto.

Después de que una grieta de cortante se ha desarrollado en una viga, sólo un poco de esfuerzo cortante puede ser transferido a través de la grieta, a menos que se use refuerzo en el alma para salvar la abertura. Cuando existe tal refuerzo, mantiene juntas las piezas de concreto en ambos lados de la grieta impidiendo que se separen. Se obtienen así varios beneficios. Entre éstos se incluyen:

1. El refuerzo de acero que pasa a través de las grietas toma el cortante directamente.
2. El refuerzo impide que las grietas se amplíen y permite así al concreto transferir el esfuerzo cortante a través de las grietas por trabazón del agregado.
3. Los estribos enrollados alrededor del núcleo de concreto actúan como aros y así aumentan la resistencia y la ductilidad de la viga. En forma parecida, los estribos atan a las varillas longitudinales al núcleo de concreto de la viga e impiden el desprendimiento del recubrimiento de concreto.
4. El mantener unido el concreto en ambos lados de las grietas ayuda a impedir que las grietas se muevan hacia la zona de compresión de la viga. Recuérdese que, además de la malla de alambre corrugado, el esfuerzo de fluencia del refuerzo del alma está limitado a 60 klb/plg^2 con la idea de limitar el ancho de las grietas.

8.8 DISEÑO POR CORTANTE

La fuerza cortante máxima V_u en una viga no debe exceder la capacidad de esfuerzo cortante de diseño ϕV_n de la sección transversal de la viga, en donde ϕ es 0.75 y V_n es la resistencia nominal por cortante del concreto junto con el refuerzo por cortante.

$$V_u \leq \phi V_n$$

El valor de ϕV_n puede descomponerse en la resistencia por cortante de diseño ϕV_c del concreto más la resistencia por cortante de diseño del refuerzo por cortante ϕV_s. El valor de ϕV_c está provisto en el código para diferentes situaciones y así puede calcularse el valor requerido de ϕV_s para cada situación:

$$V_u \leq \phi V_c + \phi V_s$$

Para el análisis que sigue usaremos el signo de igualdad:

$$V_u = \phi V_c + \phi V_s$$

El propósito de los estribos es minimizar el tamaño de las grietas por tensión diagonal o transmitir el esfuerzo por tensión diagonal de un lado de la grieta al otro. Muy poca tensión es tomada por los estribos hasta después que la grieta comienza a formarse. Antes de que las grietas inclinadas comiencen a formarse, la deformación unitaria en los estribos es igual a la deformación unitaria en el concreto adyacente. Como este concreto se agrieta bajo esfuerzos de tensión diagonal muy pequeños, los esfuerzos en los estribos en ese momento también son muy pequeños, quizá sólo de 3 a 6 klb/plg^2. Usted puede ver que estos estribos no impiden la formación de las grietas inclinadas y que no son realmente un factor significativo hasta que las grietas comienzan a desarrollarse.

Pruebas hechas en vigas de concreto reforzado muestran que una viga no fallará por el ensanchamiento de las grietas de tensión diagonal, hasta que los estribos que atraviesan las grietas estén esforzados a sus esfuerzos de fluencia. En el análisis que sigue, se supone que se ha desarrollado una grieta de tensión diagonal y que ha llegado a la zona de compresión pero no hasta la parte superior, como se muestra en la figura 8.6. Se supone además que los estribos que cruzan la grieta han cedido.

La resistencia nominal por cortante V_s de los estribos que cruzan la grieta puede calcularse con la siguiente expresión, donde n es el número de estribos que cruzan la grieta y A_v es el área de la sección transversal de cada estribo al cruzar la grieta. (Si se usa un estribo ⊔, $A_v = 2$ veces el área de la sección transversal de la varilla del estribo. Si se usa un estribo ⊔⊓⊔, $A_v = 4$ veces el área de la sección transversal de la varilla del estribo.)

$$V_s = A_v f_y n$$

Si se supone conservadoramente que la proyección horizontal de la grieta es igual al peralte efectivo d de la sección (grieta a 45°), el número de estribos que cruzan la grieta pueden determinarse con la siguiente expresión, en la que s es la separación de centro a centro de los estribos:

$$n = \frac{d}{s}$$

Después

$$V_s = A_v f_y \frac{d}{s} \qquad \text{(Ecuación 11-15, ACI)}$$

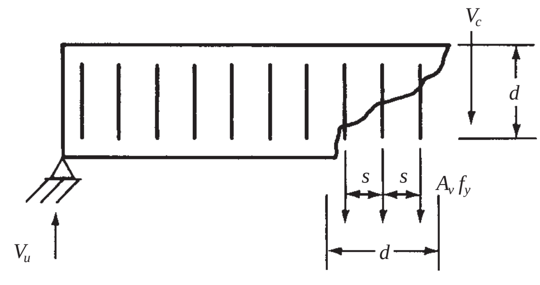


Figura 8.6

De esta expresión, la separación requerida entre estribos verticales es

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_s}$$

y el valor de V_s puede determinarse como sigue:

$$V_u = \phi V_c + \phi V_s$$
$$V_s = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi}$$

Por medio de una deducción similar, la siguiente expresión se puede obtener para el área requerida de estribos inclinados, en donde α es el ángulo entre los estribos y el eje longitudinal del miembro. Los estribos inclinados deben colocarse de manera que formen un ángulo de al menos 45° con respecto a las varillas longitudinales y deben fijarse muy bien en su lugar.

$$V_s = \frac{A_v f_y (\text{sen}\ \alpha + \cos\ \alpha) d}{s} \qquad \text{(Ecuación 11-16, ACI)}$$

Y para una varilla doblada hacia arriba o un grupo de varillas dobladas hacia arriba a una misma distancia del apoyo, tenemos

$$V_s = A_v f_y\ \text{sen}\ \alpha \leq 3\sqrt{f'_c}\, b_w d \qquad \text{(Ecuación 11-17, ACI)}$$

8.9 REQUISITOS DEL CÓDIGO ACI

En esta sección se presenta una lista detallada de los requisitos del código que controlan el diseño del refuerzo del alma, si bien una cierta cantidad de estos aspectos han sido mencionados anteriormente en este capítulo:

1. Cuando la fuerza cortante factorizada V_u excede la mitad de la resistencia por cortante de diseño ϕV_c, el código (11.4.6.1) requiere el uso de refuerzo del alma. El valor de V_c normalmente se toma igual a $2\lambda\sqrt{f'_c}\, b_w d$, pero el código (11.2.2.1) permite el uso del siguiente valor menos conservador:

$$V_c = \left(1.9\lambda\sqrt{f'_c} + 2\,500\rho_w \frac{V_u d}{M_u}\right) b_w d \leq 3.5\lambda\sqrt{f'_c}\, b_w d \qquad \text{(Ecuación 11-5, ACI)}$$

Como se mencionó anteriormente, M_u es el momento que ocurre simultáneamente con V_u en la sección considerada. El valor de $V_u d/M_u$ no debe tomarse mayor que 1.0 al calcular V_c, según el código.

2. Cuando se requiere refuerzo por cortante, el código establece que la cantidad provista debe situarse entre ciertos límites claramente especificados tanto inferiores como superiores. Si la cantidad de refuerzo es muy baja, éste puede fluir o bien romperse inmediatamente después de la formación de una grieta inclinada. Tan pronto como se desarrolla una grieta diagonal, la tensión tomada previamente por el concreto se transmite al refuerzo del alma. Para impedir que los estribos (u otro refuerzo del alma) se rompan en ese momento, sus áreas deben tener por lo menos el valor mínimo indicado al final del siguiente párrafo.

La sección 11.4.6.3 del ACI especifica una cantidad mínima de refuerzo del alma para proveer una resistencia última al cortante no menor que $0.75\lambda\sqrt{f'_c}\, b_w s$. El uso de esta disposición del código deberá impedir una falla repentina por cortante de la viga cuando se presenten grietas inclinadas. La resistencia por cortante calculada con esta expresión no puede ser menor que

50 $b_w s$. Si se tuviese una resistencia de $0.75\lambda\sqrt{f'_c}$ lb/plg^2 para un ancho b_w del alma y una longitud de viga s igual a la separación entre estribos, tendremos

$$0.75\sqrt{f'_c}b_w s = A_v f_y$$

$$A_{v\ \text{mínima}} = \frac{0.75\sqrt{f'_c}b_w s}{f_y} \qquad \text{(Ecuación 11-13, ACI)}$$

pero no menor que el valor obtenido con una resistencia igual a $50b_w s/f_y$, en la cual se ha sustituido un valor de 50 lb/plg^2.

Si $\sqrt{f'_c}$ es mayor que 4 444 lb/plg^2, el valor mínimo de A_v es controlado por la expresión $0.75\sqrt{f'_c}b_w s/f_y$. Si f'_c es menor que 4 444 lb/plg^2, el valor mínimo A_v será controlado por la expresión $50b_w s/f_y$.

En unidades del SI

$$A_{v\ \text{mín}} \frac{1}{16}\sqrt{f'_c}\frac{b_w s}{f_y} \geq \frac{0.33b_w s}{f_y}$$

Esta expresión de la sección 11.4.6.3 del ACI provee el área mínima de refuerzo del alma A_v que debe usarse siempre que el momento de torsión factorizado T_u no exceda una cuarta parte del par de torsión de agrietamiento T_{cr}. Tal par de torsión no causará una reducción apreciable en la resistencia a flexión cortante de un miembro y puede ser despreciado (sección 11.5.1 del ACI). Para miembros no presforzados, este valor límite es

$$\phi\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}}\right)$$

En unidades del SI

$$\frac{\phi\lambda\sqrt{f'_c}}{12}\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}}$$

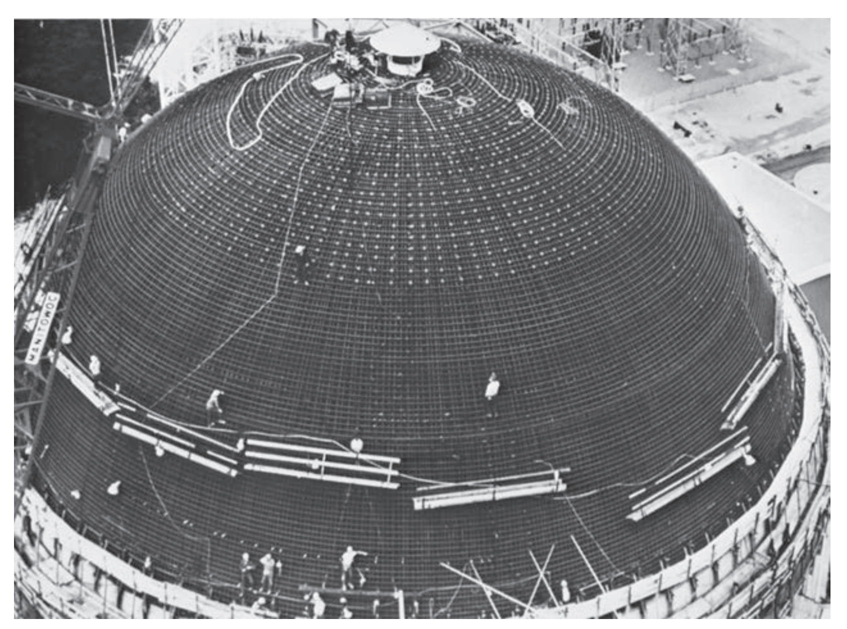
En esta expresión $\phi = 0.75$, A_{cp} = área encerrada por el perímetro exterior de la sección transversal del concreto y p_{cp} es el perímetro exterior de la sección transversal de concreto. El cálculo de T_u y T_{cr} para situaciones diversas se presenta en el capítulo 15.

Aunque usted puede considerar que no es necesario el uso de tal refuerzo mínimo por cortante, el estudio de los daños sísmicos en estos últimos años ha mostrado cantidades muy grandes de fallas por cortante en las estructuras de concreto reforzado y se cree que el uso de este valor mínimo puede mejorar considerablemente la resistencia de tales estructuras a las fuerzas sísmicas. Realmente, muchos proyectistas consideran que el área mínima de refuerzo del alma debería usarse a todo lo largo de la viga y no sólo donde V_u es mayor que $\phi V_c/2$.

Este requisito de refuerzo mínimo por cortante puede pasarse por alto si por medio de pruebas se demuestra que las resistencias requeridas por flexión y cortante pueden obtenerse sin el refuerzo por cortante (ACI 11.4.6.2).

3. Como se describió anteriormente, un estribo no puede tomar un cortante apreciable, a menos que lo cruce una grieta inclinada. Entonces, para asegurarse que toda grieta a 45° es interceptada al menos por un estribo, la separación máxima de los estribos verticales permitida por el código (11.4.5.1) es el menor de los valores de $d/2$ o 24 plg para miembros no presforzados y asimismo $\frac{3}{4}h$ para miembros presforzados o 24 plg, en donde h es el espesor total del miembro. Sin embargo, si V_s excede a $4\sqrt{f'_c}b_w d$,* estas separaciones máximas deben reducirse a la mitad (ACI 11.4.5.3).

*En unidades del SI $V_s = \frac{1}{3}\sqrt{f'_c}b_w d$.



Colocación de las varillas de refuerzo para el domo hemisférico de la estructura de contención de concreto reforzado de una planta de energía nuclear. (Cortesía de Bethlehem Steel Corporation.)

Esta separación más pequeña conduce a una configuración más estrecha de las grietas inclinadas.

Otra ventaja de limitar los valores máximos de la separación de los estribos es que con poco espaciamiento sujetarán las varillas longitudinales en la viga. Reducen la oportunidad de que el acero pueda desgarrarse o pandearse a través del recubrimiento de concreto o posiblemente deslizarse en éste.

De ninguna manera se permite que V_s exceda el valor $8\sqrt{f'_c}b_w d$ (código 11.4.7.9).† La resistencia al cortante de una viga no puede aumentarse indefinidamente, agregando más y más refuerzo porque el concreto eventualmente se desintegraría sin importar cuánto refuerzo al cortante se hubiera agregado. El lector puede entender la existencia de un límite superior si pondera la condición del concreto arriba de las grietas. Cuanto mayor sea el cortante en el miembro transferido por el refuerzo para cortante en la parte superior del concreto, mayor será la probabilidad de una falla en ese concreto por una combinación de cortante y compresión.

4. La sección 11.1.2 del código establece que los valores de $\sqrt{f'_c}$ usados en el diseño del refuerzo del alma no deben exceder a 100 lb/plg^2,‡ excepto para ciertos casos indicados en la sección 11.1.2.1. En esta sección se permite usar un mayor valor para miembros que tengan el refuerzo mínimo especificado en las secciones 11.4.6.3, 11.4.6.4 y 11.5.5.2 del ACI. Los miembros que satisfacen estos requisitos por refuerzo cortante adicional tienen suficiente capacidad después del agrietamiento para impedir la falla por tensión diagonal.

5. La sección 12.13 del código establece requisitos acerca de dimensiones, longitudes de desarrollo, etc. Para que los estribos desarrollen sus resistencias de diseño, deben estar adecuadamente anclados. Los estribos pueden ser cruzados por grietas de tensión diagonal en puntos diversos a lo largo de sus alturas. Como estas grietas pueden cruzar muy cerca de los bordes de tensión o de

†En unidades del SI, es $\frac{2}{3}\sqrt{f'_c}b_w d$.

‡En unidades del SI, es $\frac{25}{3}$ MPa.

compresión de los miembros, los estribos deben poder desarrollar sus resistencias de fluencia a lo largo de toda su longitud. Puede verse entonces por qué deben doblarse alrededor de las varillas longitudinales de mayores diámetros que el de sí mismos y deben prolongarse en longitudes de desarrollo adecuadas. Si se tiene refuerzo de compresión, el enganchamiento de los estribos alrededor de estas varillas ayudará a impedir el pandeo de las mismas.

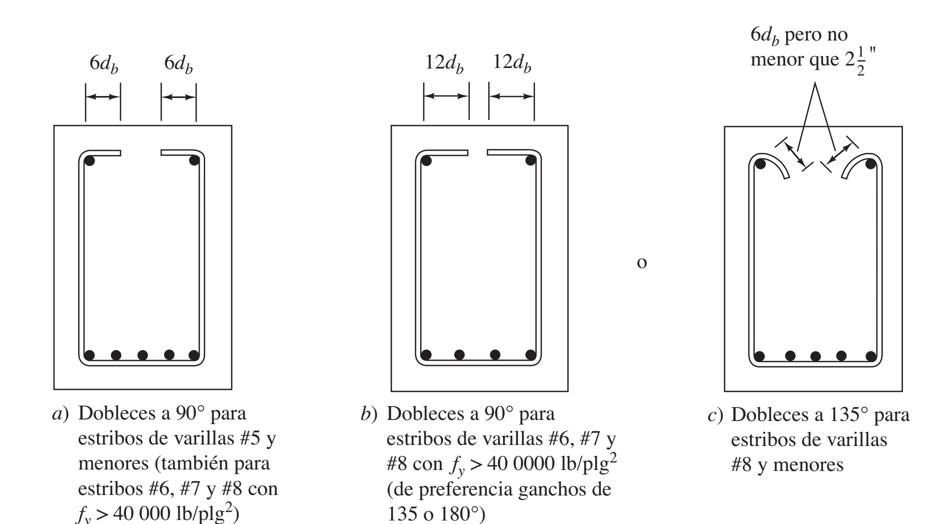
Los estribos deben ponerse tan cerca de las caras de tensión y compresión de las vigas como lo permita el recubrimiento y el refuerzo longitudinal especificado. Lo ideal es que las terminales de los estribos tengan ganchos doblados a 135° o 180° alrededor de las varillas longitudinales, con longitudes de desarrollo tal como se especifican en las secciones 8.1 y 12.13 del ACI. En seguida se muestra información detallada sobre los estribos:

a) Los estribos con dobleces a 90° y extensiones de $6d_b$ en sus extremos libres pueden usarse para varillas del #5 y menores, como se muestra en la figura 8.7(*a*). Las pruebas han mostrado que los dobleces a 90° con extensiones a $6d_b$ no deben usarse en varillas del #6 o mayores (a menos que f_y sea de 40 000 lb/plg^2 o menor) porque tienden a "zafarse" bajo grandes cargas.

b) Si f_y es mayor que 40 000 lb/plg^2, pueden usarse varillas del #6, #7 y #8 con dobleces a 90° si las extensiones son de $12d_b$ [véase la figura 8.7(*b*)]. La razón para esta especificación es que no es posible doblar estas varillas con resistencias más altas apretadamente alrededor de las varillas longitudinales.

c) Los estribos con dobleces a 135° y extensiones de $6d_b$ pueden usarse para varillas del #8 y menores, como se muestra en la figura 8.7(*c*).

6. Cuando la reacción de una viga causa compresión en el extremo de un miembro en la misma dirección que la fuerza cortante externa, la resistencia por cortante de esa parte del miembro aumenta. Las pruebas en tales miembros de concreto reforzado han mostrado que en general, cuando existe una fuerza cortante que varía gradualmente (como en el caso de un miembro uniformemente cargado), la primera grieta ocurre a una distancia d desde la cara del apoyo. Por tanto es permisible, según el código (11.1.3.1), disminuir un poco la fuerza cortante calculada en una distancia d desde la cara del apoyo. Esto se hace usando una V_u en ese intervalo igual a la V_u calculada, a una distancia d de la cara del apoyo. Si una carga concentrada se aplicada en esta región, tal reducción de la fuerza cortante no se permite. Tales cargas se transmiten directamente



a) Dobleces a 90° para estribos de varillas #5 y menores (también para estribos #6, #7 y #8 con f_y > 40 000 lb/plg^2)

b) Dobleces a 90° para estribos de varillas #6, #7 y #8 con f_y > 40 0000 lb/plg^2 (de preferencia ganchos de 135 o 180°)

c) Dobleces a 135° para estribos de varillas #8 y menores

Nota: acomodo de los estribos tan cerca de las superficies de compresión y tensión como lo permitan el recubrimiento y otro refuerzo.

Figura 8.7 Detalles de estribos.

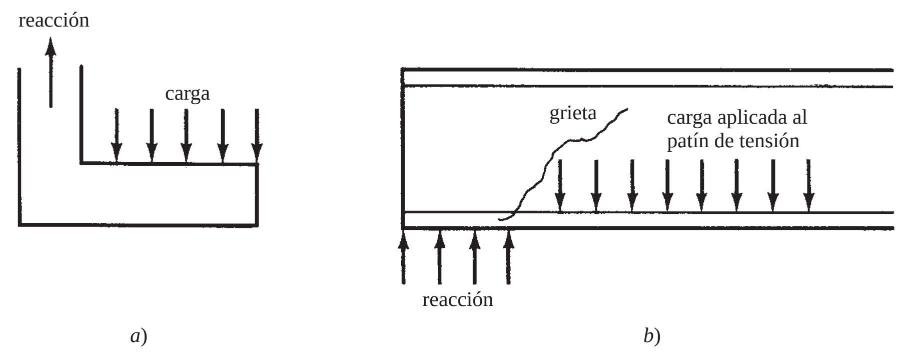


Figura 8.8 Dos situaciones donde la reducción de esfuerzo al corte de extremo no está permitida.

al apoyo por encima de las grietas a 45°, con el resultado de que no se permite una reducción en la fuerza cortante extrema para propósitos de diseño.

Si la reacción tiende a producir tensión en esta zona, no se permite ninguna reducción en el esfuerzo cortante, porque las pruebas han mostrado que puede ocurrir un agrietamiento en la cara del apoyo o aun dentro de él. La figura 8.8 muestra dos casos donde la reducción de esfuerzo cortante al extremo no está permitida. En la situación mostrada en la figura 8.8(*a*) la sección crítica está en la cara del apoyo. En la figura 8.8(*b*) se muestra una sección I, con la carga aplicada a su patín de tensión. Las cargas tienen que transmitirse a través de la grieta inclinada antes de que alcancen el apoyo. Otro problema de agrietamiento como éste ocurre en las zapatas de los muros de contención, como se verá en la sección 13.10 de este texto.

7. Diversas pruebas en vigas de concreto reforzado de proporciones normales con suficiente refuerzo en el alma han mostrado que las fuerzas cortantes no tienen un efecto significativo en la capacidad por flexión de las vigas. Sin embargo, los experimentos con vigas de gran peralte, muestran que las fuerzas cortantes grandes suelen impedir el desarrollo de las capacidades de flexión plenas. Como consecuencia, los requisitos del código dados en los párrafos precedentes no son aplicables a vigas cuyos claros libres divididos entre sus peraltes efectivos sean menores que cuatro o para regiones de vigas que están cargadas con cargas concentradas dentro de una distancia del apoyo igual al peralte del miembro y que están cargadas en una cara y apoyadas en la cara opuesta. Esta situación permite el desarrollo de puntales de compresión entre las cargas y los apoyos. Para miembros tales como éstos, el código en su apéndice A provee a un método alterno de diseño, que se llama el diseño de "puntal y tirante". Este método se describe brevemente en el apéndice C de este texto. Si las cargas se aplican a través de los lados o la parte inferior de tales miembros, su diseño de esfuerzo cortante debe manejarse como en el caso de vigas ordinarias. Los miembros situados en esta clasificación incluyen las vigas de gran peralte, los voladizos cortos y las ménsulas. Las ménsulas son miembros que se proyectan de los lados de las columnas y que se usan para soportar vigas y trabes, como se muestra en la figura 8.9. Son muy usadas en la construcción precolada. Los requisitos especiales para el refuerzo del alma en tales miembros se dan en la sección 11.7 del código y se estudian en la sección 8.12 de este capítulo.

8. La sección 8.11.8 del código ACI permite una fuerza cortante de $1.1V_c$ para las costillas de las viguetas de construcción, donde hay vigas T con almas ahusadas con poca separación. Para el incremento de 10% en V_c, las proporciones de las viguetas deben cumplir los requisitos de la sección 8.11 del ACI. En la sección 8.11.2 del ASCI se estipula que las costillas no deben ser menores a 4 plg de ancho y tener peraltes mayores de 3.5 veces el ancho mínimo de las costillas, las cuales no deben estar separadas libremente a más de 30 plg.

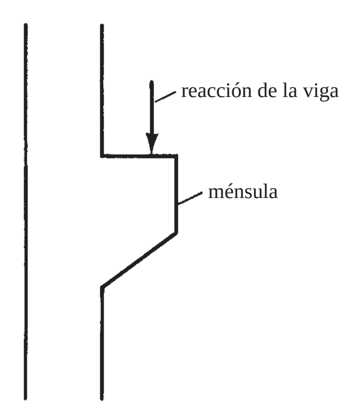


Figura 8.9 Ménsula que soporta reacción de viga.

8.10 EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE DISEÑO POR CORTANTE

El ejemplo 8.1 ilustra la selección de una viga con una sección transversal lo suficientemente grande para que no requiera el refuerzo en el alma. La viga resultante es extraordinariamente grande. Normalmente se considera una práctica mucho mejor usar secciones sensiblemente más pequeñas construidas con refuerzo en el alma. El lector también debe darse cuenta de que es buena práctica de la construcción usar algunos estribos en todas las vigas de concreto reforzado (aun cuando no sean requeridos por cortante) porque permiten a los trabajadores construir para cada viga una jaula de acero que se puede manipular convenientemente.

EJEMPLO 8.1

Determinar la sección transversal mínima requerida para una viga rectangular desde el punto de vista del cortante, de manera que según el código ACI no se requiera refuerzo en el alma si $V_u = 38$ klb y $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2. Use el valor conservador de $V_c = 2\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$.

SOLUCIÓN La resistencia al cortante suministrada por el concreto se determina con la ecuación

$$\phi V_c = (0.75)\left(2(1.0)\sqrt{4\,000}b_w d\right) = 94.87 b_w d$$

Pero el artículo 11.4.6.1 del código ACI establece que debe suministrarse un área mínima de refuerzo por cortante si V_u excede a $\frac{1}{2}\phi V_c$.

$$38\,000 = \left(\frac{1}{2}\right)(94.87 b_w d)$$

$$b_w d = 801.1 \text{ plg}$$

Se usa una viga de $24'' \times 36''$ ($d = 33.5''$)

El diseño del refuerzo del alma se ilustra en los ejemplos 8.2 a 8.6. Las separaciones máximas entre los estribos verticales se dieron previamente, pero no se dijo nada acerca de las separaciones mínimas. Los estribos deben estar espaciados lo suficiente para permitir el paso del agregado y, además, deben ser razonablemente pocos para mantener dentro de límites sensatos la mano de obra requerida para fabricarlos y colocarlos. Por tanto, normalmente se usan separaciones mínimas de 3 o 4 plg. Generalmente se usan estribos del #3, pero si las separaciones de diseño calculadas son menores que $d/4$, pueden usarse estribos de mayor diámetro. Otra alternativa es usar estribos ⊔⊓⊔ en lugar de estribos ⊔. Para evitar confusiones, no deben emplearse en la misma viga estribos de diferente diámetro.

Como se ilustra en los ejemplos 8.3, 8.5 y 8.6, es muy conveniente dibujar el diagrama V_u y marcarlo cuidadosamente con los valores de elementos tales como ϕV_c, $\phi V_c/2$ y V_u a una distancia d de la cara del apoyo, así como mostrar las dimensiones implicadas.

Algunos proyectistas colocan el primer estribo a una distancia de la mitad de la separación calculada como requisito desde la cara. Otros ponen el primero a 2 o 3 plg desde el apoyo.

Desde un punto de vista práctico, los estribos usualmente se colocan con un espaciamiento centro a centro que sea un múltiplo de 3 o 4 plg para simplificar el trabajo de campo. Aunque este procedimiento puede requerir uno o dos estribos adicionales, el costo total será menor debido a la reducción en el costo de la mano de obra. Un procedimiento común en el campo es marcar con gis intervalos de 2 pies en la cimbra y colocar los estribos a ojo entre esas marcas. Esta práctica se combina con una colocación algo violenta del concreto pesado en la cimbra seguida de un vigoroso vibrado. Estas prácticas del trabajo de campo deben hacer ver al estudiante claramente lo absurdo que resulta especificar espaciamientos teóricos extraños de los estribos tales como 4 @ $6\frac{7}{16}$ plg, o bien 6 @ $5\frac{3}{8}$ plg y a que no se acostumbra tal posicionamiento cuidadoso en los miembros reales. Por esto, el proyectista normalmente especificará espaciamientos de los estribos en múltiplos de pulgadas enteras y quizás en múltiplos de 3 o 4 plg.

Con los programas de computadora disponibles es fácil obtener arreglos teóricos de los estribos que conduzcan a una cantidad mínima de refuerzo por cortante requerido. El uso de tales programas es ciertamente útil para el proyectista, pero se deben revisar los valores resultantes y adaptarlos a patrones económicos simples con arreglos simples de espaciamiento; tales como múltiplos de 3 plg, por ejemplo.

En la tabla 8.1 se presenta un resumen de los pasos requeridos en el diseño de los estribos verticales. Para cada paso se indica el número de la sección aplicable del código. El autor ha encontrado que esta tabla es muy útil para el estudiante, como referencia en el diseño de estribos.

Tabla 8.1 Resumen de los pasos necesarios para el diseño de estribos verticales.

¿Es necesario el refuerzo por cortante?	
1. Dibuje el diagrama de V_u.	
2. Calcule V_u a una distancia d del apoyo (con ciertas excepciones).	11.1.3.1 y Comentario (R11.1.3.1)
3. Calcule $\phi V_c = 2\phi\lambda_y\sqrt{f'_c}b_w d$ (o use el método alterno).	11.2.1.1 11.2.2.1
4. Se necesitan estribos si $V_u > \frac{1}{2}\phi V_c$ (con algunas excepciones en losas, zapatas, miembros cortos, unidades de núcleo hueco, vigas reforzadas con fibra de acero y viguetas).	11.4.6.1
Diseño de los estribos	
1. Calcule la separación teórica entre estribos $s = A_v f_y d/V_s$ donde $V_s = (V_u - \phi V_c)/\phi$.	11.4.7.2
2. Determine la separación máxima para proveer un área mínima de refuerzo por cortante $s = \dfrac{A_v f_y}{0.75\sqrt{f'_c}b_w}$ pero no más que $\dfrac{A_v f_y}{50 b_w}$	11.4.6.3
3. Calcule la separación máxima: $d/2 \leq 24$ plg, si $V_s \leq 4\sqrt{f'_c}b_w d$.	11.4.5.1
4. Calcule la separación máxima: $\frac{d}{4} \leq 12$ plg, si $V_s > 4\sqrt{f'_c}b_w d$.	11.4.5.3
5. V_s no puede ser $> 8\sqrt{f'_c}b_w d$	11.4.7.9
6. Separación mínima práctica ≈ 3 o 4 plg.	

EJEMPLO 8.2

La viga mostrada en la figura 8.10 se seleccionó usando $f_y = 60\,000$ lb/plg^2 y $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2, peso normal. Determinar la separación teórica de los estribos del #3 ⊔ para cada una de las siguientes fuerzas cortantes:

a) $V_u = 12\,000$ lb
b) $V_u = 40\,000$ lb
c) $V_u = 60\,000$ lb
d) $V_u = 150\,000$ lb

SOLUCIÓN **a)** $V_u = 12\,000$ lb (usando $\lambda = 1.0$ para concreto de peso normal)

$$\phi V_c = (0.75)\left(2(1.0)\sqrt{3\,000}\right)(14)(24) = 27\,605 \text{ lb}$$

$$\frac{1}{2}\phi V_c = 13\,803 \text{ lb} > 12\,000 \text{ lb}$$

$\therefore$ No se requieren estribos

b) $V_u = 40\,000$ lb
Se requieren los estribos porque $V_u > \frac{1}{2}\phi V_c$.
Separación teórica

$$\phi V_c + \phi V_s = V_u$$

$$V_s = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi} = \frac{40\,000 - 27\,605}{0.75} = 16\,527 \text{ lb}$$

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_s} = \frac{(2)(0.11)(60\,000)(24)}{16\,527} = 19.17'' \leftarrow .$$

Separación máxima para proveer A_v mínima

$$s = \frac{A_v f_y}{0.75\sqrt{f'_c}b_w} = \frac{(2)(0.11)(60\,000)}{(0.75\sqrt{3\,000})(14)} = 22.95''$$

$$\leq s = \frac{A_v f_y}{50 b_w} = \frac{(2)(0.11)(60\,000)}{(50)(14)} = 18.86''$$

$$V_s = 16\,527 < (4)(\sqrt{3\,000})(14)(24) = 73\,614 \text{ lb}$$

$$\therefore s \text{ máxima} = \frac{d}{2} = 12''$$

$s = 12.0$ plg

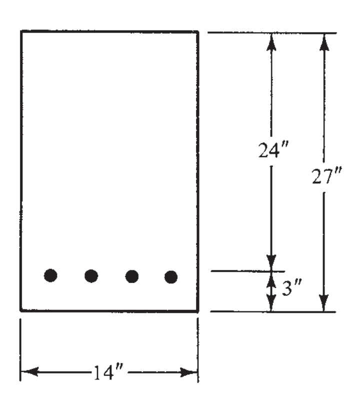


Figura 8.10

c) $V_u = 60\,000$ lb
Separación teórica

$$V_s = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi} = \frac{60\,000 - 27\,605}{0.75} = 43\,193 \text{ lb}$$

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_s} = \frac{(2)(0.11)(60\,000)(24)}{43\,193} = 7.33'' \leftarrow$$

Separación máxima para proveer A_v mínima

$$s = \frac{A_v f_y}{0.75\sqrt{f'_c} b_w} = \frac{(2)(0.11)(60\,000)}{(0.75\sqrt{3\,000})(14)} = 22.95''$$

$$\leq s = \frac{A_v f_y}{50 b_w} = \frac{(2)(0.11)(60\,000)}{(50)(14)} = 18.86''$$

$$V_s = 43\,193 < (4)(\sqrt{3\,000})(14)(24) = 73\,614 \text{ lb}$$

$$\therefore s \text{ máxima} = \frac{d}{2} = 12''$$

$s = 7.33$ plg

d) $V_u = 150\,000$ lb

$$V_s = \frac{150\,000 - 27\,605}{0.75} = 163\,193 \text{ lb}$$

$$163\,193 \text{ lb} > (8)(\sqrt{3\,000})(14)(24) = 147\,228 \text{ lb}$$

$$V_s \text{ no debe tomarse } > 8\sqrt{f'_c} b_w d$$

$\therefore$ Se requiere entonces una viga mayor y/o con valor f'_c mayor

EJEMPLO 8.3

Seleccionar estribos #3 ⊔ para la viga mostrada en la figura 8.11, para la cual $D = 4$ klb/pie y $L = 6$ klb/pie. $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2, peso normal y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN

$$V_u \text{ en el extremo izquierdo} = 7\ \ 1.2 \times 4 + 1.6 \times 6) = 100.8 \text{ klb} = 100\,800 \text{ lb}$$

$$V_u \text{ a una distancia } d \text{ de la cara del soporte} = \left(\frac{84 - 22.5}{84}\right)(100\,800) = 73\,800 \text{ lb}$$

$$\phi V_c = \phi 2\lambda\sqrt{f'_c} b_w d = (0.75)(2)\big((1.0\sqrt{4\,000}\big)(15)(22.5) = 32\,018 \text{ lb}$$

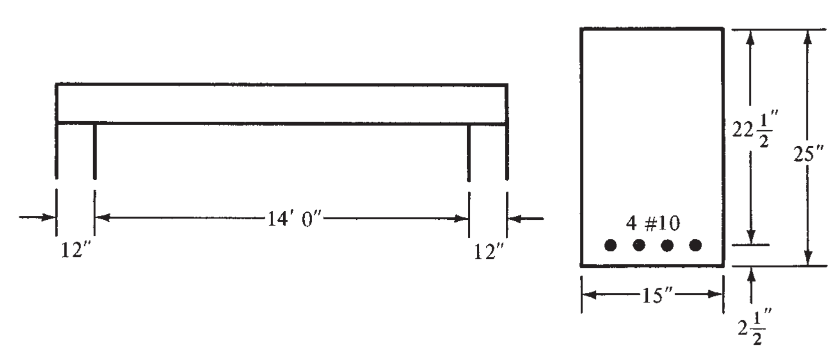
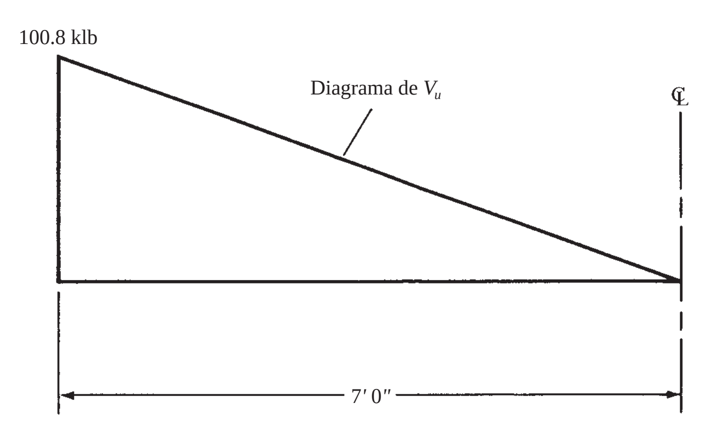


Figura 8.11



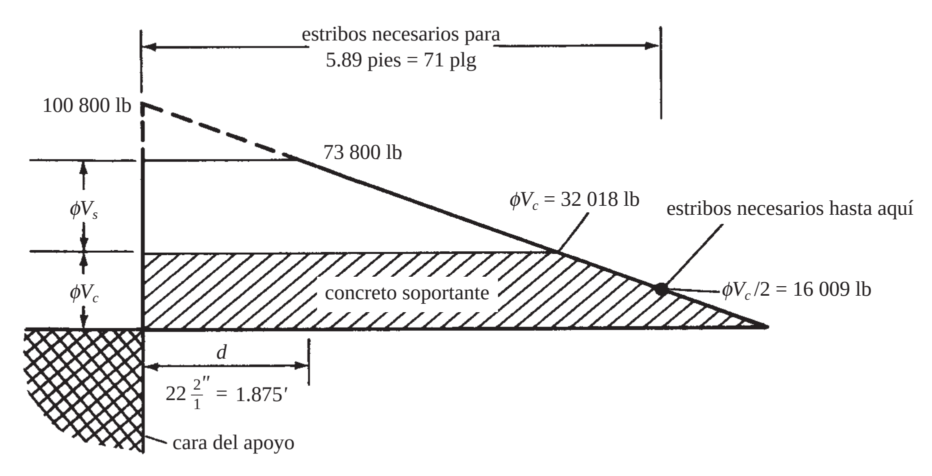


Figura 8.12

Estos valores se muestran en la figura 8.12.

$$V_u = \phi V_c + \phi V_s$$

$$\phi V_s = V_u - \phi V_c = 73\ 800 - 32\ 018 = 41\ 782 \text{ lb}$$

$$V_s = \frac{41\ 782}{0.75} = 55\ 709 \text{ lb}$$

Separación máxima de estribos = d/2 = 11.25” y a que V_s es < $4\sqrt{f'_c}b_w d$ = 85 382 lb. Separación teórica máxima en el extremo izquierdo

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_s} = \frac{(2)(0.11)(60\ 000)(22.5)}{(55\ 709)} = 5.33 \text{ plg}$$

Separación máxima para proveer A_v mínima de estribos

$$s = \frac{A_v f_y}{0.75\sqrt{f'_c}b_w} = \frac{(2)(0.11)(60\ 000)}{(0.75\sqrt{4\ 000})(15)} = 18.55 \text{ plg}$$

$$\leq s = \frac{A_v f_y}{50 b_w} = \frac{(2)(0.11)(60\ 000)}{(50)(15)} = 17.6 \text{ plg}$$

Por conveniencia, las separaciones teóricas se calculan en puntos diferentes a lo largo del claro y se muestran en la siguiente tabla:

Distancia desde la cara del apoyo (pie)	V_u (lb)	$V_s = \dfrac{V_u - \phi V_c}{\phi}$ (lb)	Teórica $s = \dfrac{A_v f_y d}{V_s}$ (plg)
0 a $d = 1.875$	73 800	55 709	5.33
2	72 000	53 309	5.57
3	57 600	34 109	8.71
4	43 200	14 909	> Máximo de $\frac{d}{2} = 11.25$

Separaciones seleccionadas

1 @ 3 plg = 3 plg

6 @ 6 plg = 36 plg

4 @ 9 plg = 36 plg

Separaciones simétricas respecto al centro del claro

Como ya se mencionó, es una buena práctica separar los estribos en múltiplos de 3 o 4 pulgadas entre centros. Por ejemplo, es muy razonable seleccionar en el ejemplo 8.3 las siguientes separaciones: 1 @ 3 plg, 6 @ 6 plg y 4 @ 9 plg. Al redondear las separaciones a múltiplos de 3 plg, fue necesario exceder las separaciones teóricas por una pequeña cantidad cerca del extremo de la viga. Sin embargo, los valores son bastante cercanos a los requeridos y el número total de estribos usados en la viga es más que adecuado.

En el ejemplo 8.4, que sigue, el valor de V_c para la viga del ejemplo 8.3 se calcula por el método alternativo de la sección 11.2.2.1 del código.

EJEMPLO 8.4

Calcular el valor de V_c a una distancia de 3 pies desde el extremo izquierdo de la viga del ejemplo 8.3 y la figura 8.11 usando la ecuación 11-5 del ACI.

$$V_c = \left(1.9\lambda\sqrt{f'_c} + 2\,500\rho_w \frac{V_u d}{M_u}\right) b_w d \leq 3.5\lambda\sqrt{f'_c} b_w d$$

SOLUCIÓN

$$\lambda = 1.0 \text{ (agregado de peso normal)}$$

$$w_u = (1.2)(4) + (1.6 \times 6) = 14.4 \text{ klb/pie}$$

$$V_u \text{ a } 3' = (7)(14.4) - (3)(14.4) = 57.6 \text{ klb}$$

$$M_u \text{ a } 3' = (100.8 \times 3) - (14.4)(3)(1.5) = 237.6 \text{ pie-klb}$$

$$\rho_w = \frac{5.06}{(15)(22.5)} = 0.0150$$

$$\frac{V_u d}{M_u} = \frac{(57.6)(22.5)}{(12)(237.6)} = 0.456 < 1.0 \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$V_c = [1.9(1.0)\sqrt{4\,000} + (2\,500)(0.0150)(0.456)](15)(22.5)$$

$$= \underline{\underline{46\,328}} \text{ lb} < 3.5\sqrt{4\,000}(15)(22.5) = 74\,709 \text{ lb}$$

En las vigas uniformemente cargadas consideradas hasta ahora, se ha supuesto que tanto las cargas muertas como las cargas vivas se extienden de extremo a extremo de los claros. Aunque esta práctica produzca la máxima V_u en los extremos de los claros simples, no producirá máximos en los puntos interiores. Para tales puntos, las fuerzas cortantes máximas se obtienen cuando la carga viva uniforme se extiende del punto considerado al apoyo extremo más distante. Para el ejemplo 8.5, la fuerza cortante se determina en el extremo de la viga (carga viva en todo el claro) y luego en el centro del claro de la viga (carga viva sólo a un lado) y se supone una relación lineal en puntos intermedios. Aunque el ACI específicamente no hace comentarios sobre la colocación variable de la carga viva para producir fuerzas cortantes máximas, ciertamente es su intención que los ingenieros sitúen las cargas a fin de maximizar las fuerzas cortantes de diseño.

EJEMPLO 8.5

Seleccionar estribos #3 ⊔ para la viga del ejemplo 8.3, suponiendo que la carga viva se coloca de manera que produzca una fuerza cortante máxima en el extremo de la viga y al centro de la misma.

SOLUCIÓN V_u máxima en el extremo izquierdo $= (7)(1.2 \times 4 + 1.6 \times 6) = 110.8$ klb $= 100\,800$ lb.
Para V_u máxima en el centro del claro, la carga viva se coloca como se muestra en la figura 8.13.

$$V_u \text{ en el centro del claro} = 50\,400 - (7)(1.2 \times 4) = 16.8\text{k} = 16\,800 \text{ lb}$$

$$V_c = 2(1.0)\sqrt{4\,000}(15)(22.5) = 42\,691 \text{ lb}$$

V_u a una distancia d de la cara del apoyo $= 78\,300$ lb tal como se determina por las proporciones de la figura 8.14.

$$V_u = \phi V_c + \phi V_s$$

$$\phi V_s = V_u - \phi V_c = 78\,300 - (0.75)(42\,691) = 46\,282 \text{ lb en el extremo izquierdo}$$

$$V_s = \frac{46\,282}{0.75} = 61\,709 \text{ lb}$$

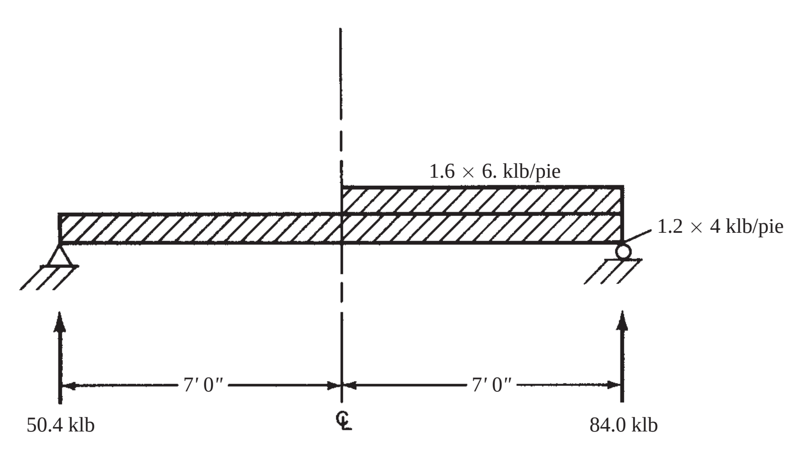


Figura 8.13

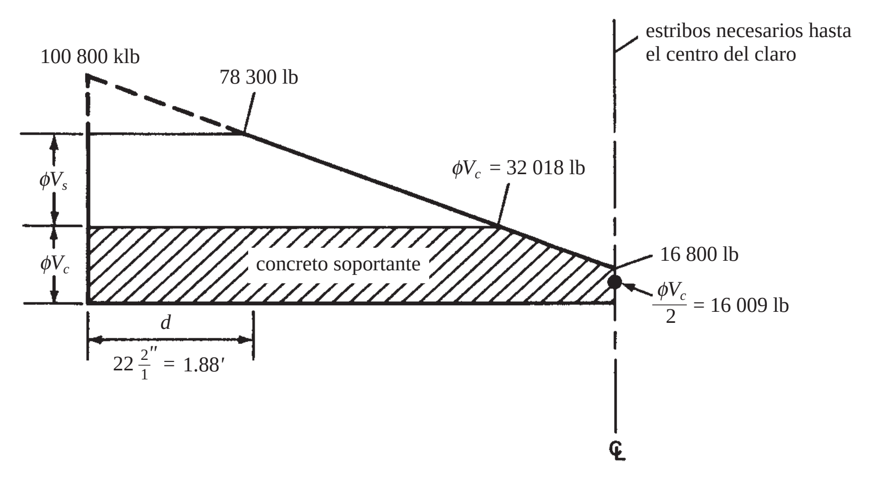


Figura 8.14

Las separaciones límites son las mismas que en el ejemplo 8.3. Las separaciones teóricas se dan en la siguiente tabla:

Distancia desde la cara del apoyo (pies)	V_u (lb)	$V_s = \dfrac{V_u - \phi V_c}{\phi}$ (lb)	Separación teórica requerida $s = \dfrac{A_v f_y d}{V_s}$ (plg)
0 a $d = 1.875$	78 300	61 709	4.81
2	76 800	59 709	4.97
3	64 800	43 709	6.79
4	52 800	27 709	10.71
5	40 800	11 709	> Máximo 11.25

Un arreglo posible (estribos del #4 sería mejor)

1 @ 3 plg = 3 plg

7 @ 4 plg = 28 plg

2 @ 6 plg = 12 plg

4 @ 9 plg = 36 plg

6 pie 7 plg   Separaciones simétricas respecto al centro del claro

EJEMPLO 8.6

Seleccionar separaciones para estribos #3 ⊔ para una viga T con $b_w = 10$ plg y $d = 20$ plg, de acuerdo con el diagrama V_u mostrado en la figura 8.15, con $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y $f'_c = 3\ 000$ lb/plg^2, concreto de peso normal.

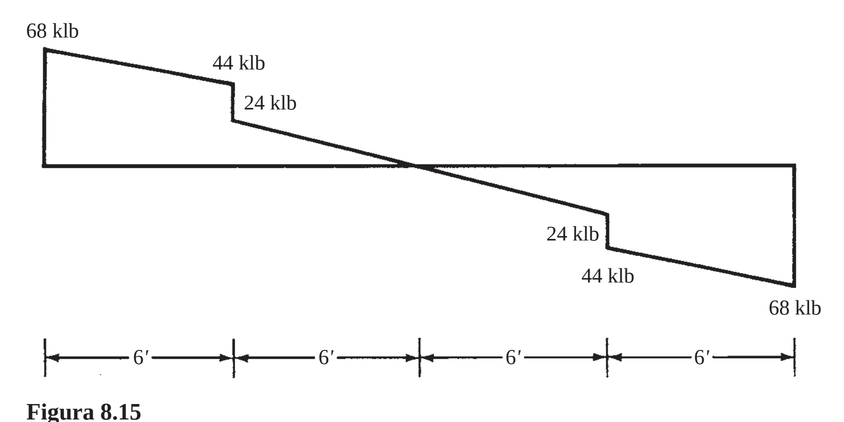


Figura 8.15

SOLUCIÓN **(con referencia a la figura 8.16)**

V_u a una distancia d de la cara del apoyo

$$= 44\,000 + \left(\frac{72-20}{72}\right)(68\,000 - 44\,000) = 61\,333 \text{ lb}$$

$\lambda = 1.0$ para concreto de peso normal.

$$\phi V_c = (0.75)\left(2(1.0)\sqrt{3\,000}\right)(10)(20) = 16\,432 \text{ lb}$$

$$\frac{\phi V_c}{2} = \frac{16\,432}{2} = 8\,216 \text{ lb}$$

$$\text{Los estribos se necesitan para una distancia} = 72 + \left(\frac{24\,000 - 8\,216}{24\,000}\right)(72) = 119.5 \text{ plg}$$

V_s en el extremo izquierdo $(V_u - \phi V_c)/\phi = (61\,333 - 16\,432)/0.75 = 59\,868$ que es mayor que $4\sqrt{f'_c}b_w d = (4\sqrt{3\,000})(10)(20) = 43\,818$ pero menor que $8\sqrt{f'_c}b_w d$. Por consiguiente la separación máxima de estribos en ese intervalo es $d/4 = 5$ plg.

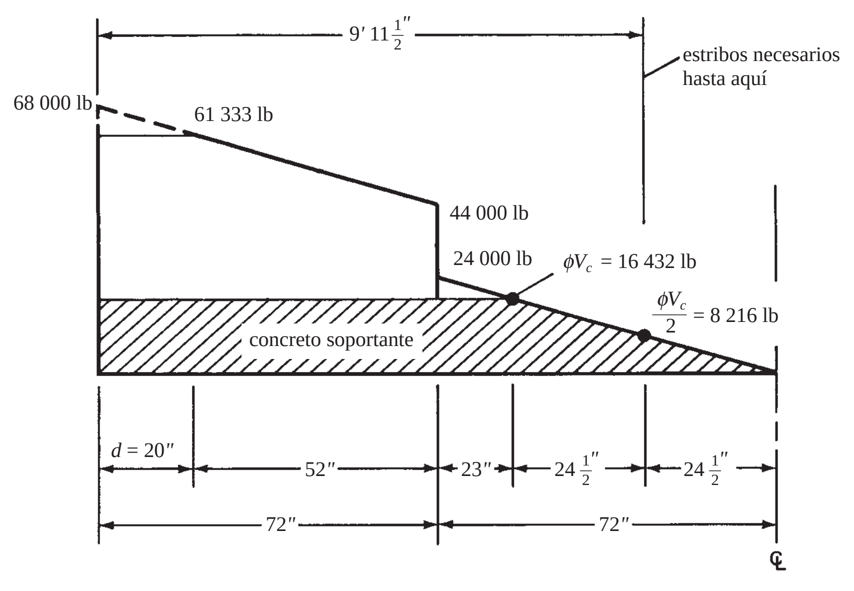


Figura 8.16

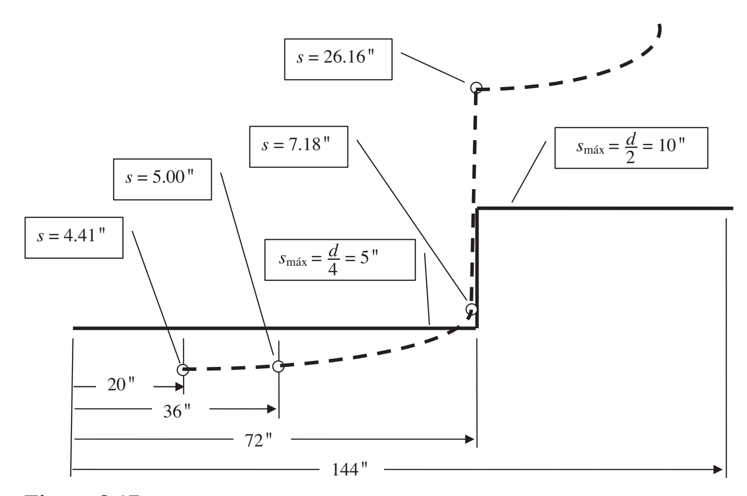


Figura 8.17

La separación máxima de estribos $= \frac{d}{4} = \frac{20}{4} = 5$ plg cuando $V_s > 4\sqrt{f'_c}b_w d = (4\sqrt{3\ 000})(10)(20) = 43\ 818$ lb. Mediante las proporciones tomadas de la columna V_s en la tabla, V_s ocurre a 43 818 lb aproximadamente a 4.66 pies o 56 plg del extremo izquierdo de la viga.

La separación máxima permitida para proveer una A_v mínima de estribos es el menor de los dos siguientes valores de s.

$$s = \frac{A_v f_y}{0.75\sqrt{f'_c}b_w} = \frac{(2)(0.11)(60\ 000)}{(0.75\sqrt{3\ 000})(10)} = 32.13 \text{ plg}$$

$$s = \frac{A_v f_y}{50 b_w} = \frac{(2)(0.11)(60\ 000)}{(50)(10)} = 26.4 \text{ plg}$$

Las separaciones teóricas en puntos diversos en la viga se calculan en la siguiente tabla:

Distancia desde la cara del apoyo (pies)	V_u (lb)	$V_s = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi}$ (lb)	Separación teórica requerida $s = \frac{A_v f_y d}{V_s}$ (plg)	Separación máxima (plg)
0 a $d = 1.667$	61 333	59 868	4.41″	4.41
3	56 000	52 758	5.00″	5.00
6–	44 000	36 757	7.18″	5.00
6 +	24 000	10 091	26.16″	10.00

En la figura 8.17 se muestra un resumen de los resultados de los cálculos precedentes, en donde la línea negra continua representa las separaciones máximas entre estribos permitidas por el código y la línea punteada representa las separaciones teóricas calculadas requeridas para $V_u - \phi V_c$.

De esta información el autor seleccionó las siguientes separaciones:

1 @ 3 plg = 3 plg
17 @ 4 plg = 68 plg
5 @ 10 plg = 50 plg
121 plg

Simétrica respecto al centro del claro

8.11 SEPARACIÓN ECONÓMICA DE LOS ESTRIBOS

Cuando se requieren estribos en un miembro de concreto reforzado, el código especifica las separaciones permisibles máximas entre $d/4$ y $d/2$. Por otra parte, usualmente se considera que las separaciones de estribos menores de $d/4$ no son económicas. Muchos proyectistas usan un máximo de tres separaciones diferentes en una viga. Éstas son $d/4$, $d/3$ y $d/2$. Es posible obtener fácilmente un valor de ϕV_s para cada tamaño y cada tipo de estribos para cada una de estas separaciones.[5]

Observe que el número de estribos es igual a d/s y que si usamos separaciones de $d/4$, $d/3$ y $d/2$ podemos ver que n es igual a 4, 3 o 2. Por tanto, el valor de ϕV_s *se* puede calcular para cualquier separación, tamaño y tipo de estribo. Por ejemplo, para estribos #3 ⊔ separados a $d/2$ con $\phi = 0.75$ y $f_y =$ 60 klb/plg^2,

$$\phi V_s = \frac{\phi A_v f_y d}{s} = \frac{(0.75)(2 \times 0.11)(60)(d)}{d/2} = 19.8 \text{ klb}$$

Los valores mostrados en la tabla 8.2 se calcularon de este modo para estribos de 60 klb/plg^2.

Un ejemplo del uso de esta tabla lo vemos en la viga y el diagrama V_u del ejemplo 8.3, ilustrados en la figura 8.12 donde se seleccionaron estribos #3 ⊔ de 60 klb/plg^2 para una viga con d igual a $22\frac{1}{2}$ plg. Para la separación mínima de $d/4$, podemos calcular $\phi V_c + 39.6 = 32.018 + 39.6 = 71.6$ klb. Se hacen cálculos similares para separaciones de $d/3$ y $d/2$ y obtenemos, respectivamente, 61.7 klb y 51.8 klb. El diagrama de fuerza cortante se repite en la figura 8.18 y los valores precedentes se indican en el diagrama con proporciones o con un escalímetro.

De esta información vemos que podemos usar $d/4$ para los primeros 2.72 pies, $d/3$ para el siguiente tramo de 0.68 pie y $d/2$ para los restantes 2.49 pies. Luego se redondean las separaciones (preferentemente en múltiplos de 3 plg). También, para esta viga en particular probablemente usaríamos la separación de $d/4$ en el tramo de 0.68 pie y luego $d/2$ en el resto de la distancia requerida.

Tabla 8.2 Valores para estribos de 60 klb/plg^2.

s	ϕV_s para estribos #3 ⊔ (klb)	ϕV_s para estribos #4 ⊔ (klb)
$d/2$	19.8	36
$d/3$	29.7	54
$d/4$	39.6	72

8.12 FRICCIÓN AL CORTANTE Y MÉNSULAS

Si se presenta una grieta en un miembro de concreto reforzado (ya sea causada por cortante, flexión, contracción, etc.) y si a las piezas de concreto en los lados opuestos de la grieta se les impide el movimiento de separación, habrá una gran resistencia al deslizamiento a lo largo de la grieta debido a las rugosas e irregulares superficies del concreto. Si se provee refuerzo a través de la grieta para impedir desplazamientos relativos a lo largo de la misma, el cortante será resistido por la fricción entre las caras, por la resistencia al desprendimiento de porciones salientes del concreto y por la acción de clavija del refuerzo que cruza la grieta. La transmisión del cortante bajo estas circunstancias se llama *fricción al cortante*.

Las fallas por fricción al cortante tienen más probabilidad de ocurrir en miembros cortos y peraltados sometidos a fuerzas cortantes intensas y momentos flexionantes pequeños. Éstas son las situaciones donde ocurren las grietas casi verticales. Si tanto el momento como la fuerza cortante son grandes, ocurrirán grietas de tensión diagonal formando ángulos grandes con la vertical. Ésta es la situación que se analizó en las secciones 8.1 a 8.11.

[5]Neville, B.B., ed., 1984, *Simplified Design Reinforced Concrete Buildings of Moderate Size and Height* (Skokie, IL: Portland Cement Association), págs. 3-12 y 3-16.

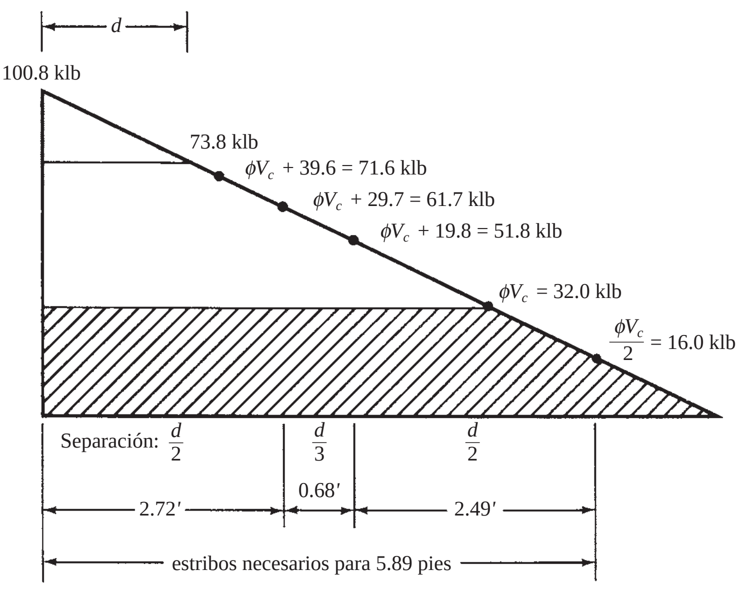


Figura 8.18

Un miembro corto en voladizo con relación de claro libre al peralte (a/d) de 1.0 o menor se llama *ménsula*. Un miembro así se muestra en la figura 8.19. El concepto de fricción al cortante provee un método conveniente para diseñar los casos en que el diseño por tensión diagonal no es aplicable. Las situaciones más comunes en que se usa el diseño por fricción al cortante se presentan en las ménsulas y en las conexiones precoladas, pero también se puede aplicar a las interfaces entre las piezas de concreto coladas en momentos diferentes y en las interfaces entre el concreto y secciones de acero, etcétera.

Cuando las ménsulas o extremos cortos en voladizo de las conexiones precoladas soportan fuertes cargas concentradas, están sujetos a posibles fallas de fricción al cortante. Las líneas punteadas en la figura 8.19 muestran las posiciones probables de estas fallas. Se notará que en los casos de apoyo en los extremos, las grietas tienen tendencia a ocurrir formando ángulos de aproximadamente 20° respecto a la dirección de la aplicación de la fuerza.

No se dedica espacio en este capítulo para proveer un ejemplo de diseño de fricción al cortante, pero se harán algunas observaciones generales al respecto. (En la sección 12.13 de este texto se presenta un ejemplo numérico de fricción al cortante en relación con la transmisión de fuerzas horizontales en la base

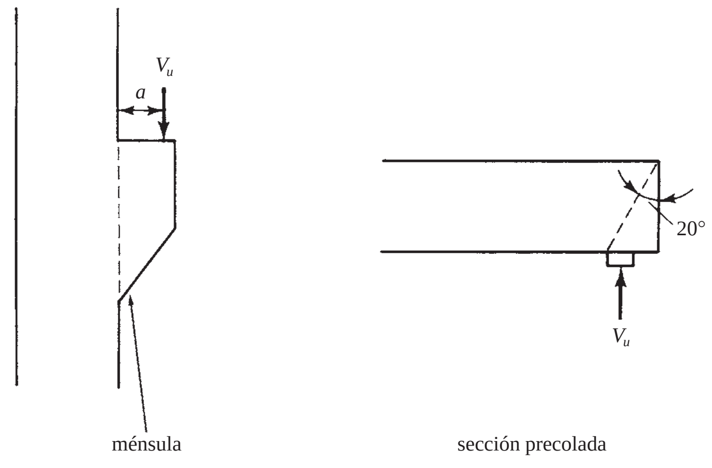


Figura 8.19 Fallas posibles por fricción al cortante.

de una columna hacia la zapata.) Primero se supone que se ha formado una grieta, como se muestra con las líneas punteadas en la figura 8.19. Conforme se desarrolla un deslizamiento a lo largo de la superficie agrietada, la rugosidad de las superficies del concreto ocasiona que las caras opuestas del concreto se separen.

La separación del concreto es resistida por el refuerzo de tensión (A_{vf}) provisto a través de la grieta. Se supone que este acero se deforma hasta que cede. (Una abertura de la grieta de 0.01 plg probablemente será suficiente para desarrollar la resistencia a la fluencia de las varillas.) La fuerza de sujeción desarrollada en las varillas $A_{vf} f_y$ provee una resistencia por fricción igual a $A_{vf} f_y \mu$, donde μ es el coeficiente de fricción (se dan valores para diferentes situaciones en la sección 11.6.4.3 del código).

La resistencia de diseño por cortante del miembro debe igualar al menos a la fuerza cortante, para ser tomada como

$$\phi V_n = V_u = \phi A_{vf} f_y \mu$$

El valor de f_y usado en esta ecuación no puede exceder de 60 klb/plg^2 y el refuerzo por fricción cortante a través o perpendicular a la grieta por cortante se obtiene con la expresión

$$A_{vf} = \frac{V_u}{\phi f_y \mu}$$

Este refuerzo debe colocarse apropiadamente a lo largo del plano de corte. Si no hay un momento flexionante calculado, las varillas se deben colocar con una separación uniforme. Si hay un momento calculado, es necesario distribuir las varillas en el área de tensión por flexión del plano de corte. Las varillas deben anclarse suficientemente en ambos lados de la grieta para que desarrollen su resistencia a la fluencia por medio del empotramiento, ganchos, varillas con anclaje interno u otros métodos. Como el espacio es a menudo limitado en estas situaciones, suele ser necesario soldar las varillas a dispositivos especiales, tales como largueros o ángulos de acero. Las varillas deben anclarse en concreto confinado (es decir, se deben utilizar estribos de columnas o concreto externo o algún otro refuerzo).

Cuando las vigas están apoyadas sobre ménsulas, puede haber problema con la contracción y la expansión de las vigas, que transmiten fuerzas horizontales sobre las ménsulas. Cuando tales fuerzas están presentes, la placa de apoyo bajo la carga concentrada debe soldarse al acero de tensión. Basado en varias pruebas, el código ACI (11.8.3.4) establece que la fuerza horizontal usada debe ser por lo menos igual a $0.2V_u$, a menos que se adopten disposiciones especiales para evitar fuerzas de tensión.

La presencia de tensión directa a través de una superficie agrietada obviamente reduce la capacidad de transmisión de esfuerzo cortante. Entonces, la resistencia a la compresión directa se incrementa. Como consecuencia, la sección 11.6.7 del código permite el uso de una carga de compresión permanente para aumentar la fuerza de sujeción por fricción cortante. En la figura 8.20 se muestra una ménsula común junto con su refuerzo.

También debe proveerse suficiente área de concreto y la sección 11.6.5 del código da los límites superiores para la fuerza cortante, V_n, transferida a través de una superficie de falla de fricción al cortante basándose en la resistencia del concreto y el área de contacto. Para concreto de peso normal colocado monolíticamente o colocado contra concreto intencionalmente desbastado, V_n no puede exceder el menor valor de

$$\begin{aligned} V_n &\leq 0.2f_c' A_c, \\ &\leq (480 + 0.08f_c')A_c, \quad \text{y} \\ &\leq 1\,600A_c \end{aligned}$$

Para todos los demás casos,

$$\begin{aligned} V_n &\leq 0.2f_c' A_c, \\ &\leq 800A_c \end{aligned}$$

donde A_c es el área de concreto de contacto a lo largo de la superficie de falla de fricción al cortante.

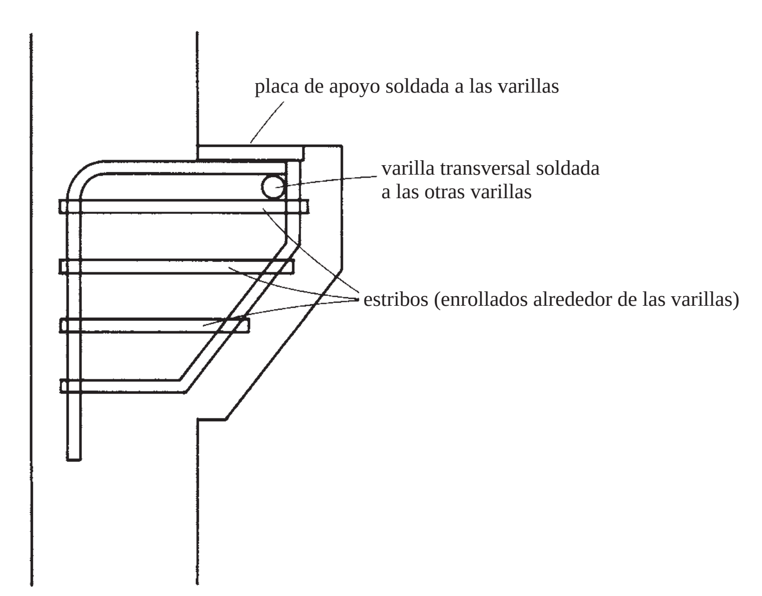


Figura 8.20

8.13 RESISTENCIA AL CORTANTE DE MIEMBROS SOMETIDOS A FUERZAS AXIALES

Los miembros de concreto reforzado sometidos a fuerzas cortantes pueden estar al mismo tiempo cargados con fuerzas axiales de compresión o de tensión debido al viento, a sismos, cargas gravitacionales aplicadas a miembros horizontales o inclinados, a la contracción en miembros confinados, etc. Estas fuerzas pueden afectar el diseño por cortante de los miembros. Las cargas de compresión tienden a impedir que se formen grietas. Como consecuencia, proveen a los miembros de mayores áreas de compresión y así de mayores resistencias al cortante. Por otra parte, las fuerzas de tensión agrandan las grietas y reducen las resistencias al cortante porque reducen las áreas de compresión.

Cuando existe una compresión axial considerable, puede usarse la siguiente ecuación para calcular la capacidad de carga por cortante de un miembro de concreto:

$$V_c = 2\left(1 + \frac{N_u}{2\,000\,A_g}\right)\lambda\sqrt{f'_c}b_w d \qquad \text{(Ecuación 11-4, ACI)}$$

Para un miembro sometido a una fuerza de tensión axial considerable, la capacidad por cortante del concreto puede determinarse con la siguiente expresión:

$$V_c = 2\left(1 + \frac{N_u}{500\,A_g}\right)\lambda\sqrt{f'_c}b_w d \qquad \text{(Ecuación 11-8, ACI)}$$

En esta expresión la carga axial N_u es negativa si la carga es de tensión. Nótese que si el valor calculado de N_u/A_g para usarse en esta ecuación es de 500 lb/plg^2 o mayor, el concreto habrá perdido su capacidad para tomar cortante. (El valor de V_c aplicado no puede ser menor que cero.)

Las expresiones en unidades del SI para las ecuaciones 11-4 y 11-8 del ACI son, respectivamente,

$$V_c = \left(1 + \frac{N_u}{14A_g}\right)\left(\frac{\lambda\sqrt{f'_c}}{6}\right)b_w d$$

$$V_c = \left(1 + \frac{0.3N_u}{A_g}\right)\left(\frac{\lambda\sqrt{f'_c}}{6}\right)b_w d$$

En lugar de usar la ecuación 11-4 del ACI para calcular la capacidad por cortante de las secciones sometidas a cargas de compresión axial, puede usarse la ecuación 11-5 del ACI. En esta ecuación puede sustituirse un momento revisado, M_m, en vez de M_u en la sección considerada y $V_u d/M_u$ no debe ser > 1.0. Para este caso V_c no debe ser mayor que el valor obtenido con la ecuación 11-7 del ACI.

$$V_c = \left(1.9\lambda\sqrt{f'_c} + 2\,500\rho_w \frac{V_u d}{M_u}\right)b_w d \leq 3.5\lambda\sqrt{f'_c}b_w d \qquad \text{(Ecuación 11-5, ACI)}$$

$$M_m = M_u - N_u\left(\frac{4h - d}{8}\right) \qquad \text{(Ecuación 11-6, ACI)}$$

$$V_c \text{ no puede ser } > \ 3.5\lambda\sqrt{f'_c}b_w d\sqrt{1 + \frac{N_u}{500A_g}} \qquad \text{(Ecuación 11-7, ACI)}$$

En unidades del SI, la ecuación 11-5 del ACI es

$$V_c = \left(\lambda\sqrt{f'_c} + 120\rho_w \frac{V_u d}{M_u}\right)\frac{b_w d}{7} \leq 0.3\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$$

La ecuación 11-7 es

$$V_c = 0.3\lambda\sqrt{f'_c}b_w d\sqrt{1 + \frac{0.3N_u}{A_g}}$$

El ejemplo 8.7, que sigue, ilustra el cálculo de la resistencia por cortante de un miembro de concreto cargado axialmente.

EJEMPLO 8.7

Para la sección de concreto mostrada en la figura 8.21 en la cual f'_c es de 3 000 lb/plg^2, peso normal ($\lambda = 1.0$)

a) Determinar V_c si ninguna carga axial está presente usando la ecuación 11-3 del ACI.

b) Calcular V_c usando la ecuación 11-4 del ACI si el miembro está sometido a una carga axial de compresión de 12 000 lb.

c) Repetir la parte *b*) usando la ecuación 11-5 revisada del ACI. En la sección considerada, suponga que $M_u = 30$ pie-klb y $V_u = 40$ klb. Use M_m en lugar de M_u.

d) Calcular V_c si la carga de 12 000-lb es de tensión.

SOLUCIÓN

a) $V_c = 2(1.0)\sqrt{3\,000}(14)(23) = \underline{\underline{35\,273 \text{ lb}}}$

b) $V_c = 2\left(1 + \frac{20\,000}{(2\,000)(14)(26)}\right)\left((1.0)\sqrt{3\,000}\right)(14)(23) = \underline{\underline{36\,242 \text{ lb}}}$

$< \ 3.5(1.0)\sqrt{3\,000}(14)(23) = 61\,728 \text{ lb}$

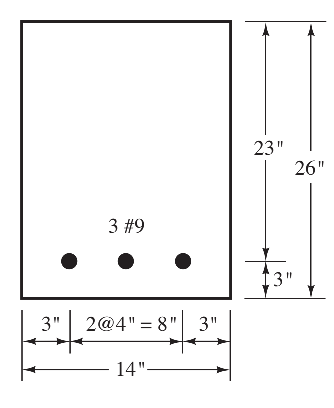


Figura 8.21

c) $M_m = (12)(30\,000) - 12\,000\left(\dfrac{4 \times 26 - 23}{8}\right) = 238\,500 \text{ plg-lb}$

$$\frac{V_u d}{M_m} = \frac{(40)(23)}{238.5} = 3.857 > 1.00 \;\therefore 1.0$$

$$V_c = \left[1.9(1.0)\sqrt{3\,000} + (2\,500)\left(\frac{3.00}{(14)(23)}\right)(1.00)\right](14)(23)$$

$$= \underline{\underline{41\,010 \text{ lb}}}$$

$$\text{Pero no} > \left(3.5(1.0)\sqrt{3\,000}\right)(14)(23)\sqrt{1 + \frac{12\,000}{(500)(14)(26)}}$$

$$= 63\,731 \text{ lb} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

d) $V_c = 2\left(1 + \dfrac{-12\,000}{(500)(14)(26)}\right)\left((1.0)\sqrt{3\,000}(14)(23)\right)$

$$= \underline{\underline{32\,950 \text{ lb}}}$$

8.14 REQUISITOS PARA EL DISEÑO POR CORTANTE EN VIGAS DE GRAN PERALTE

Hay algunos requisitos especiales para el diseño por cortante que se dan en la sección 11.7 del código para los miembros a flexión de gran peralte con valores ℓ_n/d iguales o menores que cuatro, cargados en una cara y soportados sobre la otra, para que puedan desarrollarse puntales de compresión entre las cargas y los soportes. Un miembro así se muestra en la figura 8.22(*a*). Algunos miembros de esta clase son vigas cortas de gran peralte con cargas intensas, losas de muros bajo cargas verticales, muros de cortante y quizá losas de piso sometidas a cargas horizontales.

Si las cargas se aplican por los lados o por el fondo del miembro (como en el caso en que las vigas se conectan por sus lados o por su parte inferior), como se ilustra en las figura 8.22(*b*) y 8.22(*c*), deben seguirse las especificaciones acostumbradas de diseño por cortante descritas antes en este capítulo, sea el miembro de gran peralte o no.

Los ángulos que forman las grietas inclinadas en los miembros a flexión de gran peralte (medidos desde la vertical) son usualmente mucho más pequeños que 45°; en algunas ocasiones son casi verticales. Por tanto, cuando se requiere refuerzo en el alma, éste tendrá que estar menos separado que en las vigas de peralte normal. Además, el refuerzo del alma tiene que ser tanto vertical como horizontal. Estas grietas casi verticales indican que las fuerzas principales de tensión son primordialmente horizontales, por lo que el refuerzo horizontal es particularmente efectivo para resistirlas.

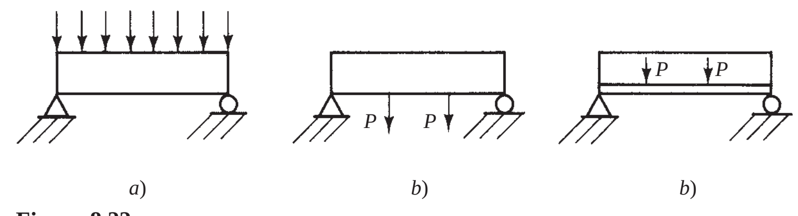


Figura 8.22

Las disposiciones detalladas del código relativas al diseño por cortante para vigas de gran peralte, conjuntamente con los números aplicables de sección del ACI, son como sigue:

1. Las vigas de gran peralte deben diseñarse usando el procedimiento descrito en el apéndice A del código (apéndice C en este libro de texto) o usando un análisis no lineal. (ACI 11.7.2.)
2. La resistencia nominal al cortante V_n para vigas de gran peralte no excederá a $10\sqrt{f'_c}b_w d$. (ACI 11.7.3.)
3. El área del refuerzo por cortante A_v perpendicular al claro debe igualar al menos a 0.0025 $b_w s$ y s no debe ser mayor que $d/5$ o 12 plg (ACI 11.7.4); s es la separación del refuerzo por cortante o torsión medida en una dirección paralela al refuerzo longitudinal.
4. El área del refuerzo por cortante paralelo al claro no debe ser menor que 0.0015 $b_w s_2$ y s_2 no debe ser mayor que $d/5$ o 12 plg (ACI 11.7.5); s_2 es la separación del refuerzo por cortante medida en una dirección perpendicular al refuerzo longitudinal de las vigas.

Observe que se requiere más refuerzo vertical que horizontal por cortante porque se ha demostrado que el refuerzo vertical es más efectivo que el refuerzo horizontal. El tema de las vigas de gran peralte se continúa en el apéndice C de este libro de texto.

8.15 COMENTARIOS INTRODUCTORIOS SOBRE TORSIÓN

Hasta años recientes, los factores de seguridad requeridos por los códigos de diseño para proporcionar miembros a flexión y a cortante eran muy grandes y los miembros de gran tamaño resultantes podían casi siempre resistir todo los momentos de torsión menos los muy grandes. Sin embargo, actualmente esto ya no es así, debido a que resultan miembros más pequeños que se seleccionan al usar el procedimiento de diseño por resistencia y la torsión necesita ser considerada con mucha más frecuencia.

La torsión puede ser muy significativa en las vigas curvas, en las escaleras de caracol, en las vigas con cargas aplicadas excéntricamente y aun en vigas de fachada con claros entre las columnas exteriores de edificios. Estas últimas soportan los bordes de las losas de piso, las vigas de piso, los muros de cortina y las fachadas, por lo que reciben sus cargas con cierta excentricidad. En la figura 8.23 se muestran varios casos donde la torsión puede ser un problema.

Cuando los miembros de concreto simple se someten a torsión pura, se agrietan a lo largo de líneas espirales a 45° si la tensión diagonal resultante excede la resistencia de diseño del concreto. Aunque estos esfuerzos de tensión diagonal producidos por la torsión son muy similares a los causados por el cortante, se presentan en todas las caras de un miembro. Como consecuencia, se suman a los esfuerzos causados por dicho cortante en un lado de la viga y se sustraen a ellos en el otro lado.

Los miembros de concreto reforzado sometidos a grandes fuerzas de torsión pueden fallar repentinamente si no están provistos de refuerzos de torsión. La adición de este refuerzo de torsión no cambia la magnitud de la torsión que causa las grietas diagonales, pero impide que los miembros se desgarren. Como consecuencia, podrán resistir momentos de torsión sustanciales sin fallar. Las pruebas han demostrado que son necesarias varillas longitudinales y estribos cerrados o espirales para interceptar las

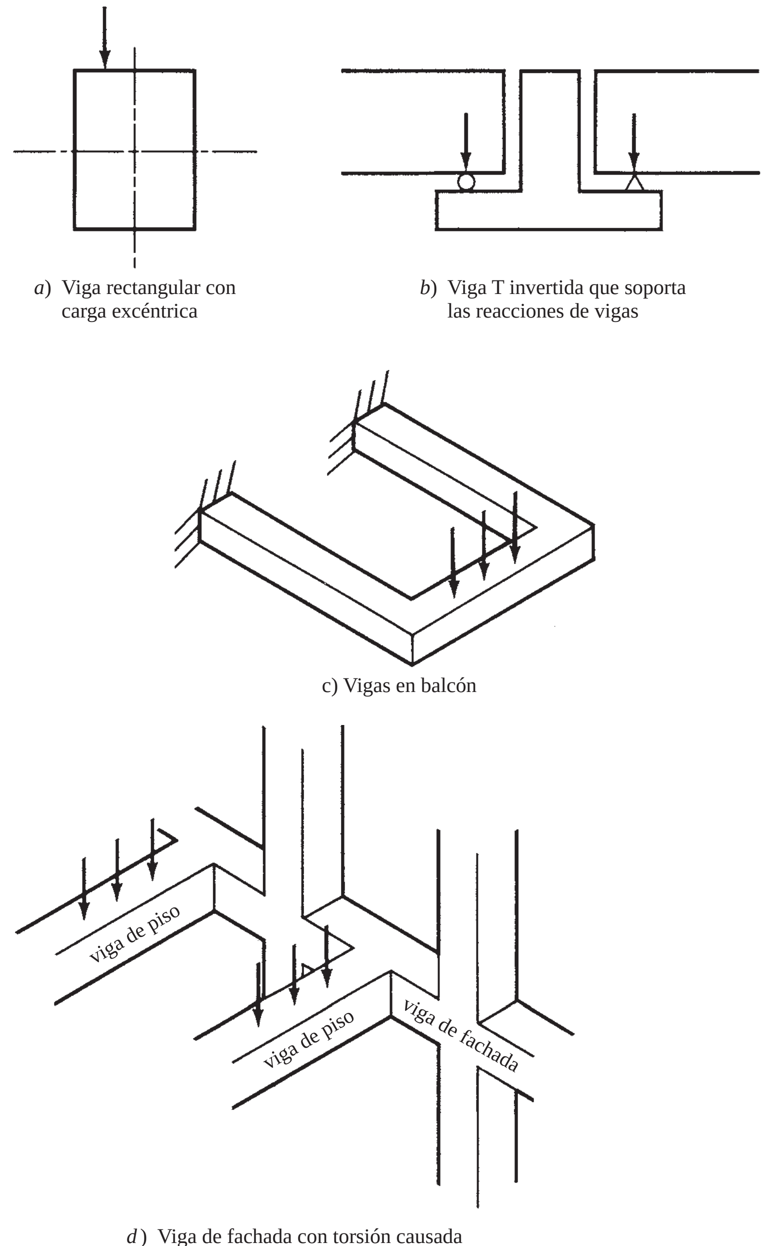


Figura 8.23 Algunos casos donde los esfuerzos de torsión pueden ser significativos.

numerosas grietas por tensión diagonal que ocurren en todas las superficies de las vigas sometidas a fuerzas de torsión apreciables. Debe haber una varilla longitudinal en cada esquina de los estribos para resistir los componentes horizontales de la tensión diagonal causada por la torsión. El capítulo 15 de este texto se dedica por completo a la torsión.

8.16 EJEMPLO EN UNIDADES SI

EJEMPLO 8.8

Determinar la separación requerida de estribos del #10 en el extremo izquierdo de la viga mostrada en la figura 8.24, si f'_c = 21 MPa, peso normal y f_y = 420 MPa.

SOLUCIÓN

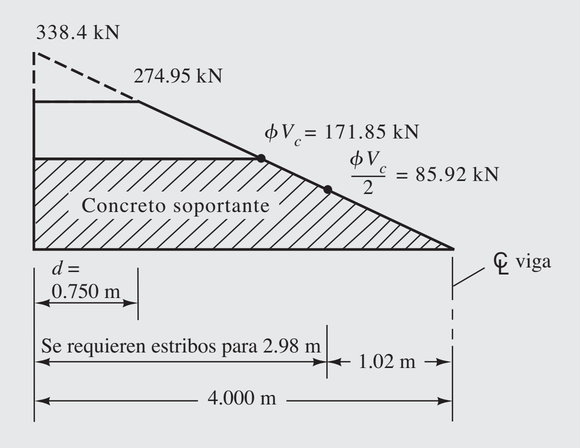
$$V_u \ @ \ \text{extremo izquierdo} = (4)(84.6) = 338.4 \text{ kN}$$

$$V_u \ @ \ \text{una distancia } d \text{ desde el extremo izquierdo}$$

$$= 338.4 - \left(\frac{750}{1\,000}\right)(84.6) = 274.95 \text{ kN}$$

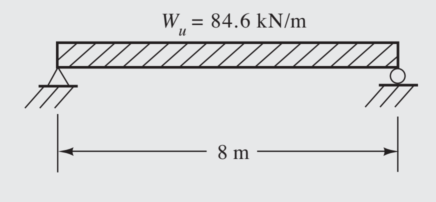
$$\phi V_c = (\phi)\left(\frac{\lambda\sqrt{f'_c}}{6}\right)b_w d = (0.75)\left(\frac{(1.0)\sqrt{21}}{6}\right)(400)(750)$$

$$= 171\,847 \text{ kN} = 171.85 \text{ kN}$$



$$V_u = \phi V_c + \phi V_s$$

$$V_s = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi} = \frac{274.95 - 171.85}{0.75} = 137.47 \text{ kN}$$



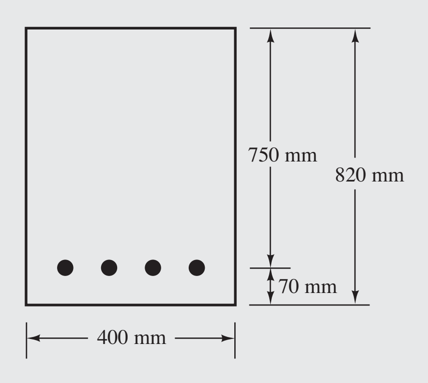


Figura 8.24

Considerando estribos del #10

$$s \text{ teórica} = \frac{A_v f_y d}{V_s} = \frac{(2)(71)(420)(750)}{(137.47)(10^3)} = 325 \text{ mm}$$

s máxima para proveer una A_v mínima para los estribos

$$s = \frac{3A_v f_y}{b_w} = \frac{(3)(2 \times 71)(420)}{400} = 447 \text{ mm} \qquad \text{(Ecuación 11-13, ACI métrico)}$$

$$V_s = 137.47 \text{ kN} < \frac{1}{3}\sqrt{f'_c}\, b_w d \qquad \text{(De la sección 11.4.4.3 del ACI métrico)}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{21}(400)(750) = 458\ 257 \text{ N} = 458.26 \text{ kN} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\therefore s \text{ máxima} = \frac{d}{2} = \frac{700}{2} = 375 \text{ mm} \leftarrow$$

Use s = 325 mm

8.17 EJEMPLOS CON COMPUTADORA

EJEMPLO 8.9

Repita el ejemplo 8.2(c) usando la hoja de cálculo de Excel provista en el capítulo 8.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo e ingrese valores en las celdas sombreadas de amarillo (que se muestran sombreadas en gris abajo, pero que son amarillas en las hojas de cálculo). Estos incluyen valores para V_u, f'_c, λ, b_w, d, A_v y f_{yt}. Se muestra

Diseño por cortante-vigas

	V_u =	60 000	lb				
	f'_c =	3 000	lb/plg^2				
	λ =	1					
	b_w =	14	plg				
	d =	24	plg				
	A_v =	0.22	plg^2				
	f_{yt} =	60 000	lb/plg^2				
	ϕ =	0.75					
	V_c =	36 807	lb				
	ϕV_c =	27 605	lb	-			
	1/2ϕV_c =	13 803	lb				
	$V_s = (V_u - \phi V_c)/\phi$ =	43 193	lb				
				-			
	ϕV_s requerido =	32 395	lb				
	s =	7.33	plg				
	seleccione s =	7.00	plg	-			
	$s_{máx}$ =	12	plg	Sección 11.4.5 del código		-	
	$A_{v\ mín}$ =	0.082	plg^2	Ecuación 11-13 del código		-	
	$s_{máx}$ =	22.95	plg	también ecuación 11-13 del código			
	$s_{máx}$ =	18.86	plg	Ecuación 11-13 del código con un límite de 50 lb/plg^2			
	$s_{máx}$ controlante =	12.00	plg				
	ϕV_s verdadera =	33 943	ℓb				
	Revise $\phi V_c - \phi V_s$ =	61 548	lb				

la separación s requerida de los estribos en la Celda C19 ($s = 7.33$ plg.). Use buen juicio para introducir un valor real para la separación en la celda debajo (escoja a s). Se muestra un valor seleccionado de $s = 7.00$ plg. Este valor no debe exceder el valor calculado de s así como tampoco el valor "$s_{máx}$ controlante" listado algunas celdas debajo. En la celda rotulada "Revise $\phi V_c + \phi V_s$" está la capacidad al cortante de la sección con la separación real de los estribos que usted ingresó en "seleccione s". Excederá al valor ingresado de V_u si el diseño es correcto. En este caso la capacidad es de 61 548 lb que excede a V_u de 60 000 lb. Varias advertencias aparecerán si su valor de "seleccione $s =$" es demasiado grande.

PROBLEMAS

8.1 El código ACI provee los siguientes valores límite para el cortante en miembros sometidos sólo a cortante y flexión: $2\sqrt{f'_c}$, $4\sqrt{f'_c}$ y $8\sqrt{f'_c}$. ¿Qué representa cada uno de estos valores límite?

8.2 Si la fuerza cortante máxima en un miembro se presenta en un apoyo, el código bajo ciertas condiciones permite al proyectista calcular la fuerza cortante a una distancia d de la cara del apoyo. Describa la situación cuando puede usarse esta fuerza cortante reducida.

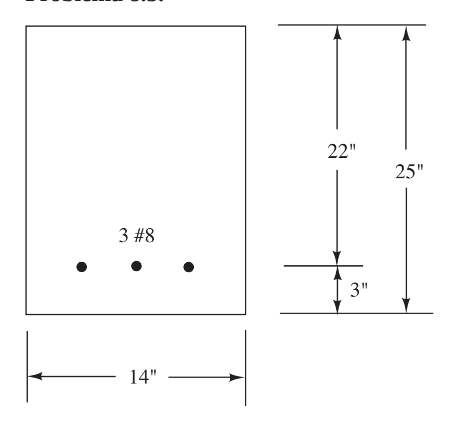
8.3 ¿Por qué limita el código el esfuerzo máximo de fluencia de diseño que puede usarse en los cálculos de diseño para el refuerzo por cortante a 60 000 lb/plg^2 (sin incluir la malla soldada de alambre)?

8.4 ¿Qué es la fricción cortante y dónde es más probable que sea considerada en el diseño de concreto reforzado?

Análisis por cortante

8.5 ¿Cuál es la resistencia de diseño por cortante de la viga mostrada si f'_c = 4 000 lb/plg^2 y f_v = 60 000 lb/plg^2? No se dispone de refuerzo por cortante. (*Resp*. 29 219.)

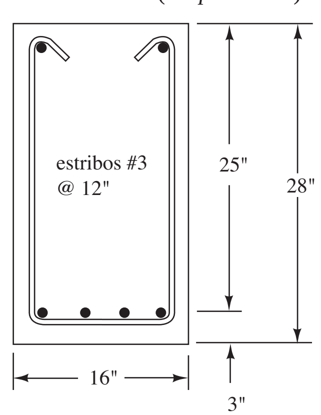
Problema 8.5.



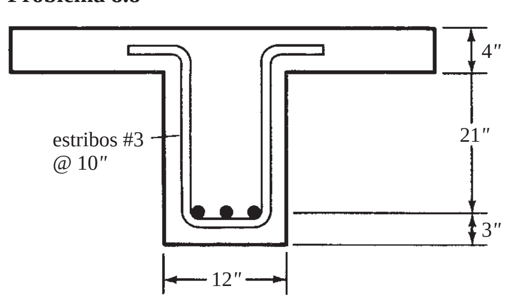
8.6 Repita el problema 8.5 si el peralte total de la viga es de 32 plg y f'_c = 3 000 lb/plg^2.

En los problemas 8.7 a 8.9, calcule ϕV_n para las secciones mostradas si el f_y de los estribos es 60 klb/plg^2 y f'_c = 4 000 lb/plg^2.

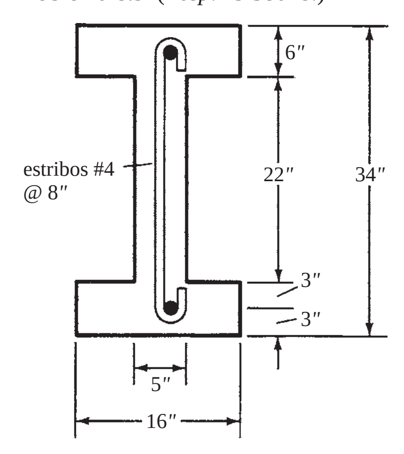
Problema 8.7 (*Resp*. 58 572.)



Problema 8.8



Problema 8.9 (*Resp*. 49 580 lb.)

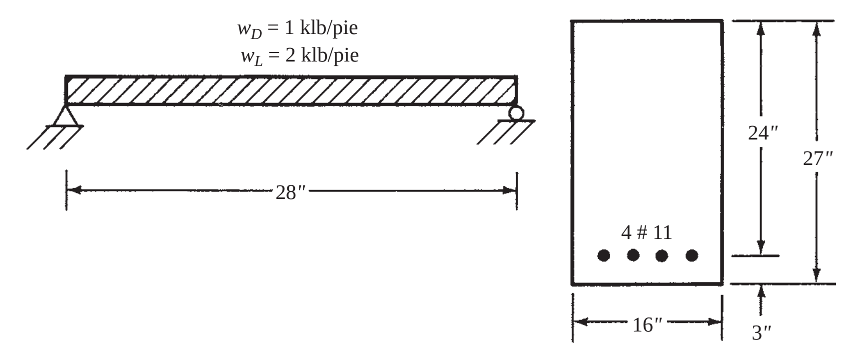


Diseño por cortante

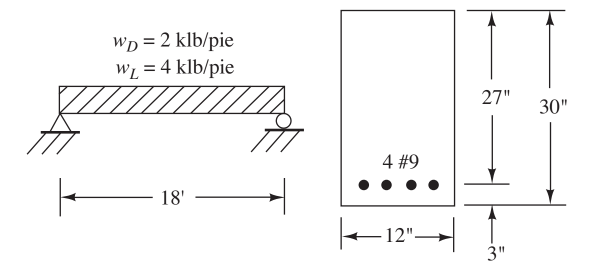
8.10 Si f'_c = 3 000 lb/plg^2, V_u = 60 klb y $b_w = \frac{1}{2}d$, seleccione una sección rectangular de viga sin usar refuerzo en el alma. Use concreto ligero con arena y b_w está en pulgadas enteras.

En los problemas 8.11 a 8.19 para las vigas y las cargas dadas, seleccione la separación de los estribos, si f'_c = 4 000 lb/plg^2 para concreto de peso normal y f_y = 60 000 lb/plg^2. La carga muerta indicada incluye el peso de la viga. No considere movimiento de cargas vivas, a menos que se pida específicamente. Suponga estribos #3 ⊔, a menos que se especifique otra cosa.

Problema 8.11 (*Una posible respuesta* 1 @ 6 plg, 10 @ 12 plg.)

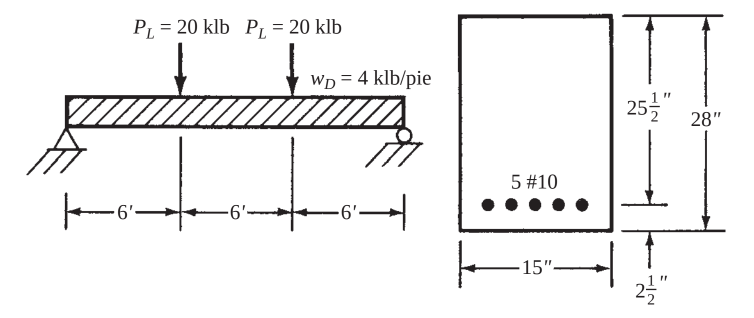


Problema 8.12

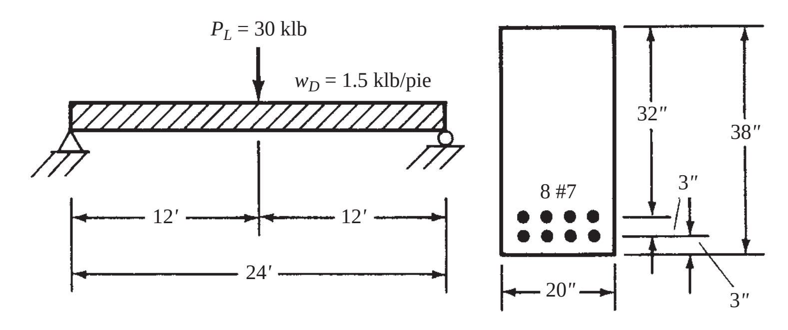


8.13 Repita el problema 8.12 considerando las posiciones de la carga viva que causen cortante máximo en el extremo y cortante máximo en el centro del claro. (*Una posible respuesta* 1 @ 4 plg, 4 @ 8 plg, 2 @ 10 plg, 4 @ 13 plg.)

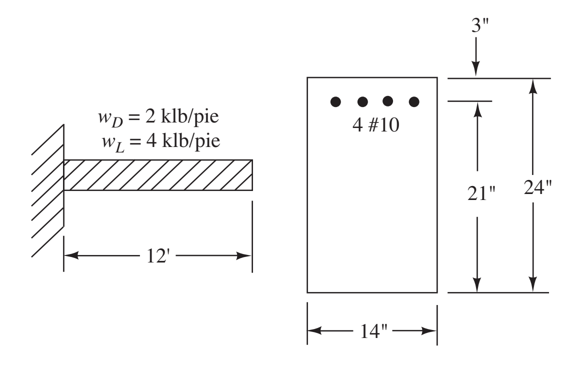
Problema 8.14



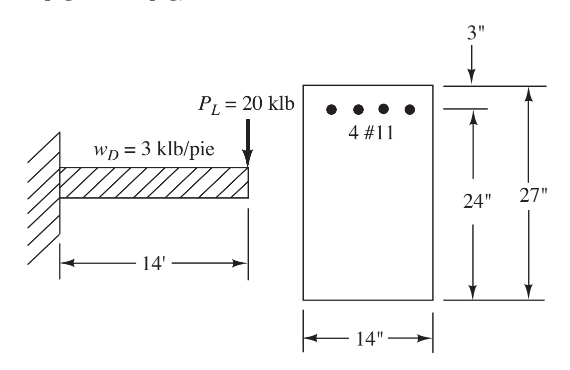
Problema 8.15 (*Una posible respuesta* 1 @ 6 plg, 8 @ 12 plg.)



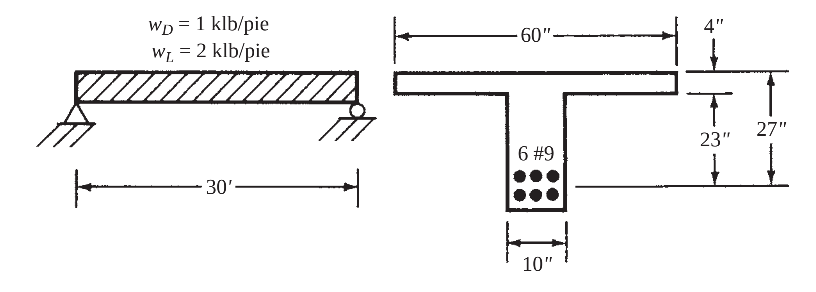
Problema 8.16 Use estribos #4 ⊔.



Problema 8.17 Use estribos #4 ⊔. (*Una posible respuesta* 1 @ 4 plg, 5 @ 9 plg)



Problema 8.18



8.19 Si la viga del problema 8.14 tiene una carga factorizada axial de compresión de 120 klb, además de las otras cargas, calcule ϕV_c y rediseñe los estribos. (*Una posible respuesta* 1 @ 4 plg, 3 @ 10 plg, 4 @ 12 plg.)

8.20 Repita el problema 8.19 si la carga axial es de tensión. Use estribos #4 ⊔.

En los problemas 8.21 a 8.22 repita los problemas dados usando la hoja de cálculo Excel del capítulo 8.

8.21 Si V_u = 56 400 lb en una sección específica determine la separación teórica de los estribos #3 ⊔ para la viga del problema 8.11. (*Resp*. *s* teórica = 11.90 plg, use máxima = 11 plg.)

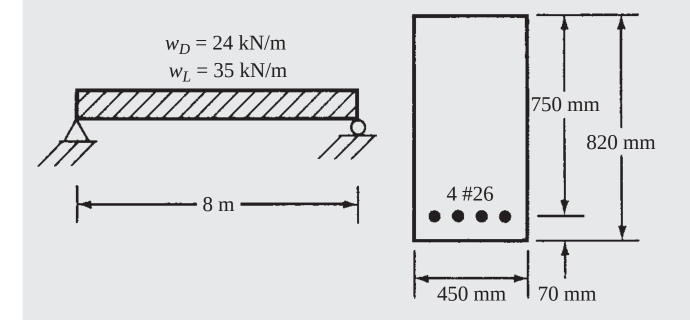
8.22 Si V_u = 79 600 lb en una sección específica determine la separación de los estribos del #4 ⊔ para la viga del problema 8.12.

8.23 Prepare un diagrama de flujo para el diseño de estribos para vigas rectangulares, T o I.

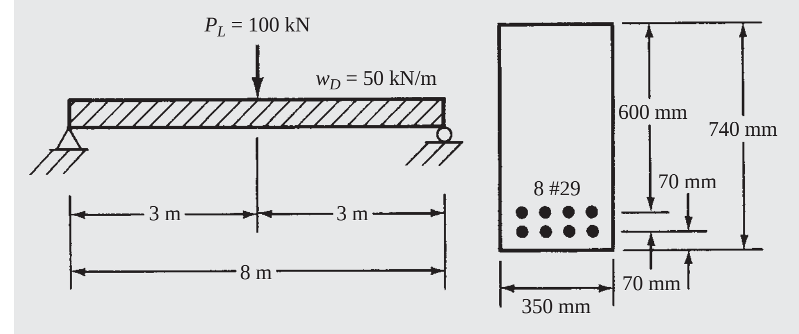
Problemas en unidades SI

En los problemas 8.24 a 8.26 para las vigas y cargas dadas, seleccione la separación entre estribos si f'_c = 21 MPa y f_y 420 MPa. Las cargas muertas mostradas incluyen los pesos de las vigas. No considere el movimiento de cargas vivas. Use estribos #10 ⊔.

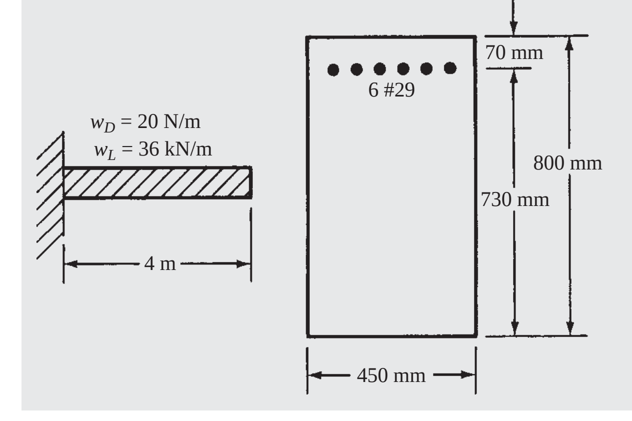
Problema 8.24



Problema 8.25 (*Una posible respuesta* 1 @ 100 mm, 13 @ 300 mm)



Problema 8.26



9

Introducción al estudio de columnas

9.1 GENERALIDADES

En este capítulo se presenta un análisis introductorio sobre columnas de concreto reforzado con especial énfasis en las columnas cortas, robustas sometidas a momentos flexionantes pequeños. Suele decirse que tales columnas están "cargadas axialmente". En el capítulo 10 se estudiarán las columnas cortas y robustas con momentos flexionantes grandes, mientras que las columnas largas o esbeltas se tratarán en el capítulo 11.

Las columnas de concreto pueden clasificarse en las tres siguientes categorías:

Pedestales o bloques cortos a compresión. Si la altura de un miembro vertical a compresión es menor que tres veces su dimensión lateral más pequeña, puede considerarse como un pedestal. El ACI (2.2 y 10.14) establece que un pedestal puede diseñarse con concreto simple o sin refuerzo, con un esfuerzo máximo de diseño a compresión igual a $0.85\phi f_c'$, donde ϕ es 0.65. Si la carga total aplicada al miembro es mayor que $0.85\phi f_c' A_g$ será necesario ya sea incrementar el área de la sección transversal del pedestal o bien diseñarlo como una columna de concreto reforzado, tal y como se describe en la sección 9.9 de este capítulo.

Columnas cortas de concreto reforzado. Si una columna de concreto reforzado falla debido a la falla inicial del material, se clasifica como columna corta. La carga que puede soportar está regida por las dimensiones de su sección transversal y por la resistencia de los materiales de que está construida. Consideramos que una columna corta es un miembro más bien robusto con poca flexibilidad.

Columnas largas o esbeltas de concreto reforzado. A medida que las columnas se hacen más esbeltas, las deformaciones por flexión también aumentarán, así como los momentos secundarios resultantes. Si estos momentos son de tal magnitud que reducen significativamente la capacidad de carga axial de la columna, ésta se denomina *larga* o *esbelta*.

Cuando una columna está sometida a *momentos primarios* (aquellos momentos causados por las cargas aplicadas, rotaciones de los nudos, etc.), el eje del miembro se deflexiona lateralmente, dando por resultado momentos adicionales iguales a la carga de la columna multiplicada por la deflexión lateral. Estos momentos se llaman *momentos secundarios* o *momentos* $P\Delta$ y se ilustran en la figura 9.1.

Una columna que tiene momentos secundarios grandes se llama columna esbelta y es necesario dimensionar su sección transversal para la suma de los momentos primarios y secundarios. El propósito del ACI es permitir diseñar las columnas como columnas cortas si el efecto secundario o efecto $P\Delta$ no reduce su resistencia en más de 5%. Las relaciones de esbeltez efectivas se describen y evalúan en el capítulo 11 y se usan para clasificar las columnas como cortas o como esbeltas. Cuando las relaciones son mayores que ciertos valores (según que las columnas estén o no arriostradas lateralmente), se clasifican como columnas esbeltas.

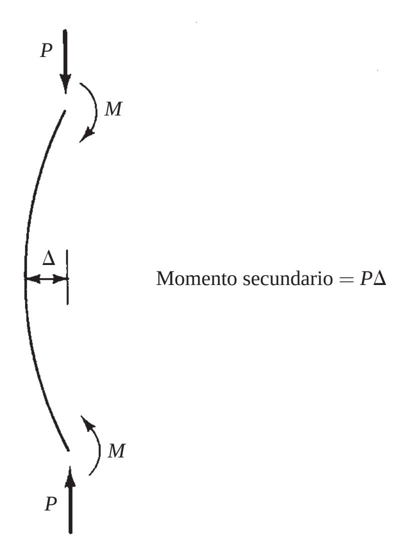


Figura 9.1 Momento secundario o momento $P\Delta$.

Los efectos de esbeltez pueden despreciarse en aproximadamente 40% de todas las columnas no arriostradas y en aproximadamente 90% de aquellas arriostradas contra el desplazamiento lateral.[1] Sin embargo, estos porcentajes probablemente disminuyen año tras año, debido al uso creciente de columnas más esbeltas diseñadas con el método de resistencia, usando materiales más resistentes y con una mejor noción del comportamiento por pandeo de las columnas.

9.2 TIPOS DE COLUMNAS

Una columna de concreto simple puede soportar muy poca carga, pero su capacidad de carga aumenta mucho si se le agregan varillas longitudinales. Pueden lograrse incrementos sustanciales de resistencia proporcionando restricción lateral a las varillas longitudinales. Bajo cargas de compresión, las columnas no sólo tienden a acortarse longitudinalmente, sino también a expandirse lateralmente debido al efecto de Poisson. La capacidad de tales miembros puede aumentar considerablemente si se les provee restricción lateral en forma de estribos cerrados estrechamente separados o espirales helicoidales enrolladas alrededor del refuerzo longitudinal.

Las columnas de concreto reforzado se denominan columnas con *estribos* o *zunchadas* (con *espirales*), dependiendo del método usado para apuntalar lateralmente o sujetar en su lugar a las varillas. Si la columna tiene una serie de estribos cerrados, como se muestra en la figura 9.2(*a*), se denomina *columna con estribos.* Tales estribos son muy efectivos para aumentar la resistencia de la columna. Impiden que las varillas longitudinales se desplacen durante la construcción y resisten la tendencia de las mismas varillas a pandearse hacia afuera bajo la carga, lo que causaría que el recubrimiento exterior de concreto se quiebre o se desconche. Generalmente, las columnas con estribos son cuadradas o rectangulares, pero pueden ser octagonales, redondas, con forma de L, etcétera.

Las columnas cuadradas y rectangulares son las más comúnmente usadas por la simplicidad de su cimbra. Algunas veces, sin embargo, cuando se usan en espacios abiertos, las columnas circulares son muy atractivas. La cimbra para las columnas redondas suele hacerse con tubos de cartón o de plástico que se desprenden y desechan una vez que el concreto ha fraguado.

Si una espiral continua helicoidal hecha con varillas o alambrón grueso se enrolla alrededor de las varillas longitudinales, como se muestra en la figura 9.2(*b*), la columna se denomina *columna zunchada*

[1]Portland Cement Association, 2005, *Notes on ACI 318-05. Building Code Requirements for Structural Concrete* (Skokie, IL), págs. 11-13.

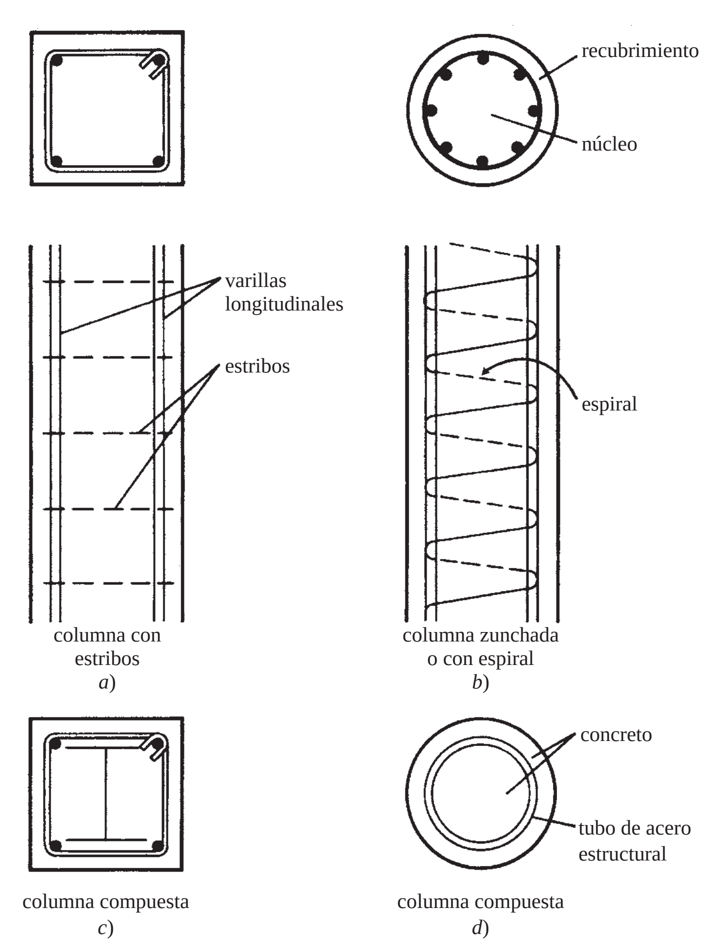
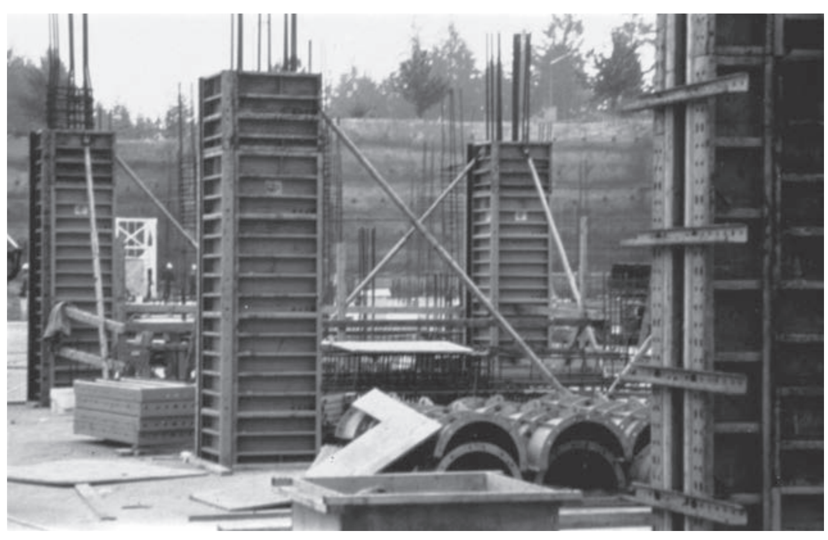


Figura 9.2 Tipos de columnas.

o con espiral. Las espirales son más efectivas que los estribos para incrementar la resistencia de una columna. Las espirales de paso estrecho cumplen muy bien su función de sujetar las varillas longitudinales en su lugar y de confinar el concreto interior, con lo que se aumenta considerablemente su resistencia a la compresión axial. Conforme el concreto dentro de la espiral tiende a expandirse lateralmente bajo la carga de compresión, en la espiral empieza a desarrollarse un esfuerzo de tensión de aro y la columna no fallará hasta que la espiral ceda o se rompa, permitiendo el resquebrajamiento del concreto interior. Las columnas zunchadas suelen ser redondas, pero también pueden fabricarse con secciones rectangulares, octagonales y de otras formas. Para estas columnas, la disposición de las varillas sigue siendo circular. Las espirales, si bien acrecientan la resistencia de las columnas debido al aumento en la elasticidad, aumentan apreciablemente los costos. Como consecuencia, generalmente se usan sólo en columnas grandes con exceso de carga y en columnas en zonas sísmicas debido a su resistencia considerable a las cargas sísmicas. (En zonas no sísmicas, probablemente más de 9 de 10 columnas de concreto reforzado existentes son con estribos.) Las espirales aumentan muy eficazmente la ductilidad y tenacidad de las columnas, pero son bastante más caras que las columnas con estribos.

Las *columnas compuestas*, ilustradas en las figuras 9.2(*c*) y 9.2(*d*), son columnas de concreto reforzadas longitudinalmente con perfiles de acero, que pueden o no estar rodeados por varillas de acero estructural, o pueden constar de perfiles tubulares de acero estructural rellenos con concreto [comúnmente llamadas *columnas Lally (columna tubular llena de hormigón)*].



Cimbras de columnas. (Cortesía de Economy Forms Corporation.)

9.3 CAPACIDAD POR CARGA AXIAL DE LAS COLUMNAS

En la práctica no existen las columnas cargadas en forma axial perfecta, pero un análisis de tales miembros proporciona un punto de partida excelente para explicar la teoría del diseño de columnas reales con cargas excéntricas. Varias ideas básicas pueden explicarse para las columnas con carga axial pura y las resistencias obtenidas señalan límites teóricos superiores que pueden verificarse claramente con pruebas reales.

Desde hace ya varias décadas se sabe que los esfuerzos en el concreto y en las varillas de refuerzo de una columna que soporta una carga a largo plazo no pueden calcularse con exactitud. Podría pensarse que tales esfuerzos se pueden determinar multiplicando las deformaciones unitarias por los módulos de elasticidad apropiados. Pero esta idea no es factible en la práctica porque el módulo de elasticidad del concreto varía con la carga, debido al flujo plástico y a la contracción. Así es que puede verse que las partes de la carga tomada por el concreto y por el acero varían con la magnitud y la duración de las cargas. Por ejemplo, cuanto mayor sea el porcentaje de cargas muertas y mayor sea el tiempo que están aplicadas, tanto mayor es el flujo plástico en el concreto y mayor es el porcentaje de carga tomada por el refuerzo.

Aunque los esfuerzos en columnas no pueden predecirse en el intervalo elástico con ningún grado de exactitud, varias décadas de pruebas han mostrado que la resistencia última de las columnas sí se puede estimar muy bien. Además, se ha demostrado que las proporciones de las cargas vivas y muertas, la duración de la carga y otros aspectos, tienen poca influencia en la resistencia última. Ni siquiera importa si es el concreto o acero el que primero alcanza tal resistencia. Si uno de los dos materiales se acerca a su resistencia última, sus grandes deformaciones causarán que los esfuerzos en el otro aumenten más rápido.

Por estas razones, sólo consideraremos aquí la resistencia última de las columnas. En la falla, la última resistencia teórica o resistencia nominal de una columna corta cargada axialmente puede determinarse con bastante precisión mediante la expresión siguiente, en la que A_g es el área total del concreto y A_{st} es el área total de la sección transversal del refuerzo longitudinal, incluyendo varillas y perfiles de acero:

$$P_n = 0.85f_c'(A_g - A_{st}) + f_yA_{st}$$

9.4 FALLAS DE COLUMNAS CON ESTRIBOS Y ESPIRALES

Si una columna corta con estribos se carga hasta que falle, parte del recubrimiento de concreto se desprenderá y, a menos que los estribos estén poco separados entre sí, las varillas longitudinales se pandearán casi inmediatamente al desaparecer su soporte lateral (el recubrimiento de concreto). Tales fallas a menudo pueden ser muy repentinas y han ocurrido con frecuencia en estructuras sometidas a cargas sísmicas.

Cuando las columnas zunchadas se cargan hasta fallar, la situación es muy diferente. El recubrimiento de concreto se desconchará pero el núcleo permanecerá firme y si el zunchado es de paso pequeño, el núcleo será capaz de resistir una cantidad apreciable de carga adicional más allá de la carga que da lugar al desconchamiento. El zunchado con paso reducido conjuntamente con las varillas longitudinales forman una jaula que confina en forma muy efectiva al concreto. Como consecuencia, el desconchado del recubrimiento de una columna zunchada provee una advertencia de que ocurrirá una falla si la carga se incrementa más.

La práctica estadounidense no toma en cuenta ningún exceso de capacidad que pueda darse después del desconchamiento ya que considera que una vez que éste ocurre, la columna perderá su utilidad, por lo menos desde el punto de vista de los ocupantes del edificio. Por esta razón, el zunchado se diseña con un poco más de resistencia que el recubrimiento que se supone que va a resquebrajarse. El desconchamiento da aviso de una falla inminente y luego la columna tomará un poco más de carga antes de fallar. Diseñar el zunchado con un poco más de resistencia que el recubrimiento no aumenta mucho la resistencia útil de la columna, pero conduce a una falla gradual o dúctil.

La resistencia del recubrimiento está dada por la siguiente expresión, en donde A_c es el área del núcleo cuyo diámetro se considera igual a la distancia entre los bordes exteriores de la espiral:

$$\text{Resistencia del recubrimiento} = 0.85f_c'(A_g - A_c)$$

Considerando que la tensión de aro estimada que se produce en las espirales es debido a la presión lateral del núcleo y por pruebas, puede demostrarse que el acero del zunchado es por lo menos el doble de efectivo para aumentar la capacidad última de la columna como el acero longitudinal.[2,3] Por consiguiente, la resistencia de la espiral puede calcularse aproximadamente por la siguiente expresión, en donde ρ_s es el porcentaje de acero espiral:

$$\text{Resistencia de la espiral} = 2\rho_s A_c f_y$$

Igualando estas expresiones y despejando el porcentaje requerido de acero de espiral, obtenemos

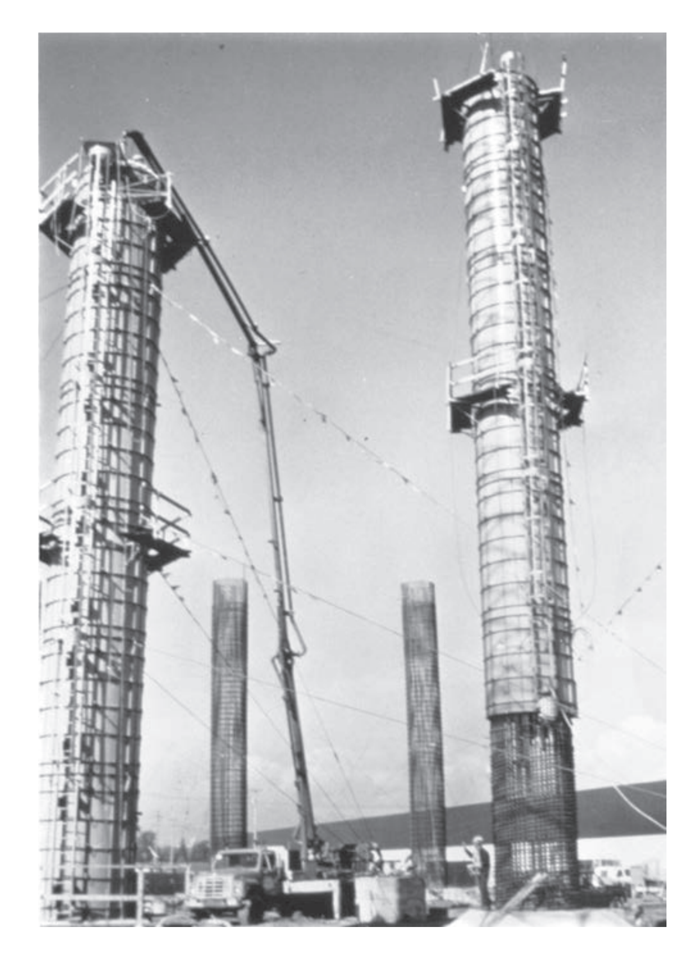
$$0.85f_c'(A_g - A_c) = 2\rho_s A_c f_y$$

$$\rho_s = 0.425\frac{(A_g - A_c)f_c'}{A_c f_y} = 0.425\left(\frac{A_g}{A_c} - 1\right)\frac{f_c'}{f_y}$$

Para que la espiral sea un poco más resistente que el concreto desconchado, el código (10.9.3) especifica el porcentaje mínimo de espiral con la expresión que sigue en donde f_y es la resistencia de fluencia especificada del refuerzo espiral hasta 100 000 lb/plg^2.

$$\rho_s = 0.45\left(\frac{A_g}{A_c} - 1\right)\frac{f_c'}{f_y} \qquad \text{(Ecuación 10-5, ACI)}$$

[2]Park, A. y Paulay, T., 1975, *Reinforced Concrete Structures* (Nueva York: John Wiley & Sons), págs. 25, 119-121.
[3]Considere, A., 1902, "Compressive Resistance of Concrete Steel and Hooped Concrete, Part I", *Engineering Record*, diciembre 20, págs. 581-583; "Parte II", diciembre 27, págs. 605-606.

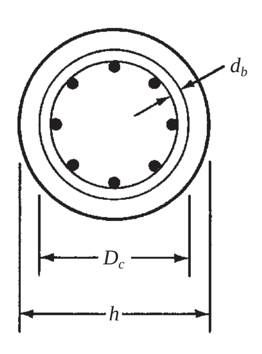


Columnas redondas zunchadas. (Cortesía de Economy Forms Corporation.)

Una vez que se ha determinado el porcentaje requerido de acero de espiral, ésta puede seleccionarse con la expresión que sigue, en donde ρ_s está dada en términos del volumen de acero en una vuelta:

$$\rho_s = \frac{\text{volumen de espiral en una vuelta}}{\text{volumen de núcleo de concreto para un paso } s}$$
$$= \frac{V_{\text{espiral}}}{V_{\text{núcleo}}}$$
$$= \frac{a_s \pi (D_c - d_b)}{(\pi D_c^2/4)s} = \frac{4a_s(D_c - d_b)}{sD_c^2}$$

En esta expresión, D_c es el diámetro del núcleo de extremo a extremo de la espiral, a_s es el área de la sección transversal de la varilla espiral y d_b es el diámetro de dicha varilla. Aquí se hace referencia a la figura 9.3. El proyectista puede suponer un diámetro para la varilla espiral y despejar el paso requerido. Si los resultados no parecen razonables, puede tratar con otro diámetro. El paso usado debe estar dentro de los límites indicados en la siguiente sección de este capítulo. De hecho, la tabla A.14 (véase el apéndice), que se basa en esta expresión, permite al proyectista seleccionar directamente las espirales.



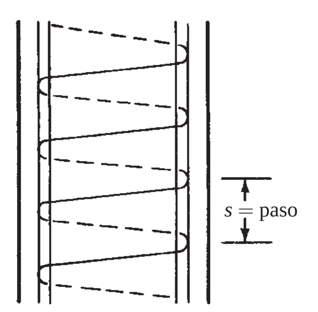
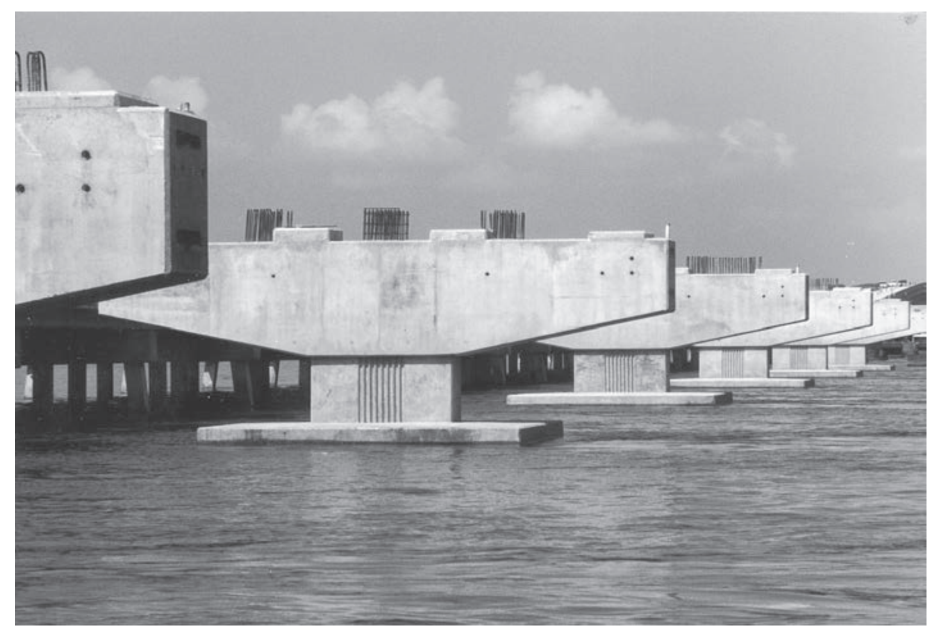


Figura 9.3



Columnas con capiteles en forma de martillo para el puente Gandy, Tampa, Florida. (Cortesía de Economy Forms Corporation.)

9.5 REQUISITOS DEL CÓDIGO PARA COLUMNAS COLADAS EN OBRA

El código ACI especifica relativamente pocas limitaciones en las dimensiones, el refuerzo, la restricción lateral y otros aspectos relacionados con las columnas de concreto. Algunas de las limitaciones más importantes son las siguientes:

1. El porcentaje de refuerzo longitudinal no debe ser menor que 1% del área transversal total de una columna (código ACI 10.9.1). Se cree que si la cantidad de acero es menor que 1%, habrá una posibilidad bien definida de que ocurra una falla no dúctil repentina, como en el caso de una columna de concreto simple. El valor mínimo de 1% de acero reduce también el flujo plástico y la contracción y provee alguna resistencia a la flexión para la columna. En realidad, el código (10.8.4) permite el uso de menos de 1% de acero si la columna se hubiera hecho más grande que lo necesario para soportar las cargas, por razones arquitectónicas o de otra índole. En otras palabras, una columna se puede diseñar con 1% de acero longitudinal para soportar la carga factorizada y entonces puede agregarse más concreto sin incrementar el refuerzo ni la capacidad calculada de carga. En la práctica real el porcentaje de acero para tales miembros debe ser 0.005 como mínimo absoluto.
2. El porcentaje máximo de acero no debe ser mayor que 8% del área transversal total de la columna (código ACI 10.9.1). Este valor máximo se estipula para prevenir el hacinamiento de las varillas. En la práctica, es algo difícil ajustar más de 4 o 5% de acero en la cimbra y lograr que penetre el concreto en la cimbra y alrededor de las varillas. Cuando el porcentaje de acero es alto, se incrementa la posibilidad de que se formen cavidades alveolares en el concreto. Si esto ocurre, puede haber una reducción sustancial en la capacidad de carga de la columna. Usualmente el porcentaje de refuerzo no debe exceder 4% cuando las varillas van a empalmarse por traslape. Debe recordarse que si el porcentaje de acero es muy alto, las varillas pueden disponerse en racimos.
3. El número mínimo de varillas longitudinales permisibles en miembros a compresión (ACI 10.9.2) es como sigue: 4 para varillas con estribos rectangulares o circulares, 3 para varillas dentro de estribos triangulares y 6 para varillas rodeadas por espirales. En el caso de que hubiera menos de 8 varillas en un arreglo circular, la orientación de las varillas puede alterar la resistencia de momentos en columnas excéntricamente cargadas. Este aspecto debe considerarse en el diseño según el Comentario ACI (R10.9.2).
4. El código no provee directamente un área de sección transversal mínima de la columna, pero para proveer el recubrimiento necesario fuera de estribos o espirales y para proveer la separación necesaria entre varillas longitudinales de una cara de la columna a la otra, es obvio que son necesarios diámetros o anchos mínimos de aproximadamente de 8 a 10 plg. Con el propósito de usar el menor espacio de piso posible como sea rentable, a menudo son convenientes columnas pequeñas. De hecho, en ocasiones las columnas delgadas se colocan o “esconden” en los muros.
5. Cuando se usan columnas con estribos, éstos no deberán ser menores al #3, siempre que las varillas longitudinales sean del #10 o menores. El tamaño mínimo es el #4 para varillas longitudinales mayores que el #10 y para varillas en racimos. También puede usarse alambre corrugado o malla de alambre soldado con un área equivalente (ACI 7.10.5.1).

En unidades del SI, los estribos no deben ser menores del #10 para varillas longitudinales del #32 o menores y del #13 para varillas longitudinales mayores.

La separación centro a centro de los estribos no deberá ser mayor que 16 veces el diámetro de las varillas longitudinales, 48 veces el diámetro de los estribos, ni que la menor dimensión lateral de la columna. Los estribos deben colocarse de tal manera que cada varilla longitudinal de esquina y alternada tengan soporte lateral suministrado por la esquina de un estribo con un ángulo incluido no mayor de 135°. Ninguna varilla debe localizarse a una distancia mayor de

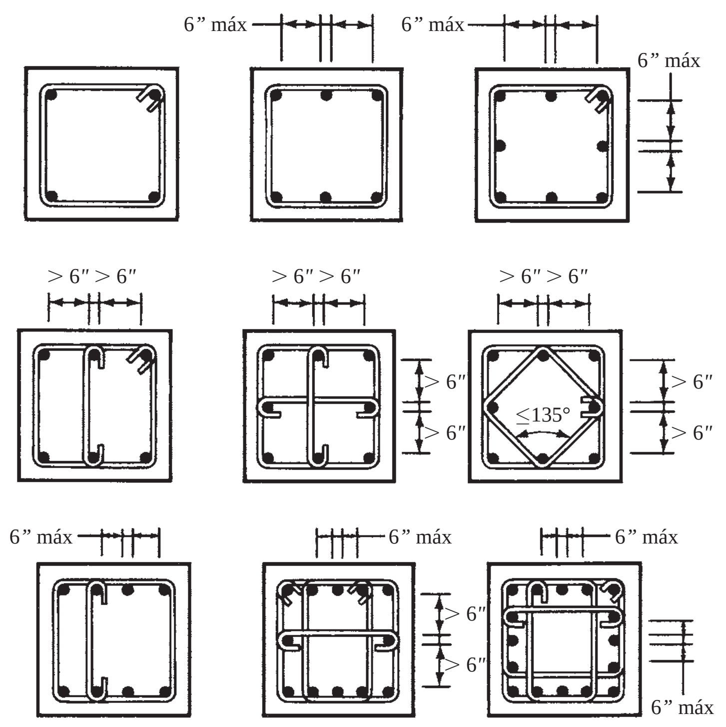


Figura 9.4 Disposiciones típicas de estribos.

6 plg libres* a cada lado de una varilla soportada lateralmente de esta manera. Estos requisitos se dan en la sección 7.10.5 del código ACI. La figura 9.4 muestra las disposiciones de estribos para varias secciones transversales de columnas. Algunos de los arreglos con estribos interiores, tales como los mostrados en las dos últimas filas de la figura, son más bien caros. Si las varillas longitudinales se colocan en círculo, pueden ponerse estribos redondos alrededor de ellas y las varillas no tienen que ligarse o restringirse individualmente de otra manera (7.10.5.3). El ACI también establece (7.10.3) que los requisitos para los estribos laterales pueden pasarse por alto si las pruebas y el análisis estructural muestran que las columnas son suficientemente resistentes sin ellos y que tal construcción es factible.

Hay poca evidencia acerca del comportamiento de las varillas empalmadas y de las varillas en racimo. Por esta razón, la sección R7.10.5 del Comentario establece que es aconsejable proveer estribos en cada extremo de las varillas empalmadas con traslape y provee recomendaciones relativas a la colocación de los estribos en los sitios de empalmes a tope y de varillas dobladas escalonadas.

Los estribos no deben colocarse a más de medio espaciamiento arriba de la parte superior de una zapata o losa ni a más de medio espaciamiento debajo de la varilla de refuerzo inferior en una losa o en un panel de plataforma (para ver un panel de plataforma, remítase a la figura 16.1 de este texto). Cuando se conectan vigas a una columna desde cuatro direcciones, el último estribo en la columna puede estar debajo del refuerzo inferior de cualquiera de las vigas.

6. El código (7.10.4) establece que las espirales no deben tener diámetros menores de $\frac{3}{8}$ de plg** y que la separación libre entre las vueltas de las espirales no debe ser menor de 1 plg o mayor de 3 plg†. Si se requieren empalmes en las espirales, deben proveerse por soldadura o por traslapes

*150 mm en unidades del SI.
**10 mm en unidades del SI.
†25 y 75 mm en unidades del SI.

de las varillas espirales o alambres corrugados sin recubrimiento con una longitud de 48 diámetros o 12 plg*, la que sea mayor. En la sección 7.10.4 del ACI también se dan otras longitudes de traslape para empalme para varillas y alambres lisos sin recubrimiento, para varillas y alambres corrugados recubiertos con epóxido, etc. Se usan varillas espaciadoras especiales para mantener las espirales en su lugar y con el paso deseado hasta que el concreto fragua. Estos espaciadores consisten en varillas verticales con ganchos pequeños. Las espirales son soportadas por los espaciadores, no por las varillas longitudinales. La sección R7.10.4 del comentario del ACI provee los números propuestos de espaciadores requeridos para columnas de diferentes tamaños.

9.6 PRECAUCIONES DE SEGURIDAD PARA COLUMNAS

Los valores de ϕ especificados en la sección 9.3.2 del código para usarse en columnas son bastante menores que los estipulados para la flexión y el cortante (0.90 y 0.75, respectivamente). Se especifica un valor de 0.65 para columnas con estribos y 0.75 para las columnas zunchadas. Para las columnas zunchadas se especifica un valor ligeramente mayor de ϕ por su mayor tenacidad.

La falla de una columna es generalmente un asunto más delicado que la falla de una viga, porque una columna generalmente soporta una mayor parte de una estructura que una viga. En otras palabras, si una columna en un edificio falla, una mayor parte del edificio se derrumbará que si una viga falla. Esto es particularmente verdadero para una columna del piso inferior en un edificio de varios pisos. Como consecuencia, son convenientes valores menores de ϕ para las columnas.

Hay otras razones para usar valores menores de ϕ en columnas. Por ejemplo, es más difícil colar el concreto en una columna que en una viga. El lector puede imaginar fácilmente la dificultad de hacer pasar el concreto entre las estrechas paredes de la cimbra y a lo largo del refuerzo longitudinal y lateral de una columna. Como consecuencia, es probable que la calidad resultante del concreto en las columnas no sea tan buena como la del concreto en vigas y losas.

La resistencia a la falla de una viga depende normalmente del esfuerzo de fluencia del acero de tensión, que es una propiedad que se controla con mucha precisión en los talleres de laminado. Por otra parte, la resistencia a la falla de una columna está estrechamente relacionada con la resistencia última del concreto, un valor que es muy variable. Los factores de longitud también afectan drásticamente la resistencia de las columnas, por lo que se hace necesario el uso de factores ϕ pequeños.

Es imposible que una columna quede cargada perfectamente en forma axial. Aun si las cargas pudiesen en un momento dado centrarse perfectamente, no se quedarían en su lugar. Además, las columnas pueden estar inicialmente desalineadas o tener otros defectos, con el resultado de que se generen flexiones laterales. El viento y otras cargas laterales ocasionan que las columnas se flexionen y las columnas en los edificios con marcos rígidos están sometidas a momentos, aun cuando el marco soporte sólo cargas de gravedad.

9.7 FÓRMULAS DE DISEÑO

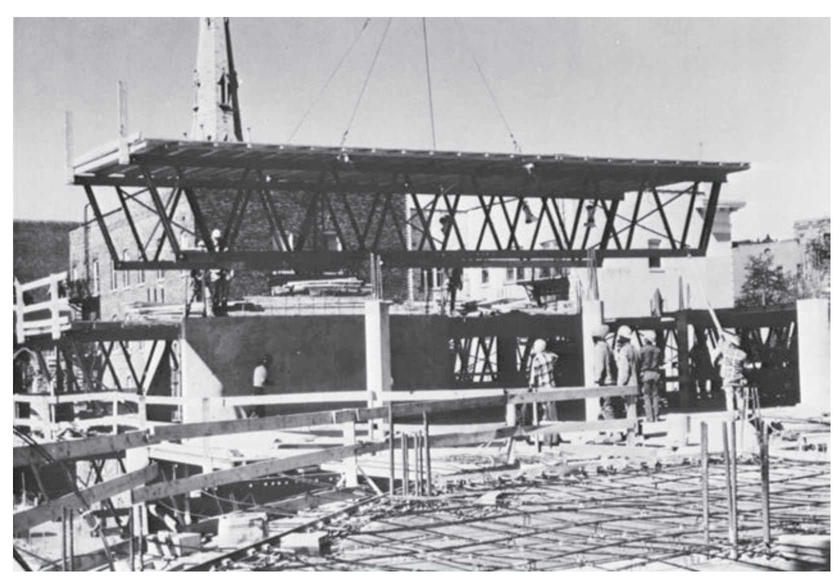
En las siguientes páginas, la letra e se usa para representar la excentricidad de la carga. El lector podría no entender este término, puesto que quizá ya ha analizado una estructura y ha calculado una carga axial P_u y un momento de flexión M_u, pero no una excentricidad e específica para una columna dada. El término e representa la distancia a la que la carga axial P_u tendría que estar situada desde el centro de la columna para producir a M_u. Así

$$P_u e = M_u$$

o bien

$$e = \frac{M_u}{P_u}$$

*300 mm en el SI.



Royal Towers, Baltimore, Maryland. (Cortesía de Simpson Timber Company.)

No obstante, hay muchas situaciones donde no hay momentos calculados para las columnas de una estructura. Por muchos años el código especificó que tales columnas debían ser diseñadas para ciertos momentos mínimos, aun cuando no se hubieran calculado ningunos momentos. Esto se logró requiriendo a los proyectistas que supusieran ciertas excentricidades mínimas para las cargas en sus columnas. Estos valores mínimos fueron de 1 plg o 0.05*h*, rigiendo el valor mayor, para columnas zunchadas y de 1 plg o 0.10*h* para columnas con estribos. (El término *h* representa el diámetro exterior de las columnas redondas o el ancho total de columnas cuadradas o rectangulares.) Se usó para el diseño un momento igual a la carga axial multiplicada por la excentricidad mínima.

En el código actual, las excentricidades mínimas no están especificadas, pero el mismo objetivo se alcanza requiriendo que las capacidades teóricas por carga axial se multipliquen por un factor algunas veces llamado α, que es igual a 0.85 para columnas zunchadas y a 0.80 para columnas con estribos. Así, como se muestra en la sección 10.3.6 del código, la capacidad de carga axial de las columnas no debe ser mayor que los siguientes valores:

Para columnas zunchadas $(\phi = 0.75)$

$$\phi P_n(\text{máx}) = 0.85\phi[0.85f_c'(A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \qquad \text{(Ecuación 10-1, ACI)}$$

Para columnas con estribos $(\phi = 0.65)$

$$\phi P_n(\text{máx}) = 0.80\phi[0.85f_c'(A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \qquad \text{(Ecuación 10-2, ACI)}$$

Debe quedar claro que las expresiones anteriores pueden usarse sólo cuando el momento es bastante pequeño o cuando no hay un momento calculado.

Las ecuaciones presentadas aquí son aplicables sólo para situaciones donde el momento es suficientemente pequeño, a fin de que *e* sea menor que 0.10*h* para columnas con estribos o menor de 0.05*h* para columnas zunchadas. Las columnas cortas pueden diseñarse completamente con estas expresiones siempre que los valores *e* queden bajo los límites descritos. Si los valores *e* son mayores que los valores límite y/o las columnas se clasifican como largas, será necesario usar los procedimientos descritos en los siguientes dos capítulos.

9.8 COMENTARIOS SOBRE EL DISEÑO ECONÓMICO DE COLUMNAS

Las varillas de refuerzo son bastante caras, por lo que el porcentaje de refuerzo longitudinal usado en las columnas de concreto reforzado es un factor principal en su costo total. Esto quiere decir que bajo circunstancias normales debe usarse un pequeño porcentaje de acero (quizás en el intervalo de 1.5 a 3%). Esto puede lograrse usando columnas de mayor tamaño y/o concretos de alta resistencia. Además, si el porcentaje de las varillas se mantiene aproximadamente en este intervalo, habrá suficiente espacio para colocarlas convenientemente en las columnas.

Los concretos de alta resistencia se pueden usar más económicamente en las columnas que en las vigas. Bajo cargas ordinarias, de sólo 30 a 40% de la sección transversal de una viga está en compresión, mientras que el restante 60 a 70% está en tensión y supuestamente agrietado. Esto significa que si se usa un concreto de alta resistencia para una viga, 60 a 70% del concreto se desperdicia. Sin embargo, para una columna usual, la situación es realmente diferente porque un porcentaje mucho mayor de su sección transversal está en compresión. Como consecuencia, es muy económico usar concretos de alta resistencia en columnas. Aunque algunos proyectistas han usado concretos con resistencias últimas de hasta 19 000 lb/plg^2 (como en *Two Union Square* en Seattle) en el diseño de columnas con economía aparente, el uso de concretos de 5 000 a 6 000 lb/plg^2 es la regla normal cuando se especifican resistencias superiores en las columnas.

Las varillas de refuerzo del Grado 60 son generalmente las más económicas para columnas en la mayoría de las estructuras. Sin embargo, las varillas de Grado 75 pueden resultar más económicas en estructuras de gran altura, en particular cuando se usan en combinación con concretos de altas resistencias.

En general, las columnas con estribos son más económicas que las zunchadas, en particular si van a usarse secciones transversales cuadradas o rectangulares. Por supuesto, las columnas zunchadas, los concretos de alta resistencia y los porcentajes altos de acero ahorran espacio de piso.

Debe usarse el menor número posible de diferentes tamaños de columnas en un edificio. A este respecto, es muy poco económico variar el tamaño de una columna de piso a piso para satisfacer las diferentes cargas que debe soportar. Esto quiere decir que el proyectista puede seleccionar un tamaño de columna para el piso superior de un edificio de varios pisos (usando el menor porcentaje de acero posible) y luego continuar usando ese mismo tamaño verticalmente hacia abajo en tantos pisos como sea posible aumentando el porcentaje de acero piso por piso según se requiera. Además, es conveniente usar el mismo tamaño de columna lo más posible en cada nivel. Esta consistencia de tamaños proveerá ahorros considerables en los costos de mano de obra.

La práctica usual en las columnas de edificios de concreto reforzado de varios pisos es usar varillas verticales de un piso de altura unidas entre sí en jaulas preensambladas. Éste es el procedimiento preferido cuando se usan varillas #11* o menores, donde todas las varillas pueden empalmarse en una sección justo arriba de la línea de piso. Para columnas donde se requieren empalmes escalonados (como cuando se tienen varillas de mayor tamaño), el número de empalmes puede reducirse usando jaulas de refuerzo preensambladas de dos pisos de altura.

A menos que las dimensiones mínimas de las columnas o los diámetros de las varillas longitudinales controlen la separación entre los estribos, la selección de mayores tamaños que sean prácticos para usarse en estribos aumentará su separación y reducirá su número. Esto puede dar como resultado algún ahorro. También puede ahorrarse dinero evitando estribos interiores como los mostrados en las dos últimas filas más de las columnas en la figura 9.4. Sin estribos interiores, el concreto puede colarse más fácilmente y se pueden usar revenimientos más bajos (con menos costos de concreto).

En edificios de poca altura, las losas de piso son a menudo algo delgadas y así las deflexiones pueden ser un problema. Como consecuencia, deben usarse claros cortos y por ende separaciones pequeñas entre las columnas. A medida que los edificios son más altos, las losas de piso son más gruesas para ayudar a proveer estabilidad lateral. Para tales edificios, las deflexiones de las losas no serán mucho problema y las columnas pueden colocarse con separaciones mayores entre ellas.

Aunque las columnas en los edificios altos pueden colocarse a intervalos bastante grandes, no dejan de ocupar valioso espacio de piso. Por esta razón, muchos proyectistas tratan de colocar tantas columnas

*#36 en el SI.

como sea posible en la periferia del edificio, con la idea de que no ocupen el valioso espacio interior. Además, la omisión de columnas interiores provee más flexibilidad a los usuarios para la colocación de muros divisorios y también hace posible la utilización de grandes espacios abiertos.

9.9 DISEÑO DE COLUMNAS CARGADAS AXIALMENTE

Como una breve introducción al diseño de columnas, se presenta en esta sección y en la siguiente el diseño de tres columnas cortas cargadas axialmente. Los efectos de momento y longitud no se toman en cuenta. Los ejemplos 9.1 y 9.3 presentan el diseño de columnas cuadradas con estribos cargadas axialmente, mientras que en el ejemplo 9.2 se ilustra el diseño de una columna redonda zunchada, cargada en forma similar. La tabla A.15 del apéndice provee varias propiedades para columnas circulares que son en particular útiles para el diseño de tales columnas.

EJEMPLO 9.1

Diseñar una columna cuadrada con estribos para soportar una carga muerta axial D de 130 klb y una carga viva axial L de 180 klb. Suponga inicialmente 2% de acero longitudinal, $f_c' = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN

$$P_u = (1.2)(130) + (1.6)(180) = 444 \text{ klb}$$

Selección de las dimensiones de la columna

$$\phi P_n = \phi 0.80[0.85 f_c'(A_g - A_{st}) + f_y A_{st}]$$

$$444 = (0.65)(0.80)[(0.85)(4)(A_g - 0.02A_g) + (60)(0.02A_g)] \qquad \text{(Ecuación 10-2, ACI)}$$

$$A_g = 188.40 \text{ plg}^2 \qquad \underline{\underline{\text{Use } 14 \times 14 (A_g = 196 \text{ plg}^2)}}$$

Selección de las varillas longitudinales

Sustituyendo en la ecuación de la columna con A_g conocida y despejando A_{st}, obtenemos

$$444 = (0.65)(0.80)[(0.85)(4)(196 - A_{st}) + 60A_{st}]$$

$$A_{st} = 3.31 \text{ plg}^2 \qquad \underline{\underline{\text{Use 6 varillas del \#7 } (3.61 \text{ plg}^2)}}$$

Diseño de los estribos (suponiendo varillas del #3)

Separación **a)** $48 \times \frac{3}{8} = 18''$

b) $16 \times \frac{7}{8} = 14'' \leftarrow$

c) Dim. mín. $= 14'' \leftarrow$ $\underline{\underline{\text{Use estribos del \#3 a 4''}}}$

En la figura 9.5 se muestra un croquis de la sección transversal de la columna.

Revisión de los requisitos del código

En la lista dada a continuación vienen las limitaciones del código ACI para columnas. En ejemplos futuros no se mostrarán todas estas revisiones esenciales que, sin embargo, deben hacerse.

(7.6.1) Separación libre entre varillas longitudinales $= \frac{9}{2} - \frac{7}{8} = 3.625$ plg > 1 plg y d_b de $\frac{7}{8}$ plg $\underline{\underline{\text{OK}}}$

(10.9.1) Porcentaje de acero $0.01 < \rho = \frac{3.61}{(14)(14)} = 0.0184 < 0.08$ $\underline{\underline{\text{OK}}}$

(10.9.2) Número de varillas $= 6 >$ núm. mín. de 4 $\underline{\underline{\text{OK}}}$

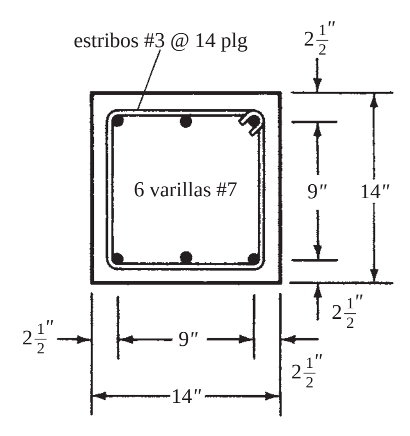


Figura 9.5

(7.10.5.1) Tamaño mínimo de estribo = #3 para varillas #7 OK
(7.10.5.2) Separación entre estribos OK
(7.10.5.3) Disposición de estribos OK

EJEMPLO 9.2

Diseñar una columna redonda zunchada para soportar una carga muerta axial P_D de 240 klb y una carga viva axial P_L de 300 klb. Inicialmente suponga aproximadamente 2% de acero longitudinal, $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN

$$P_u = (1.2)(240) + (1.6)(300) = 768$$

Selección de las dimensiones de columna y del tamaño de varillas

$$\phi P_n = \phi 0.85[0.85 f'_c(A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \qquad \text{(Ecuación 10-1, ACI)}$$

$$768 = (0.75)(0.85)[(0.85)(4)(A_g - 0.02A_g) + (60)(0.02A_g)]$$

$$A_g = 266 \text{ plg}^2 \qquad \underline{\underline{\text{Usar columna de 18″ de diámetro } (255 \text{ plg}^2)}}$$

$$768 = (0.75)(0.85)[(0.85)(4)(255 - A_{st}) + 60A_{st}]$$

$$A_{st} = 5.97 \text{ plg}^2 \qquad \underline{\underline{\text{Usar 6 varillas \#9 } (6.00 \text{ plg}^2)}}$$

Revise los requisitos del código como en el ejemplo 9.1. En la figura 9.6 se muestra un croquis de la sección transversal de la columna.

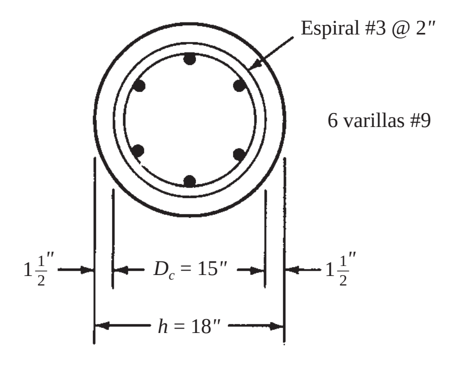


Figura 9.6

Diseño de la espiral

$$A_c = \frac{(\pi)(15)^2}{4} = 177 \text{ plg}^2$$

$$\rho_s \text{ mínimo} = (0.45)\left(\frac{A_g}{A_c} - 1\right)\frac{f'_c}{f_y} = (0.45)\left(\frac{255}{177} - 1\right)\left(\frac{4}{60}\right) = 0.0132$$

Suponga una espiral del #3, $d_b = 0.375$ plg y $a_s = 0.11$ plg^2.

$$\rho_s = \frac{4a_s(D_c - d_b)}{sD_c^2}$$

$$0.0132 = \frac{(4)(0.11)(15 - 0.375)}{(s)(15)^2}$$

$$s = 2.17'' \qquad \underline{\underline{\text{digamos } 2''}}$$

(Revisada con la tabla A.14 del apéndice.)

9.10 EJEMPLO CON UNIDADES SI

EJEMPLO 9.3

Diseñar una columna corta cuadrada con estribos con una carga axial $P_u = 2\ 600$ kN si $f'_c = 28$ MPa y $f_y = 350$ MPa. Inicialmente suponga $\rho = 0.02$.

SOLUCIÓN **Selección de las dimensiones de la columna**

$$\phi P_n = \phi 0.80[0.85 f'_c(A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \qquad \text{(Ecuación 10-2, ACI)}$$

$$2\ 600 \times 10^3 = (0.65)(0.80)[(0.85)(28)(A_g - 0.02A_g) + (350)(0.02A_g)]$$

$$A_g = 164\ 886 \text{ mm}^2$$

Usar 400 mm × 400 mm (Ag = 160 000 mm^2)

Selección de varillas longitudinales

$$2\ 600 \times 10^3 = (0.65)(0.80)[(0.85)(28)(160\ 000 - A_{st}) + 350A_{st}]$$

$$A_{st} = 3\ 654 \text{ mm}^2$$

Usar 6 varillas #29 (3 870 mm^2)

Diseño de estribos (suponiendo estribos #10 conforme a SI)

a) $16 \times 28.7 = 459.2$ mm
b) $48 \times 9.5 = 456$ mm
c) Mínima dimensión de la columna = 400 mm ← Usar estribos #10 @ 400 mm

Revisar los requisitos del código como en el ejemplo 9.1. En la figura 9.7 se muestra un croquis de la sección transversal de la columna.

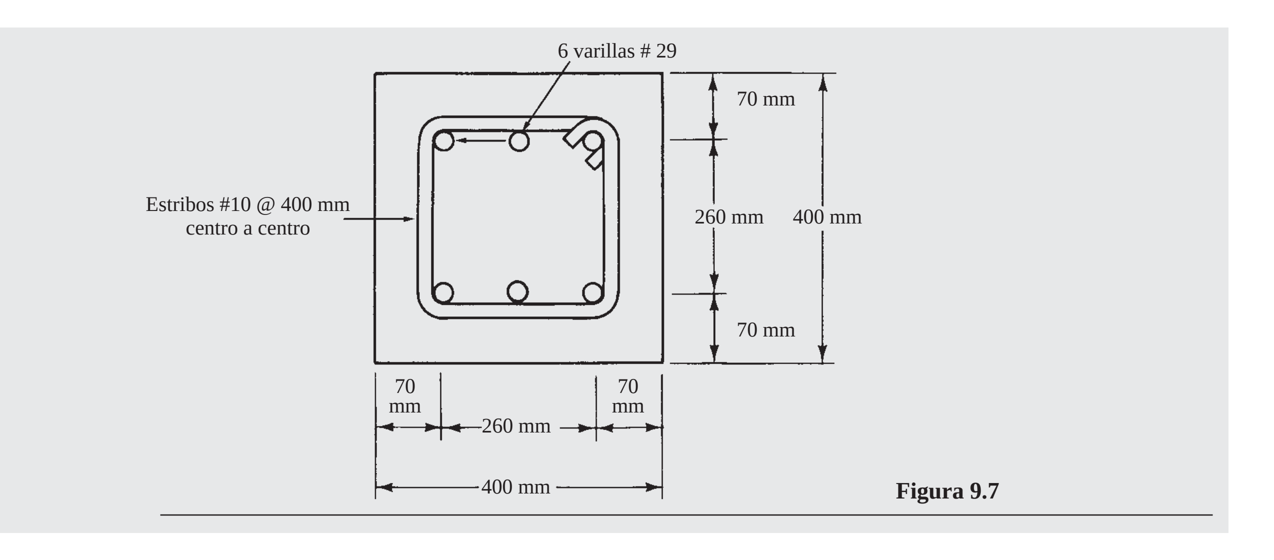


Figura 9.7

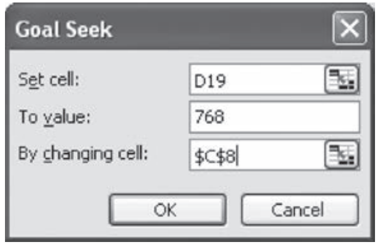
9.11 EJEMPLO CON COMPUTADORA

EJEMPLO 9.4

Usando las hojas de cálculo de Excel para los capítulos 9 y 10, repita el ejemplo 9.2.

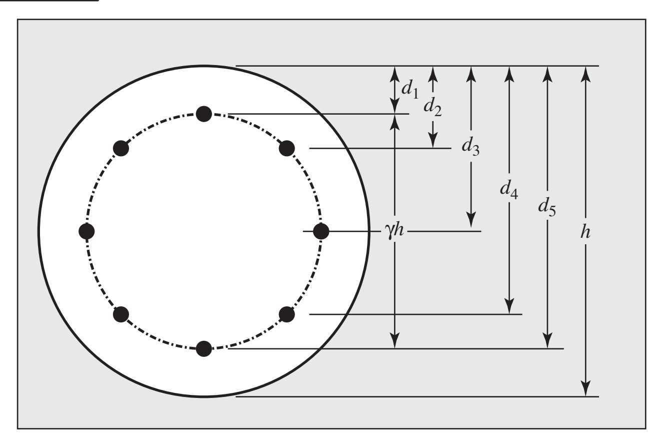
SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo *Circular Column* (Columnas circulares) e ingrese las propiedades del material ($f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2, $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2). Para γ cualquier valor menor que 1 es aceptable para los problemas del capítulo 8 sin momento ni excentricidad. Introduzca un valor de prueba de h (celda C4) y A_{st} (celda C8). La capacidad de carga axial correspondiente aparecerá en la celda D19 que se identifica como ϕP_0. Si este valor es mayor o igual que 768 klb, el diseño es aceptable. Es un diseño más económico si la capacidad está también próxima al valor de diseño de 768 klb. Por poner un ejemplo, empiece con $h = 10$ plg y $A_{st} = 1.00$ plg^2. El valor de ϕP_0 es sólo 206 klb. Obviamente se necesita una columna más grande. Siga incrementando h hasta que el valor de ϕP_0 esté próximo a 768 klb, teniendo en mente que el valor de A_{st} es todavía muy bajo. Varias iteraciones muestran que para $h = 18$ plg, $\phi P_0 = 588$ klb. Ahora empiece a incrementar A_{st} y vea su efecto en ϕP_0. Varias pruebas conducen a $A_{st} = 6.00$ plg^2 con un valor correspondiente de $\phi P_0 = 768$ klb.

También es posible usar *goal seek* (búsqueda de objetivo) para solucionar este problema. Ingrese en la computadora un valor de prueba para h (digamos 10 plg). Luego sombree la celda D19 y seleccione *goal seek* de las herramientas en la varilla de herramientas de Excel. Ingrese 768 plg en la segunda ventana y C8 en la ventana inferior (como se muestra). Dé un clic en OK y aparecerán en la celda C8 un valor de $A_{st} = 16.57$ plg^2. Esto es demasiado acero porque el porcentaje de acero excede a 8%. Es evidente que se necesita una columna de mayor diámetro. Repita este proceso, aumentando h hasta que se obtenga un valor aceptable de A_{st}. Si se ingresa $h = 16$ plg, *goal seek* indica que $A_{st} = 9.21$ plg^2. Tal vez ésta no sea la mejor opción, pero muestra cómo puede usarse la hoja de cálculo para obtener respuestas diferentes, todas las cuales pueden ser aceptables.



Capacidad de la columna circular

h =	16	plg
γ =	0.7	
f'_c =	4 000	lb/plg^2
f_y =	60 000	lb/plg^2
A_{st} =	9.21	plg^2
A_g =	201.1	plg^2
ρ_t =	0.0458	
β_1 =	0.85	
ε_y =	0.00207	
E_s =	29 000	klb/plg^2
c_{bal} =	8.05	plg
$c_{.005}$ =	5.1	plg



$P_o = (0.85f'_c A_n + A_s f_y) = 1\ 204.7$ klb

$\phi P_o = 768.0$ klb **Ecuación 10-1 del ACI**

PROBLEMAS

9.1 Diferencie entre columnas con estribos, con espiral y compuestas.

9.2 ¿Qué son los momentos primarios y los secundarios?

9.3 Diferencie entre columnas largas y cortas.

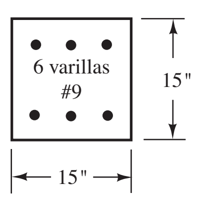
9.4 Menciones varias prácticas de diseño que pueden ayudar a hacer más económica la construcción de las columnas de concreto reforzado.

Análisis de columnas cargadas axialmente

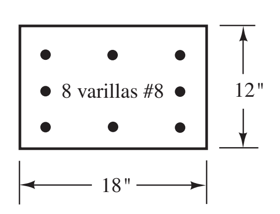
Para los problemas 9.5 a 9.8 calcule la capacidad de carga de las columnas cortas cargadas concéntricamente. $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2.

9.5 Columna cuadrada de 24 plg reforzada con 12 varillas #10. (*Resp.* 1 465.4 klb.)

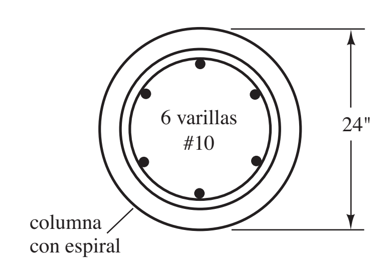
Problema 9.6



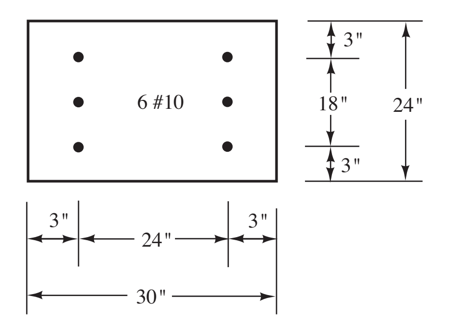
Problema 9.7 (*Resp.* 566.7 klb.)



Problema 9.8



Problema 9.9 Determine la capacidad de carga de la columna corta concéntricamente cargada mostrada si $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y $f'_c = 3\ 000$ lb/plg^2 (*Resp.* 1 181.8 klb).



Diseño de columnas cargadas axialmente

En los problemas 9.10 a 9.15 diseñe columnas para carga axial solamente. Incluya el diseño de los estribos o el zunchado y un croquis de la sección transversal seleccionada, así como la colocación de las varillas de refuerzo. Todas las columnas se suponen cortas y se dispone de tamaños de cimbra en incrementos de 2 plg.

9.10 columna cuadrada con estribos: $P_D = 300$ klb, $P_L = 500$ klb, $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2. Inicialmente suponga $\rho_g = 2\%$.

9.11 Repita el problema 9.10 si ρ_g debe ser 3% inicialmente. (*Una respuesta.* Columna de 22 plg × 22 plg con 10 varillas #10.)

9.12 Columna redonda zunchada; $P_D = 300$ klb, $P_L = 400$ klb, $f'_c = 3\ 500$ lb/plg^2 y $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2. Inicialmente suponga $\rho_g = 4\%$.

9.13 Columna redonda zunchada; $P_D = 400$ klb, $P_L = 250$ klb, $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2, $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y ρ_g inicialmente supuesta = 2%. (*Una respuesta.* Columna de 20 plg de diámetro con 6 varillas #9.)

9.14 Columna cuadrada lo más pequeña posible con estribos; $P_D = 200$ klb, $P_L = 300$ klb, $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2.

9.15 Diseñe una columna rectangular con estribos con el lado largo igual a dos veces la longitud del lado corto. $P_D = 700$ klb, $P_L = 400$ klb, $f'_c = 3\ 000$ lb/plg^2, $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2, e inicialmente suponga que $\rho_g = 2\%$. (*Una respuesta.* Columna de 20 plg × 40 plg con 9 varillas #11.)

Problemas con unidades del SI

En los problemas 9.16 a 9.18 diseñe columnas para carga axial sólo para las condiciones descritas. Incluya el diseño de estribos o espirales y un croquis de las secciones transversales seleccionadas, incluyendo la colocación de las varillas. Se supone que todas las columnas son cortas y no están expuestas a la intemperie. Los tamaños de cimbra están en incrementos de 50 mm.

9.16 Columna cuadrada con estribos; $P_D = 600$ kN, $P_L = 800$ kN, $f'_c = 24$ MPa y $f_y = 420$ MPa: Inicialmente suponga $\rho_g = 0.02$.

9.17 Columna cuadrada lo más pequeña posible con estribos; $P_D = 700$ kN, $P_L =$ kN, $f'_c = 28$ MPa y $f_y = 300$ MPa. (*Una respuesta.* Columna de 250 mm × 250 mm con seis varillas #29.)

9.18 Columna redonda zunchada; $P_D = 500$ kN, $P_L = 650$ kN, $f'_c = 35$ *MPa* y $f_y = 420$ MPa. Inicialmente suponga $\rho_g = 0.03$.

Para los problemas 9.19 a 9.21 usar las hojas de cálculo de Excel para los capítulos 9 y 10. Suponga $d' = 2.5$ plg para cada columna.

9.19 Repita el problema 9.6 (*Resp.* $\phi P_n = 574.4$ klb.)

9.20 Repita el problema 9.10.

9.21 Repita el problema 9.12. (*Una respuesta.* Columna de diámetro de 20 plg con 8 varillas #11 para la cual $\phi P_n = 1\ 050$ klb.)

10

Diseño de columnas cortas sometidas a carga axial y flexión

10.1 CARGA AXIAL Y FLEXIÓN

Todas las columnas están supeditadas a cierta flexión y fuerzas axiales, por lo que es necesario diseñarlas para que resistan ambas solicitudes. Las así llamadas fórmulas de carga axial presentadas en el capítulo 9 toman en cuenta algún momento porque incluyen el efecto de excentricidades pequeñas con los factores 0.80 y 0.85. Estos valores equivalen aproximadamente a suponer excentricidades reales de 0.10*h* para columnas con estribos y 0.05*h* para columnas zunchadas.

Las columnas se flexionarán bajo la acción de los momentos y éstos tenderán a producir compresión en un lado de las columnas y tensión en el otro. Según sean las magnitudes relativas de los momentos y las cargas axiales, hay varias formas en que las secciones pueden fallar. La figura 10.1 muestra una columna que soporta una carga P_n. En las diversas partes de la figura, la carga se coloca cada vez con mayor excentricidad (produciendo así momentos cada vez mayores) hasta que finalmente en la parte (*f*) la columna está sujeta a un momento flexionante tan grande que el efecto de la carga axial es insignificante. Cada uno de los seis casos mostrados se analiza brevemente en los párrafos siguientes, donde las letras (*a*) a la (*f*) corresponden a las mismas letras en la figura. Se supone que la falla de la columna ocurre cuando la deformación unitaria a compresión en el concreto alcanza el valor 0.003.

a) *Carga axial grande con momento despreciable:* para esta situación, la falla ocurre por aplastamiento del concreto, habiendo alcanzado todas las varillas de refuerzo en la columna su esfuerzo de fluencia en compresión.

b) *Carga axial grande y momento pequeño, tal que toda la sección transversal está en compresión:* cuando una columna está sujeta a un momento flexionante pequeño (es decir, cuando la excentricidad es pequeña), la columna entera estará en compresión, pero la compresión será más grande en un lado que en el otro. El esfuerzo de compresión máximo en la columna será de 0.85 f'_c, y la falla ocurrirá por aplastamiento del concreto, con todas las varillas trabajando a compresión.

c) *Excentricidad mayor que en el caso (b), por lo que empieza a desarrollarse tensión en un lado de la columna:* si la excentricidad aumenta un poco respecto al caso precedente, empezará a desarrollarse tensión en un lado de la columna y el acero en ese lado estará en tensión, pero con un valor menor al correspondiente al esfuerzo de fluencia. En el lado opuesto el acero estará en compresión. La falla ocurre por aplastamiento del concreto en el lado de compresión.

d) *Condición de carga balanceada:* a medida que aumenta la excentricidad, se llega a una condición en que las varillas de refuerzo en el lado de tensión alcanzan sus esfuerzos de fluencia al mismo momento que el concreto en el lado opuesto alcanza su compresión máxima de 0.85f'_c. Esta situación se llama *condición de carga balanceada.*

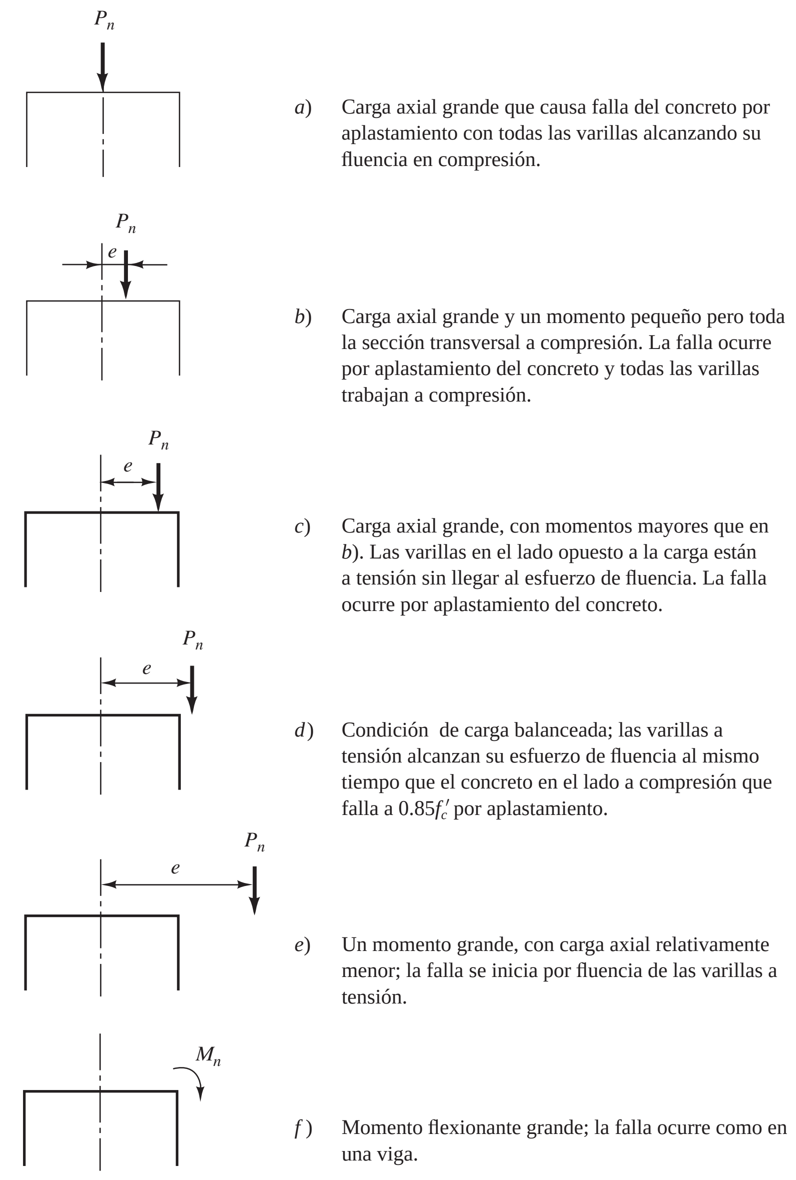


Figura 10.1 Columna sometida a carga con excentricidades cada vez mayores.

e) *Momento grande con carga axial pequeña:* si la excentricidad aumenta aún más, la falla se inicia por la fluencia de las varillas en el lado de tensión de la columna, antes que el aplastamiento del concreto.

f) *Momento grande sin carga axial apreciable:* para esta condición, la falla ocurre como en una viga.

10.2 EL CENTROIDE PLÁSTICO

La excentricidad de la carga de una columna es la distancia de la carga al *centroide plástico* de la columna. El centroide plástico representa la posición de la fuerza resultante producida por el acero y el concreto. Es el punto en la sección transversal de la columna a través del cual la carga resultante de la columna



Autopista Pennsylvania Southern, Filadelfia, Pensilvania. (Cortesía de Economy Forms Corporation.)

debe pasar para producir una deformación unitaria uniforme en el instante de la falla. Para localizar el centroide plástico, se supone que todo el concreto está trabajando a un esfuerzo de compresión de $0.85f'_c$ y todo el acero a f_y en compresión. En secciones simétricas, el centroide plástico coincide con el centroide de la sección transversal de la columna, mientras que en secciones no simétricas, el centroide plástico puede localizarse tomando momentos.

El ejemplo 10.1 ilustra los cálculos involucrados en la localización del centroide plástico de una sección transversal no simétrica. La última carga P_n se determina calculando las fuerzas totales de compresión en el concreto y el acero y sumándolas. Luego se supone que P_n actúa hacia abajo en el centroide plástico a una distancia $\bar{x}$ desde un lado de la columna y se toman momentos en ese lado de las fuerzas de compresión hacia arriba que actúan en sus centroides y de la P_n que actúa hacia abajo.

EJEMPLO 10.1

Determinar el centroide plástico de la columna T mostrada en la figura 10.2 si $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN El centroide plástico se sitúa sobre el *eje x* como se muestra en la figura 10.2 debido a la simetría. La columna se divide en dos rectángulos, el izquierdo de $16'' \times 6''$ y el derecho de $8'' \times 8''$. Se supone que C_1 es la compresión total en el rectángulo izquierdo de concreto, C_2 es la compresión total en el rectángulo derecho y C'_s es la compresión total en las varillas de refuerzo.

$$C_1 = (16)(6)(0.85)(4) = 326.4 \text{ klb}$$
$$C_2 = (8)(8)(0.85)(4) = 217.6 \text{ klb}$$

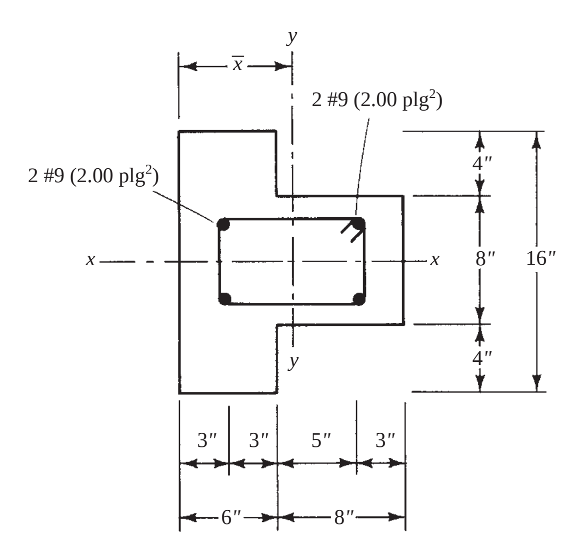


Figura 10.2

Al calcular C_s', se sustrae el concreto donde las varillas están ubicadas; es decir,

$$C_s' = (4.00)(60 - 0.85 \times 4) = 226.4 \text{ klb}$$

$$\text{Compresión total} = P_n = 326.4 + 217.6 + 226.4 = 770.4 \text{ klb}$$

Tomando momentos respecto al borde izquierdo de la columna

$$-(326.4)(3) - (217.6)(10) - (226.4)(7) + (770.4)(\bar{x}) = 0$$

$$\underline{\underline{x = 6.15''}}$$

10.3 DESARROLLO DE LOS DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN

Si se aplica una carga axial de compresión a un miembro corto de concreto, éste quedará sometido a una deformación unitaria uniforme o acortamiento, como se muestra en la figura 10.3(*a*). Si un momento sin ninguna carga axial se aplica al mismo miembro, el resultado será una flexión respecto al eje neutro del miembro, tal que la deformación unitaria será proporcional a la distancia del eje neutro. Esta variación lineal de la deformación se muestra en la figura 10.3(*b*). Si se aplican al mismo tiempo una carga axial y un momento, el diagrama resultante de deformación unitaria será una combinación de dos diagramas lineales que también será lineal, como se ilustra en la figura 10.3(*c*). Como resultado de esta linealidad, podemos suponer ciertos valores numéricos para la deformación unitaria en una parte de la columna y determinar las deformaciones unitarias en otras partes por medio de la interpolación lineal.

Al cambiar la carga axial aplicada a una columna, el momento que la columna puede resistir también cambiará. En esta sección el autor muestra cómo puede desarrollarse una curva de interacción para los valores nominales de la carga axial nominal y del momento para una columna particular.

Suponiendo que el concreto en el borde de compresión de la columna falla a una deformación unitaria de 0.003, se puede suponer una deformación unitaria en el borde alejado de la columna y calcular por estática los valores de P_n y M_n. Luego, manteniendo la deformación unitaria de compresión a 0.003 en el borde extremo, podemos suponer una serie de diferentes deformaciones unitarias en el otro borde y calcular P_n y M_n para cada valor diferente.[1] Finalmente se obtendrá un número de valores suficientes para representar gráficamente una curva de interacción como la que se muestra en la figura 10.8. El ejemplo 10.2 ilustra el cálculo de P_n y M_n en una columna para un conjunto de deformaciones unitarias supuestas.

[1]Leet, K., 1991, *Reinforced Concrete Design*, 2a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill), págs. 316-317.

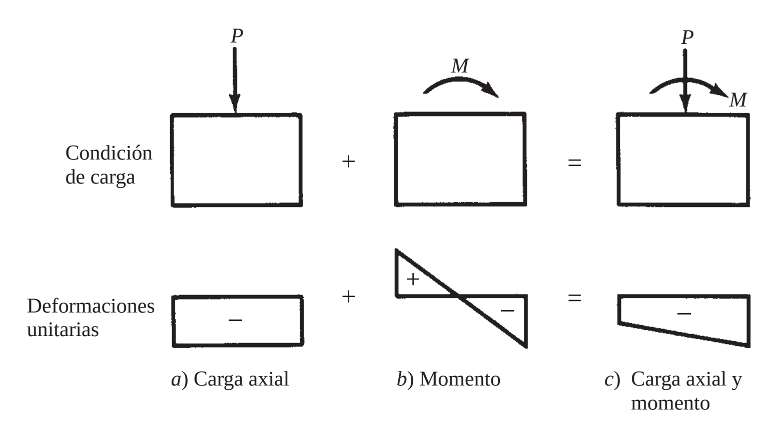


Figura 10.3 Deformaciones unitarias en la columna.

EJEMPLO 10.2

Se supone que la columna en la figura 10.4 tiene una deformación unitaria en su borde a compresión igual a –0.00300 y una deformación unitaria a tensión de +0.00200 en su otro borde. Determinar los valores de P_n y M_n que causan esta distribución de deformaciones unitarias si $f_y = 60$ klb/plg^2 y $f'_c = 4$ klb/plg^2.

SOLUCIÓN Determine los valores de c y de las deformaciones unitarias en el acero ϵ'_s y ϵ_s por proporciones con referencia al diagrama de deformaciones unitarias mostrado en la figura 10.5.

$$c = \left(\frac{0.00300}{0.00300 + 0.00200}\right)(24) = 14.40 \text{ plg}$$

$$\epsilon'_s = \left(\frac{11.90}{14.40}\right)(0.00300) = 0.00248 > 0.00207 \qquad \underline{\underline{\therefore \text{ el acero cede}}}$$

$$\epsilon_s = \left(\frac{7.10}{9.60}\right)(0.00200) = 0.00148 \qquad \underline{\underline{\text{el acero no cede}}}$$

En los siguientes cálculos, C_c es la compresión total en el concreto, C'_s es la compresión total en el acero a compresión y T_s es la tensión total en el acero a tensión. Cada uno de estos valores se calcula a continuación.

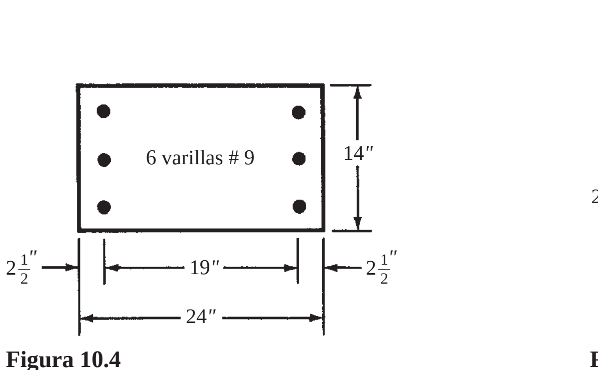


Figura 10.4

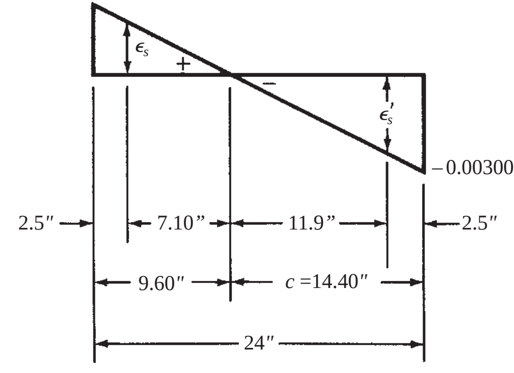


Figura 10.5

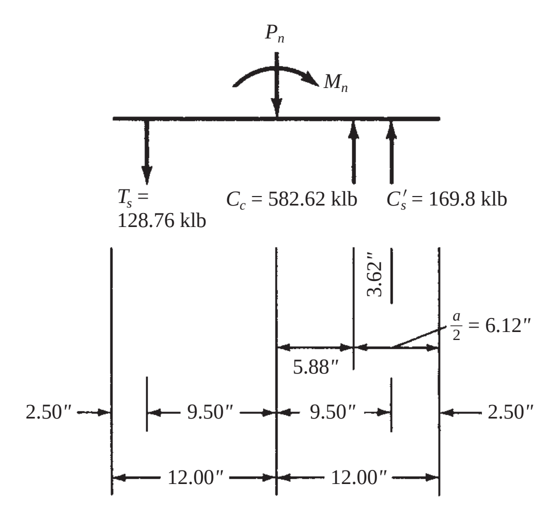


Figura 10.6

El lector debe observar que C_s' se reduce en $0.85f_c'A_s'$ para tomar en cuenta el concreto desplazado por el acero a compresión.

$$a = (0.85)(14.40) = 12.24 \text{ plg}$$
$$C_c = (0.85)(12.24)(14)(4.0) = -582.62 \text{ klb}$$
$$C_s' = (60)(3.0) - (0.85)(3.0)(4.0) = -169.8 \text{ klb}$$
$$T_s = (0.00148)(29\,000)(3.0) = +128.76 \text{ klb}$$

Por estática, P_n y M_n se determinan con ayuda de la figura 10.6, donde se muestran los valores de C_c, C_s' y T_s.

Σ*V* = 0

$$-P_n + 169.8 + 582.62 - 128.76 = 0$$
$$P_n = 623.7 \text{ klb}$$

Σ*M* = 0 respecto al acero de tensión

$$(623.7)(9.50) + M_n - (582.62)(15.38) - (169.8)(19.00) = 0$$
$$M_n = 6\,261.3 \text{ plg-klb} = 521.8 \text{ pie-klb}$$

De esta manera se determina una serie de valores de P_n y M_n que corresponden a una deformación unitaria de −0.003 en el borde de compresión y a deformaciones unitarias variables en el borde alejado de la columna. Los valores resultantes se grafican en una curva como se muestra en la figura 10.8.

Se hacen aquí algunos comentarios concernientes a los puntos extremos en esta curva. Un extremo de la curva corresponderá al caso donde P_n alcanza su valor máximo y M_n es nulo. Para este caso, P_n se determina como en el capítulo 9 para la columna cargada axialmente del ejemplo 10.2.

$$P_n = 0.85f_c'(A_g - A_s) + A_s f_y$$
$$= (0.85)(4.0)(14 \times 24 - 6.00) + (6.00)(60)$$
$$= 1\,482 \text{ klb}$$

En el otro extremo de la curva, M_n se determina para el caso donde P_n es cero. Éste es el procedimiento usado para un miembro doblemente reforzado que se vio en el capítulo 5. Para la columna del ejemplo 10.2, M_n es igual a 297 pie-klb.



Estadio de los “Pieles Rojas” de Washington. (Cortesía de EFCO.)

Una columna alcanza su última capacidad cuando el concreto alcanza una deformación unitaria a compresión de 0.003. Si el acero más cercano al lado de tensión extrema de la columna alcanza la deformación unitaria de fluencia o aun más cuando el concreto alcanza una deformación unitaria de 0.003, se dice que la columna está controlada a tensión; de lo contrario, está controlada a compresión. El punto de transición entre estas regiones es el punto de equilibrio. En el capítulo 3 el término *sección balanceada* se usó para una sección cuya deformación unitaria a compresión del concreto alcanza el valor 0.003 a la vez que el acero de tensión alcanza su deformación unitaria de fluencia f_y/E_s. En una viga, esta situación ocurre teóricamente cuando el porcentaje de acero es igual a ρ_b. Una columna puede experimentar una falla balanceada sin importar cuánto acero tenga si tiene la combinación correcta de momento y carga axial.

Para columnas, la definición de carga balanceada es la misma que para vigas, es decir, una columna que tiene una deformación unitaria de 0.003 en su lado de compresión, al mismo tiempo que su acero de tensión en el otro lado tiene una deformación unitaria de f_y/E_s. Aunque no es difícil impedir una condición balanceada en vigas al requerir que las deformaciones unitarias del acero a tensión se conserven muy por encima de f_y/E_s no es así en columnas. Así, para las columnas no es posible prevenir fallas repentinas a compresión o fallas balanceadas. En toda columna existe una situación de carga balanceada donde una carga última P_{bn} colocada con una excentricidad e_b producirá un momento M_{bn}, donde las deformaciones unitarias se alcanzarán simultáneamente.

En la condición balanceada tenemos una deformación unitaria de −0.003 en el borde a compresión de la columna y una deformación unitaria de $f_y/29 \times 10^3 = 60/29 \times 10^3 = 0.00207$ en el acero a tensión. Esta información se muestra en la figura 10.7. Se usa el mismo procedimiento que en el ejemplo 10.2 para obtener $P_n = 504.4$ klb y $M_n = 559.7$ pie-klb.

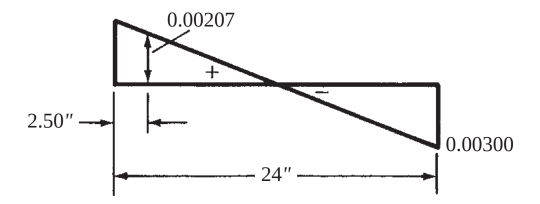


Figura 10.7

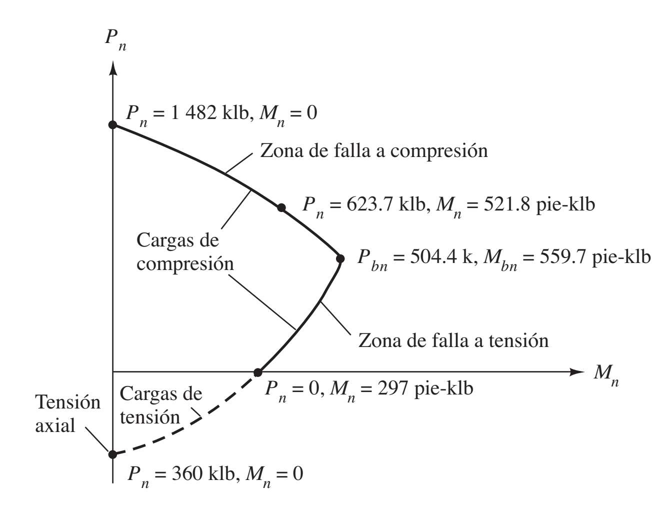
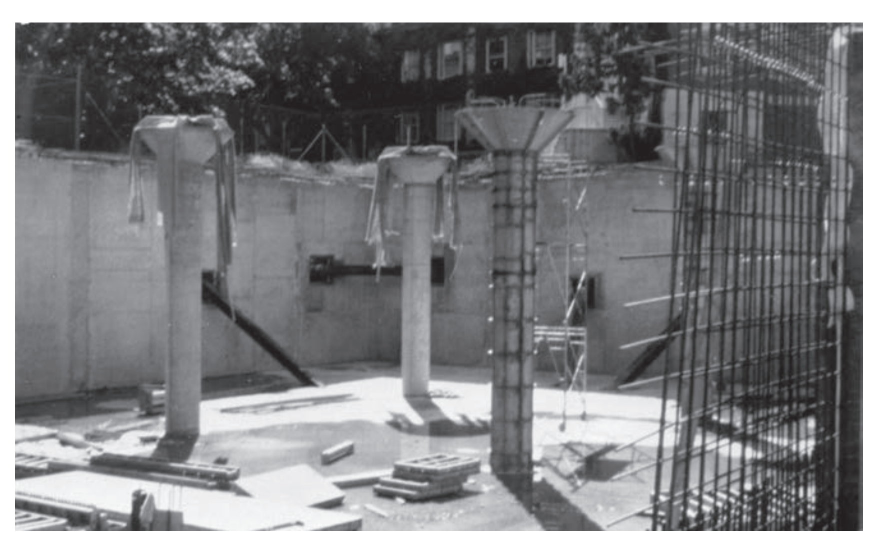


Figura 10.8 Curva de interacción para la columna de la figura 10.4. Note que éstos son valores nominales.

La curva para P_n y M_n para una columna particular se puede extender al intervalo donde P_n se convierte en una carga de tensión. Podemos proceder exactamente igual que en el caso en que P_n es de compresión. Puede suponerse un conjunto de deformaciones unitarias, escribir las ecuaciones usuales de la estática y despejar P_n y M_n. Se consideraron varios conjuntos diferentes de deformaciones unitarias para la columna de la figura 10.4 y luego se determinaron los valores de P_n y M_n. Los resultados se trazaron en la parte inferior de la figura 10.8 y se unieron con la línea punteada que está etiquetada como "cargas de tensión".

Como la tensión axial y la flexión no son muy comunes en columnas de concreto reforzado, la parte de carga de tensión en las curvas no se muestra en las figuras subsiguientes de este capítulo. Nótese que el valor máximo a tensión de P_n ocurre cuando el momento es cero. Para esa situación, todo el acero de la columna ha cedido y todo el concreto se ha agrietado. Así, P_n será igual al área total A_s de acero multiplicada por el esfuerzo de fluencia. Para la columna de la figura 10.4

$$P_n = A_s f_y = (6.0)(60) = 360 \text{ klb}$$



Columnas redondas. (Cortesía de Economy Forms Corporation.)

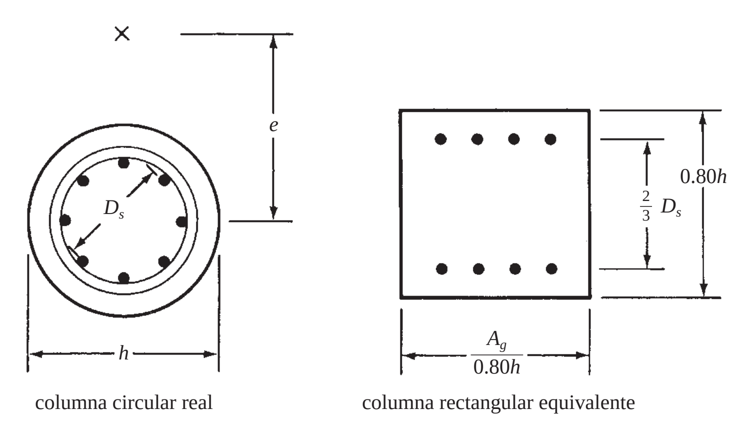


Figura 10.9 Reemplazo de una columna circular por una rectangular equivalente.

En algunas ocasiones, los miembros sometidos a carga axial y flexión tienen disposiciones asimétricas del refuerzo. Si éste es el caso, usted debe recordar que la excentricidad debe medirse correctamente desde el centroide plástico de la sección.

En este capítulo se obtuvieron valores de P_n sólo para columnas rectangulares con estribos. La misma teoría podría servir para las columnas redondas, pero los cálculos matemáticos serían algo más complicados debido al arreglo circular de las varillas y los cálculos de distancias serían bastante tediosos. Se han desarrollado varios métodos aproximados que simplifican considerablemente las operaciones. Quizás el más conocido sea el propuesto por Charles Whitney, en el cual se usan columnas rectangulares equivalentes para remplazar a las circulares.[2] Este método da resultados que concuerdan muy estrechamente con los resultados de las pruebas.

En el método de Whitney, el área de la columna equivalente se hace igual al área de la columna circular real y la profundidad de la primera en la dirección de la flexión es 0.80 veces el diámetro exterior de la columna real. Se supone que la mitad del acero está colocado en un lado de la columna equivalente y la otra mitad en el otro. La distancia entre estas dos áreas de acero se considera igual a dos tercios del diámetro (D_s) de un círculo que pase por el centro de las varillas en la columna real. Estos valores se ilustran en la figura 10.9. Una vez que la columna equivalente está establecida, los cálculos de P_n y M_n se efectúan como en el caso de las columnas rectangulares.

10.4 USO DE LOS DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN

Hemos visto que por estática se pueden determinar fácilmente los valores de P_n y M_n para una columna dada con un cierto conjunto de deformaciones unitarias. Sin embargo, el preparar una curva de interacción con una calculadora de mano para una columna solamente, es muy tedioso. Imagine el trabajo involucrado en una situación de diseño en donde es necesario considerar diversos tamaños, resistencias del concreto y porcentajes de acero. Consecuentemente, los proyectistas recurren casi siempre a programas y a diagramas de interacción generados por computadora, o a tablas para sus cálculos de columnas. El resto de este capítulo está dedicado primordialmente al estudio de los diagramas de interacción generados por computadora, como el que está en la figura 10.10. Como hemos visto, este diagrama se traza para una columna donde la carga cambia de ser axial pura a ser de flexión pura, pasando por varias combinaciones de cargas axiales y de momentos hasta una situación de flexión pura.

[2]Whitney, Charles S., 1942, "Plastic Theory of Reinforced Concrete Design", *Transactions ASCE*, 107, pp. 251-326.

Los diagramas de interacción son obviamente muy apropiados para estudiar las resistencias de las columnas con proporciones variables de cargas axiales y de momentos. Cualquier combinación de cargas que quede dentro de la curva es satisfactoria, mientras que una combinación que caiga fuera de la curva representa una falla.

Si una columna está cargada hasta la falla con sólo una carga axial, la falla ocurrirá en el punto *A* del diagrama (figura 10.10). Al movernos sobre la curva desde el punto *A*, la capacidad por carga axial disminuye conforme aumenta la proporción de momento flexionante. En la parte inferior de la curva, el punto *C* representa la resistencia por flexión del miembro sometido sólo a momento, sin presencia de carga axial. Entre los puntos extremos *A* y *C*, la columna falla debido a una combinación de carga axial y de flexión. El punto *B* se llama *punto balanceado* y representa el caso de carga balanceada, donde en teoría ocurren simultáneamente una falla por compresión y la fluencia del acero en tensión.

Remítase al punto *D* en la curva. Las líneas punteadas horizontal y vertical para este punto indican una combinación particular de momento y carga axial que causará la falla de la columna. Una línea radial trazada del punto 0 a cualquier punto sobre la curva de interacción (como el *D* en este caso), representará una excentricidad constante de carga, es decir, una relación constante de momento a carga axial.

Podría sorprender la forma de la parte inferior de la curva de *B* a *C*, donde la flexión predomina. De *A* a *B* sobre la curva la capacidad por momento de una sección aumenta conforme disminuye la carga axial, pero ocurre justo lo contrario de *B* a *C*. Sin embargo, analizando la situación con detenimiento, se verá que después de todo, el resultado es realmente lógico. La parte de la curva de *B* a *C* representa el

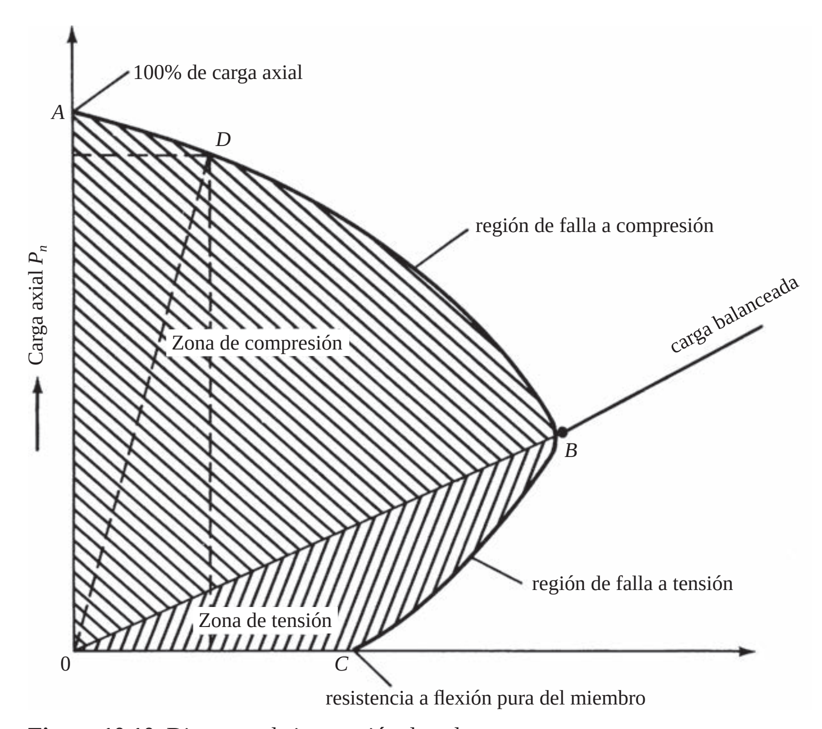


Figura 10.10 Diagrama de interacción de columna.



Enormes columnas de concreto con refuerzo. (Cortesía de Bethlehem Steel Corporation.)

intervalo de fallas a tensión. Cualquier carga axial de compresión en ese intervalo tiende a reducir los esfuerzos en las varillas de tensión, con el resultado de que puede resistirse un momento mayor.

En la figura 10.11 se muestra una curva de interacción para la columna de 14″ × 24″ con seis varillas del #9 que se vio en la sección 10.3. Si se hubiesen usado ocho varillas del #9 en la misma columna dimensionada, se generaría otra curva como se muestra en la figura; si se usaran diez varillas del #9, aun otra curva sería el resultado. La forma de los nuevos diagramas sería la misma por lo que respecta a la curva de seis varillas #9, pero los valores de P_n y M_n serían mayores.

10.5 MODIFICACIONES DE CÓDIGO A LOS DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNA

Si se preparan curvas de interacción para los valores de P_n y M_n, serían del tipo mostrado en las figuras 10.10 y 10.11. Para usar tales curvas para obtener valores de diseño, tendrían que pasar por tres modificaciones como se especifica en el código. Estas modificaciones son como sigue:

a) El artículo 9.3.2 del código especifica factores de reducción de resistencia o factores ϕ (0.65 para columnas con estribos y 0.75 para columnas zunchadas) que deben multiplicarse por los valores de P_n. Si una curva P_n para una columna específica se multiplicara por ϕ el resultado sería una curva como las mostradas en la figura 10.12.

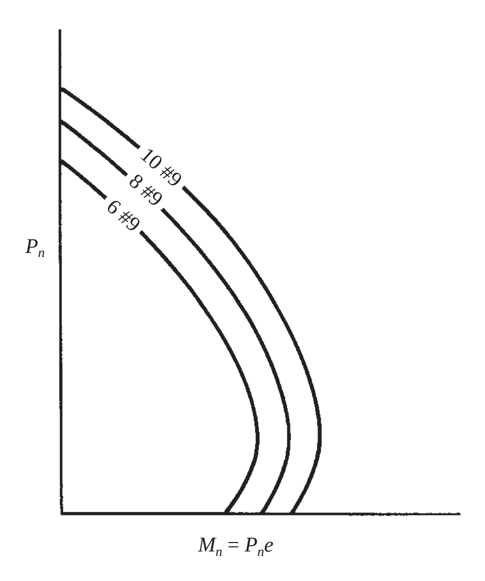


Figura 10.11 Curvas de interacción para una columna rectangular con diferentes combinaciones de varillas de refuerzo.

b) La segunda modificación también se refiere a los factores ϕ. El código especifica valores de 0.65 y 0.75 para columnas con estribos y zunchadas, respectivamente. Si una columna tiene un momento muy grande y una carga axial muy pequeña, de modo que se ubica en la parte inferior de la curva entre los puntos *B* y *C* (véase la figura 10.10), el uso de estos valores pequeños de ϕ es poco razonable. Por ejemplo, para un miembro en flexión pura (punto C en la misma curva) la ϕ especificada es de 0.90, pero si el mismo miembro tiene una carga axial añadida muy pequeña, ϕ se reduce inmediatamente a 0.65 o 0.75. Por consiguiente, el código (9.3.2.2) establece que cuando los miembros sometidos a carga axial y flexión tienen deformaciones unitarias netas de tensión (ϵ_t) entre los límites para secciones controladas a compresión y secciones controladas a tensión, se sitúan en la zona de transición para ϕ. En esta zona es permisible aumentar ϕ linealmente de 0.65 o 0.75 a 0.90 a medida que ϵ_t aumenta del límite controlado a compresión a 0.005. A este respecto, se remite al lector nuevamente a la figura 3.5 en este texto donde la zona de transición y la variación de los valores de ϕ se muestran claramente. Este tema se continúa en la sección 10.9.

c) Como se describe en el capítulo 9, las cargas permisibles máximas de las columnas se especificaron sin importar cuán pequeños fueran sus valores *e*. Como consecuencia, la parte superior de

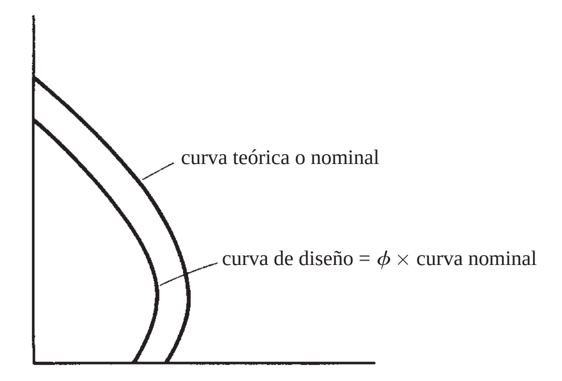


Figura 10.12 Curvas para P_n y ϕP_n para una columna individual.

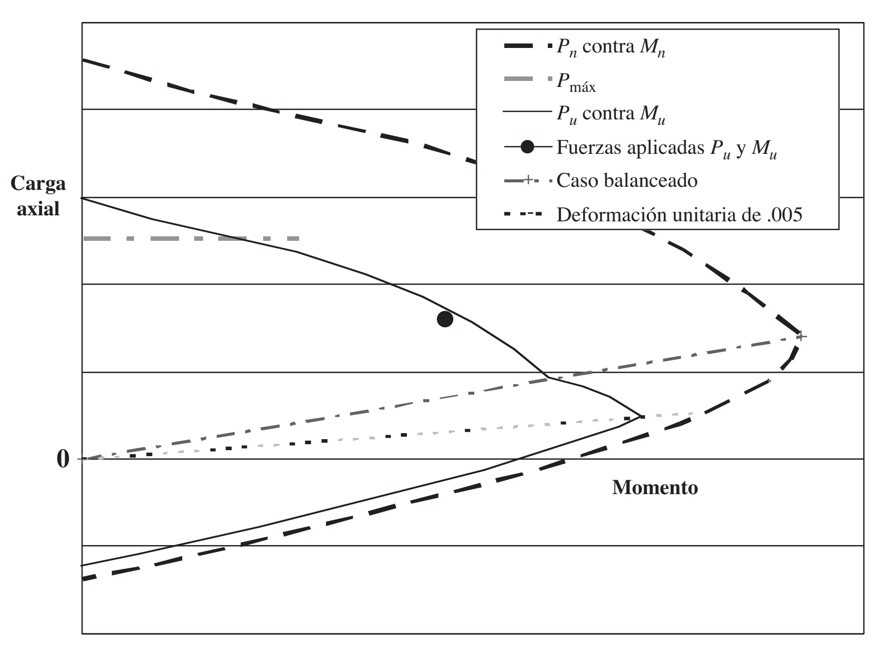


Figura 10.13 Curva de interacción para columna ajustada para las tres modificaciones descritas en esta sección (10.5).

cada curva de interacción de diseño se muestra como una línea horizontal que representa el valor apropiado de

$$P_u = \phi P_{n\,\text{máx}} \text{ para columnas con estribos} = 0.80\phi[0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \quad \text{(Ecuación 10-2, ACI)}$$

$$P_u = \phi P_{n\,\text{máx}} \text{ para columnas zunchadas} = 0.85\phi[0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \quad \text{(Ecuación 10-1, ACI)}$$

Estas fórmulas se desarrollaron para dar resultados aproximadamente equivalentes a los de las cargas aplicadas con excentricidades de $0.10h$ para columnas con estribos y $0.05h$ para columnas zunchadas.

Cada una de las tres modificaciones descritas aquí está indicada en la curva de diseño de la figura 10.13. En la figura 10.13, la línea curva continua representa a P_u y M_u, mientras que la línea curvada punteada es P_n y M_n. La diferencia entre las dos curvas es el factor ϕ. Las dos curvas tendrían la misma forma si el factor ϕ no variara. Por encima de la línea radial rotulada como "caso balanceado", $\phi = 0.65$ (0.75 para espirales). Debajo de la otra línea radial etiquetada como "deformación unitaria de 0.005″, $\phi = 0.9$. Varía entre los dos valores en promedio y la curva P_u contra M_u adopta una forma diferente.

10.6 DISEÑO Y ANÁLISIS DE COLUMNAS CARGADAS EXCÉNTRICAMENTE USANDO LOS DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN

Si los diagramas de interacción individuales para columna se prepararan como se describió en las secciones anteriores, sería necesario tener un diagrama para cada sección transversal diferente de columna, para cada conjunto diferente de grados de concreto, de acero y para cada colocación diferente de las varillas. El resultado sería un número astronómico de diagramas. Sin embargo, el número puede reducirse considerablemente si los diagramas se representan gráficamente con ordenadas de $K_n = P_n/f'_c A_g$ (en lugar de P_n) y con abscisas de $R_n = P_n e/f'_c A_g h$ (en lugar de M_n). Los diagramas resultantes normalizados

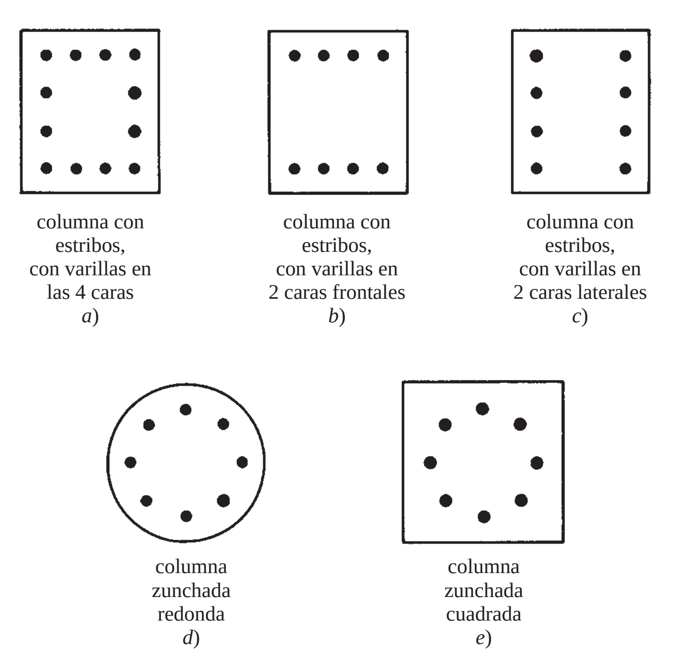


Figura 10.14

de interacción pueden usarse para secciones transversales con dimensiones ampliamente variables. El ACI ha preparado curvas normalizadas de interacción de esta manera para las diferentes situaciones de la sección transversal y de disposición de las varillas que se muestran en la figura 10.14 y para grados diferentes de acero y concreto.[3]

Dos de los diagramas se reproducen en las figuras 10.15 y 10.16, mientras que en el apéndice A (gráficas 2 a 13) se presentan algunos otros para las situaciones dadas en las partes *a*), *b*) y *d*) de la figura 10.14. *Observe que estos diagramas del ACI no incluyen las tres modificaciones descritas en la última sección.*

Los diagramas de interacción de columna del ACI se usan en los ejemplos 10.3 a 10.7 para diseñar o analizar columnas para situaciones diferentes. Con objeto de usar correctamente estos diagramas, es necesario calcular el valor de γ (gamma), el cual es igual a la distancia del centro de las varillas en un lado de la columna al centro de las varillas en el otro lado de la misma, dividida entre h, que es la altura de la sección de la columna (ambos valores se toman en la dirección de la flexión). Usualmente el valor de γ obtenido se sitúa entre un par de curvas y se tiene que efectuar una interpolación de las lecturas de las curvas entre ambas.

Advertencia

Asegúrese de que la ilustración de la columna en el lado derecho superior de la curva de interacción usada concuerda con la columna que se está considerando. En otras palabras, ¿se tienen varillas en dos caras de la columna o sobre las cuatro caras? Si se seleccionan las curvas equivocadas, las respuestas pueden ser incorrectas.

Aunque existen varios métodos para seleccionar tamaños de columnas, el método de ensayo y error es tan bueno como cualquier otro. Con este procedimiento el proyectista estima lo que considera un tamaño razonable de columna y luego determina el porcentaje de acero requerido para ese tamaño de

[3] American Concrete Institute, *Design Handbook*, 1997, Publicación SP-17(97), Detroit, 482 páginas.

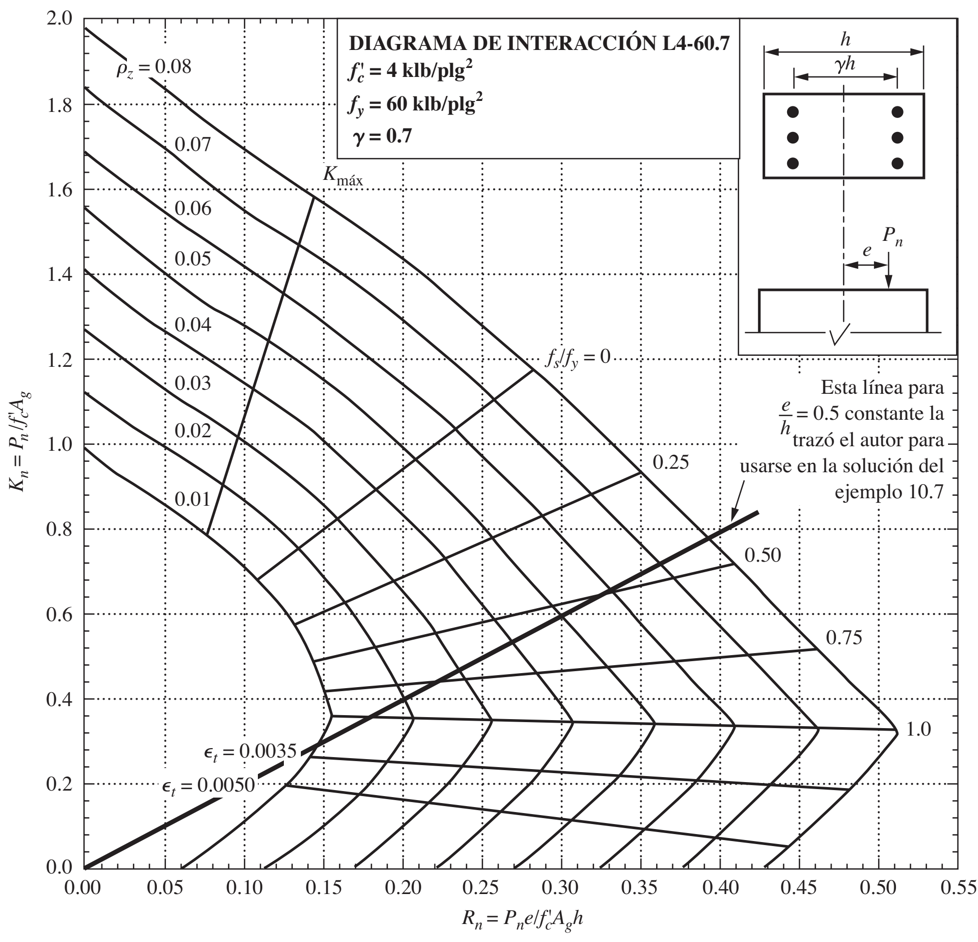


Figura 10.15 Diagramas de interacción del ACI para columnas rectangulares con varillas a lo largo de dos caras frontales. (Permiso del American Concrete Institute.)

columna a partir del diagrama de interacción. Si se piensa que la ρ_g determinada es irrazonablemente grande o pequeña, se puede seleccionar otro tamaño de columna y se puede seleccionar el nuevo valor requerido de ρ_g a partir de los diagramas, etc. A este respecto, la selección de columnas para las cuales ρ_g es mayor que 4 o 5% resulta en la aglomeración de acero, en particular en empalmes y las dificultades consiguientes para meter el concreto en la cimbra.

Un procedimiento ligeramente diferente se usa en el ejemplo 10.4 donde el esfuerzo medio de compresión bajo carga última en la sección transversal de la columna se supone igual a cierto valor, digamos entre 0.5 y 0.6 f'_c. Este valor se divide entre P_n para determinar el área requerida de la columna. Luego se seleccionan dimensiones para la sección transversal y se determina el valor de ρ_g de las curvas de interacción. Nuevamente, si el porcentaje obtenido parece irrazonable, el tamaño de la columna puede revisarse para obtener un nuevo porcentaje de acero.

En los ejemplos 10.3 a 10.5, se seleccionan varillas de refuerzo para tres columnas. Se calculan los valores de $K_n = P_n/f'_cA_g$ y $R_n = P_ne/f'_cA_gh$. La posición de esos valores se ubica en la gráfica apropiada y se determina ρ_g y se multiplica por el área total de la columna en cuestión para determinar el área de refuerzo necesaria.

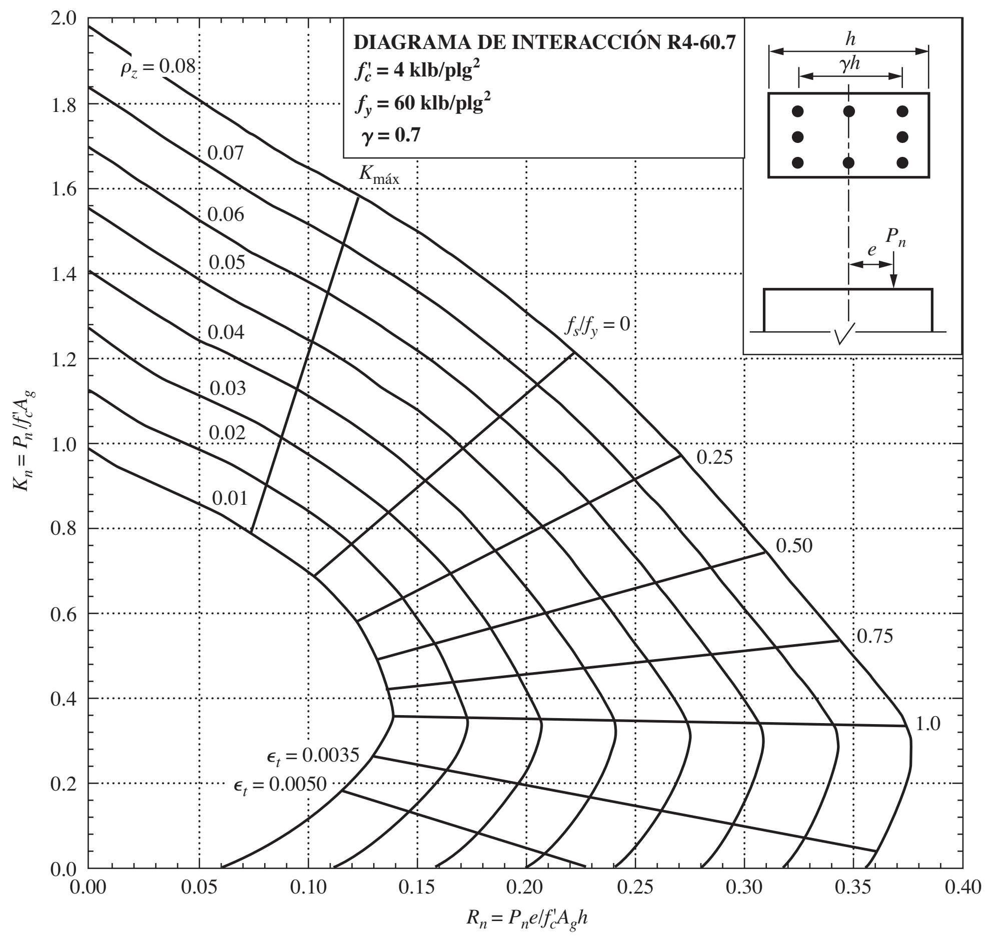


Figura 10.16 Diagramas de interacción del ACI para columnas rectangulares con varillas a lo largo de las cuatro caras. (Permiso del American Concrete Institute.)

EJEMPLO 10.3

La columna corta con estribos de 14 × 20 plg de la figura 10.17 va a usarse para soportar las siguientes cargas y momentos: $P_D = 125$ klb, $P_L = 140$ klb, $M_D = 75$ pie-klb y $M_L = 90$ pie-klb. Si $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2, seleccionar las varillas de refuerzo que deben colocarse en dos caras frontales usando sólo diagramas de interacción de columna apropiados del ACI.

SOLUCIÓN

$$P_u = (1.2)(125) + (1.6)(140) = 374 \text{ klb}$$

$$P_n = \frac{374}{0.65} = 575.4 \text{ klb}$$

$$M_u = (1.2)(75) + (1.6)(90) = 234 \text{ pie-klb}$$

$$M_n = \frac{234}{0.65} = 360 \text{ pie-klb}$$

$$e = \frac{(12)(360)}{575.4} = 7.51''$$

$$\gamma = \frac{15}{20} = 0.75$$

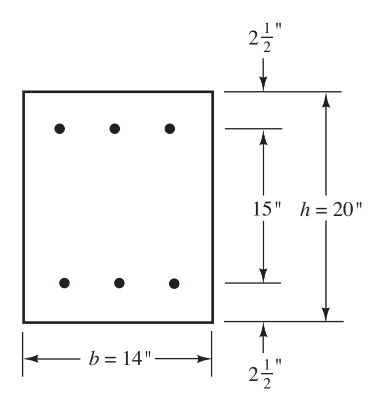


Figura 10.17

Calcular los valores de K_n y R_n

$$K_n = \frac{P_n}{f'_c A_g} = \frac{575.4}{(4)(14 \times 20)} = 0.513$$

$$R_n = \frac{P_n e}{f'_c A_g h} = \frac{(575.4)(7.51)}{(4)(14 \times 20)(20)} = 0.193$$

El valor de γ está situado entre los valores de γ para las gráficas 3 y 4 del apéndice A. Por consiguiente interpolar entre los dos como sigue:

γ	0.70	0.75	0.80
ρ_g	0.0220	0.0202	0.0185

$$A_s = \rho_g bh = (0.0202)(14)(20) = 5.66 \text{ plg}^2$$

Use 6 varillas del #9 $= 6.00$ plg^2

Notas

a) Observe que $\phi = 0.65$ como se supuso inicialmente ya que las gráficas usadas muestran que $\frac{f_s}{f_y}$ es < 1.0 y así $\epsilon_t < 0.002$.

b) Los requisitos del código deben revisarse como en el ejemplo 9.1. (Véase la figura 10.25 para entender.)

EJEMPLO 10.4

Diseñar una columna corta cuadrada para las siguientes condiciones: $P_u = 600$ klb, $M_u = 80$ pie-klb, $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2. Coloque las varillas uniformemente alrededor de las cuatro caras de la columna.

SOLUCIÓN Suponga que la columna tendrá un esfuerzo promedio de compresión = aproximadamente $0.6f'_c = 2\,400$ lb/plg^2.

$$A_g \text{ requerida} = \frac{600}{2.400} = 250 \text{ plg}^2$$

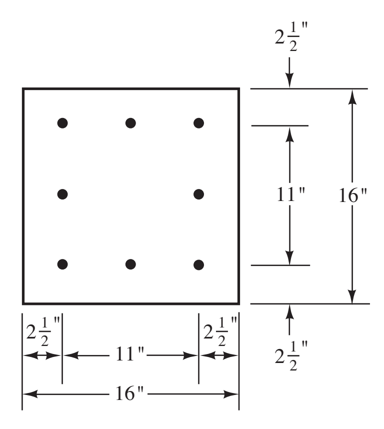


Figura 10.18

Ensaye una columna de 16 × 16 plg ($A_g = 256$ plg^2) con las varillas colocadas como se muestra en la figura 10.18.

$$e = \frac{M_u}{P_u} = \frac{(12)(80)}{600} = 1.60''$$

$$P_n = \frac{P_u}{\phi} = \frac{600}{0.65} = 923.1 \text{ klb}$$

$$K_n = \frac{P_n}{f'_c A_g} = \frac{923.1}{(4)(16 \times 16)} = 0.901$$

$$R_n = \frac{P_n e}{f'_c A_g h} = \frac{(923.1)(1.6)}{(4.0)(16 \times 16)(16)} = 0.0901$$

$$\gamma = \frac{11}{16} = 0.6875$$

Interpolando entre los valores dados en las gráficas 6 y 7 del apéndice A.

γ	0.600	0.6875	0.700
ρ_g	0.025	0.023	0.022

$$A_s = (0.023)(16)(16) = 5.89 \text{ plg}^2$$

Use ocho varillas del #8 = 6.28 plg^2

Notas

a) Observe que $\phi = 0.65$ como se supuso inicialmente ya que las gráficas usadas muestran que $\frac{f_s}{f_y} < 1.0$ y así $\epsilon_t < 0.002$.

b) Los requisitos del código deben revisarse como en el ejemplo 9.1. (Véase la figura 10.25.)

EJEMPLO 10.5

Usando las gráficas de interacción de columnas del ACI, seleccione el refuerzo para la columna redonda corta zunchada mostrada en la figura 10.19 si $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2; $f_y = 60\,000$ lb/plg^2; $P_u = 500$ klb y $M_u = 225$ pie-klb.

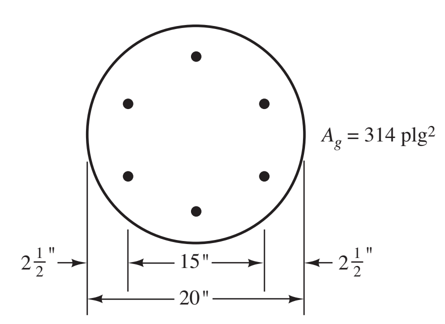


Figura 10.19

SOLUCIÓN

$$e = \frac{(12)(225)}{500} = 5.40 \text{ plg}$$

$$P_n = \frac{P_u}{\phi} = \frac{500}{0.75} = 666.7 \text{ klb}$$

$$K_n = \frac{P_n}{f'_c A_g} = \frac{666.7}{(4)(314)} = 0.531$$

$$R_n = \frac{P_n e}{f'_c A_g h} = \frac{(666.7)(5.40)}{(4)(314)(20)} = 0.143$$

$$\gamma = \frac{15}{20} = 0.75$$

Por interpolación entre las gráficas 11 y 12 del apéndice A, ρ_g resulta ser igual a 0.0235 y $\frac{f_s}{f_y} < 1.0$.

$$\rho A_g = (0.0235)(314) = 7.38 \text{ plg}^2$$

Use 8 varillas del #9 = 8.00 plg²

Las mismas notas en lo que respecta a los ejemplos 10.3 y 10.4.

En el ejemplo 10.6 se desea seleccionar una columna de 14 plg de ancho con aproximadamente 2% de acero. Esto se hace ensayando con diferentes dimensiones de columna y después se determina el porcentaje de acero requerido en cada caso.

EJEMPLO 10.6

Diseñe una columna corta rectangular con estribos de 14 plg de ancho con varillas sólo en las dos caras frontales para $P_u = 500$ klb, $M_u = 250$ pie-klb, $f'_c = 4\,000$ lb/plg² y $f_y = 60\,000$ lb/plg². Seleccione una columna con aproximadamente 2% de acero.

SOLUCIÓN

$$e = \frac{M_u}{P_u} = \frac{(12)(250)}{500} = 6.00''$$

$$P_n = \frac{P_u}{\phi} = \frac{500}{0.65} = 769.2 \text{ klb}$$

Probando varios tamaños de columna $(14 \times 20, 14 \times 22, 14 \times 24)$ y determinando el refuerzo.

Tamaños de prueba	14×20	14×22	14×24
$K_n = \dfrac{P_n}{f'_c A_g}$	0.687	0.624	0.572
$R_n = \dfrac{P_n e}{f'_c A_g h}$	0.206	0.170	0.143
$\gamma = \dfrac{h - 2 \times 2.50}{h}$	0.750	0.773	0.792
ρ_g por interpolación	0.0315	0.020	0.011

Use una columna 14×22

$$A_g = (0.020)(14 \times 22) = 6.16 \text{ plg}^2$$

Use 8 varillas #8 = 6.28 plg^2

Las mismas notas en lo que respecta a los ejemplos 10.3 y 10.4.

En el ejemplo 10.7 se presenta una ilustración más del uso de los diagramas de interacción del ACI. En este ejemplo se determina la carga nominal P_n de la columna para una excentricidad dada que la columna puede soportar.

Con referencia a las curvas de interacción del ACI, el lector debe notar cuidadosamente que el valor de R_n (que es igual a $P_n e/f'_c A_g h$) para una columna particular, es igual a e/h por el valor de $K_n(P_n/f'_c A_g)$ para esa columna. Este hecho necesita ser comprendido cuando el usuario quiere determinar la carga nominal que una columna puede soportar para una excentricidad dada.

En el ejemplo 10.7 se determina la carga nominal que la columna corta de la figura 10.20 puede soportar para una excentricidad de 10 plg con respecto al *eje x*. Si graficamos en el diagrama de interacción el punto de intersección de K_n y R_n para una columna particular y dibujamos una línea recta de ese punto a la esquina inferior izquierda u origen de la figura, tendremos una línea con una e/h constante. Para la columna del ejemplo 10.6 $e/h = 10/20 = 0.5$. Por tanto, se grafica una línea que parte del origen y que pasa por un conjunto de valores supuestos para K_n y R_n en la proporción de 10/20 entre sí. En este caso, K_n se hizo igual a 0.8 y $R_n = 0.5 \times 0.8 = 0.4$. Después se dibujó una línea de ese punto de intersección al origen del diagrama como se muestra en la figura 10.16. Finalmente, se determinó la intersección de

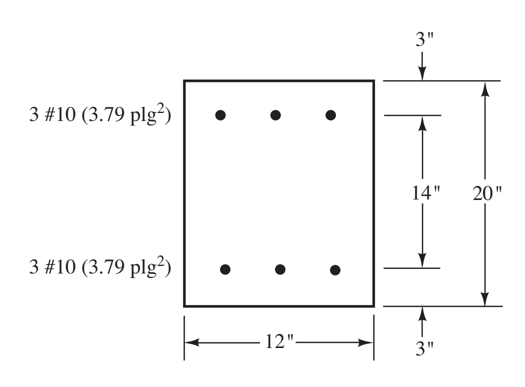


Figura 10.20

esta línea con ρ_g (0.0316 en este ejemplo) y se leyó el valor de K_n o R_n. Este último valor nos permite calcular P_n.

EJEMPLO 10.7

Usando las curvas de interacción apropiadas, determine el valor de P_n para la columna corta con estribos mostrada en la figura 10.20 si $e_x = 10^n$. Suponga $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN

$$\frac{e}{h} = \frac{10}{20} = 0.500$$

$$\rho_g = \frac{(2)(3.79)}{(12)(20)} = 0.0316$$

$$\gamma = \frac{14}{20} = 0.700$$

Representando gráficamente una línea recta por el origen y la intersección de los valores supuestos de K_n y R_n (digamos 0.8 y 0.4, respectivamente).

Para ρ_g de 0.0316 leemos el valor de R_n

$$R_n = \frac{P_n e}{f'_c A_g h} = 0.24$$

$$P_n = \frac{(0.24)(4)(12 \times 20)(20)}{10} = 460.8 \text{ klb}$$

Cuando la columna usual está supeditada a momento y carga axial, parece razonable suponer inicialmente que $\phi = 0.65$ para columnas con estribos y 0.70 para columnas zunchadas. Sin embargo, debe recordarse que bajo ciertas condiciones estos valores de ϕ pueden aumentar, como se estudia en detalle en la sección 10.9.

10.7 FUERZA CORTANTE EN COLUMNAS

Las fuerzas cortantes en columnas interiores en estructuras arriostradas son usualmente bastante pequeñas y normalmente no controlan el diseño. Sin embargo, las fuerzas cortantes en columnas exteriores pueden ser grandes, aun en una estructura arriostrada, en particular en columnas con curvatura doble. La sección 11.3.1.2 del código ACI provee las siguientes ecuaciones para determinar la fuerza cortante que puede ser soportada por el concreto para un miembro sujeto simultáneamente a compresión axial y fuerzas cortantes.

$$V_c = 2\left(1 + \frac{N_u}{2\,000 A_g}\right)\lambda\sqrt{f'_c}\,b_w d \qquad \text{(Ecuación 11-4, ACI)}$$

En unidades del SI esta ecuación es:

$$V_c = \left(1 + \frac{N_u}{14 A_g}\right)\left(\frac{\lambda\sqrt{f'_c}}{6}\right) b_w d$$

En estas ecuaciones, N_u es la fuerza axial factorizada que actúa simultáneamente con la fuerza cortante factorizada, V_u, que se aplica al miembro. El valor de N_u/A_g es el esfuerzo axial factorizado promedio en la columna y se expresa en unidades de lb/plg^2. Si V_u es mayor que $\phi V_c/2$, será necesario calcular la

separación requerida entre estribos usando los procedimientos de separación de estribos descritos en el capítulo 8. Los resultados darán una separación más estrecha que la requerida al usar las reglas usuales para columnas discutidas anteriormente en la sección 9.5.

Las secciones 11.2.3 y 11.4.7.3 del código ACI especifican el método para calcular la contribución del concreto a la resistencia al corte total de columnas circulares y para calcular la contribución de refuerzo por cortante para los casos donde están presentes aros circulares, estribos o espirales. Según el Comentario del código en su sección 11.2.3, la sección transversal completa en columnas circulares es efectiva para resistir a las fuerzas cortantes. El área de cortante, $b_w d$, en la ecuación 11-4 del ACI entonces sería igual al área total de la columna. Sin embargo, para proveer compatibilidad con otros cálculos que requieren una longitud efectiva, el ACI requiere que el área por cortante en la ecuación 11-4 del ACI cuando se aplica a columnas circulares se calcule como un área rectangular equivalente en la cual

$$b_w = D$$
$$d = 0.8D$$

En estas ecuaciones, D es el diámetro total de la columna. Si la constante modificadora D en la ecuación de longitud efectiva fuera igual a $\pi/4$, que es igual a 0.7854, el área rectangular efectiva sería igual al área total de la columna circular. Como tal, el área de la columna se sobreestima por un poco menos de 2% cuando se usa el área equivalente prescrita por el ACI.

10.8 FLEXIÓN BIAXIAL

Muchas columnas están sometidas a flexión biaxial, es decir, a flexión con respecto a ambos ejes. Las columnas en las esquinas de los edificios donde las vigas y las trabes concurren con las columnas desde dos direcciones son los casos más comunes, pero existen otros tales como aquellos donde las columnas se cuelan monolíticamente, como si fueran partes de marcos en ambas direcciones o donde las columnas soportan vigas de fachada muy pesadas. Los estribos de puentes casi siempre están sometidos a flexión biaxial.

Las columnas circulares tienen simetría polar y así la misma capacidad última en todas las direcciones. Por consiguiente, el proceso de diseño es el mismo, independientemente de las direcciones de los momentos. Si existe flexión respecto a los ejes x y y, el momento biaxial puede calcularse combinando los dos momentos o sus excentricidades como sigue:

$$M_u = \sqrt{(M_{ux})^2 + (M_{uy})^2}$$

o bien,

$$e = \sqrt{(e_x)^2 + (e_y)^2}$$

Para formas distintas de la circular, es necesario considerar los efectos de la interacción tridimensional. Siempre que sea posible, conviene diseñar con sección circular las columnas sometidas a flexión biaxial. Si es necesario usar columnas cuadradas o rectangulares para tales casos, el refuerzo debe colocarse uniformemente alrededor de los perímetros.

Lógicamente podría pensarse que sería posible determinar P_n para una columna cargada biaxialmente mediante ecuaciones de estática, tal como se hizo en el ejemplo 10.2. Tal procedimiento conduce a la respuesta correcta, pero las operaciones matemáticas son tan complejas debido a la forma del lado comprimido de la columna, que el método no resulta práctico. No obstante, haremos algunos comentarios respecto a este tipo de solución refiriéndonos a la figura 10.21.

Se escoge una posición supuesta para el eje neutro y se dibujan los triángulos apropiados de deformaciones unitarias, como se muestra en la figura. Se escriben las ecuaciones usuales con $C_c = 0.85 f_c'$ veces el área sombreada A_c y con las fuerzas en cada varilla iguales al área de sus secciones transversales multiplicadas por los respectivos esfuerzos. La solución de la ecuación provee la carga que establecería la posición del eje neutro; sin embargo, el proyectista usualmente comienza el diseño

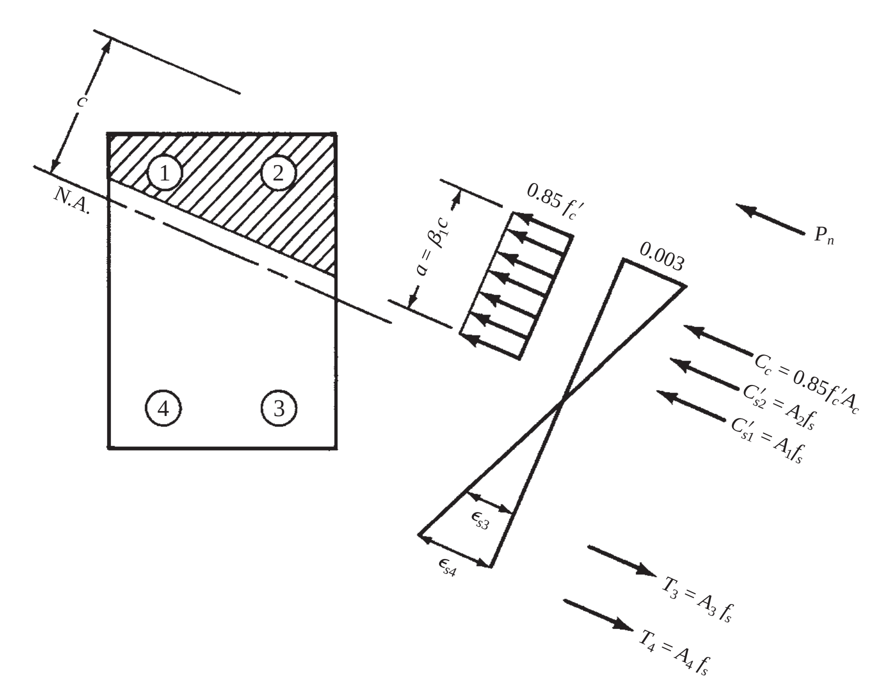


Figura 10.21

con ciertas cargas y excentricidades supuestas y no conoce la posición del eje neutro. Además, dicho eje probablemente no es perpendicular a la resultante $e = \sqrt{(e_x)^2 + (e_y)^2}$.

Para formas de columna que sean diferentes de la circular, es conveniente considerar curvas tridimensionales de interacción como la mostrada en la figura 10.22. En esta figura la curva rotulada como M_{nxo} representa la curva de interacción para el caso en que la flexión ocurra sólo respecto al eje x, mientras que la rotulada como M_{nyo} es la curva de interacción para el caso en que la flexión ocurra sólo respecto al eje y.

En esta figura, para una P_n constante, el plano rayado mostrado representa el contorno de M_n para la flexión respecto a cualquier eje.

Actualmente, el análisis de las columnas sometidas a flexión biaxial se hace primordialmente con computadora. Uno de los métodos aproximados que es útil en el análisis y que puede realizarse con calculadoras de bolsillo incluye el uso de la así llamada ecuación de interacción recíproca desarrollada por el profesor Boris Bresler de la Universidad de California en Berkeley.[4] Esta ecuación, que se muestra en la sección R10.3.6 del comentario del ACI, es como sigue:

$$\frac{1}{P_{ni}} = \frac{1}{P_{nx}} + \frac{1}{P_{ny}} - \frac{1}{P_o}$$

donde

P_{ni} = capacidad nominal de la sección por carga axial cuando la carga se coloca con una excentricidad dada a lo largo de ambos ejes.

[4] Bresler, B., 1960,"Design Criteria for Reinforced Concrete Columns under Axial Load and Biaxial Bending", *Journal ACI*, 57, p. 481.

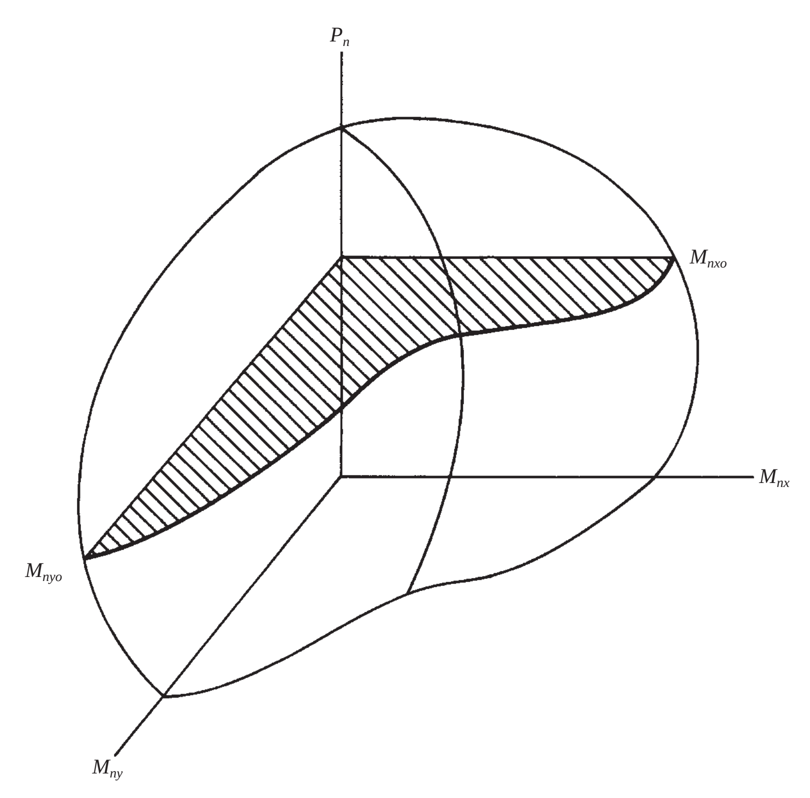


Figura 10.22

$P_{nx} =$ capacidad nominal de la sección por carga axial cuando la carga se coloca con una excentricidad e_x.

$P_{ny} =$ capacidad nominal de la sección por carga axial cuando la carga se coloca con una excentricidad e_y.

$P_o =$ capacidad nominal de la sección por carga axial cuando la carga se coloca con excentricidad cero. Generalmente se toma igual a $0.85f_c'A_g + f_yA_s$.

La ecuación de Bresler funciona bastante bien en tanto que P_{ni} es por lo menos tan grande como 0.10 P_o. Si P_{ni} es menor que 0.10 P_o, es válido despreciar la fuerza axial completamente y diseñar la sección como un miembro sometido sólo a flexión biaxial. Este procedimiento es algo conservador. Para esta parte inferior de la curva de interacción, debe recordarse que una carga axial pequeña aumenta la capacidad por momento de la sección. La ecuación de Bresler no se aplica a las cargas axiales de tensión. El profesor Bresler encontró que las cargas últimas que se predicen mediante su ecuación para las condiciones descritas, no varían respecto a los resultados experimentales por más de 10%.

El ejemplo 10.8 ilustra el uso del teorema recíproco para el análisis de una columna sometida a flexión biaxial. El procedimiento para calcular P_{nx} y P_{ny} es el mismo que el usado para los ejemplos anteriores de este capítulo.

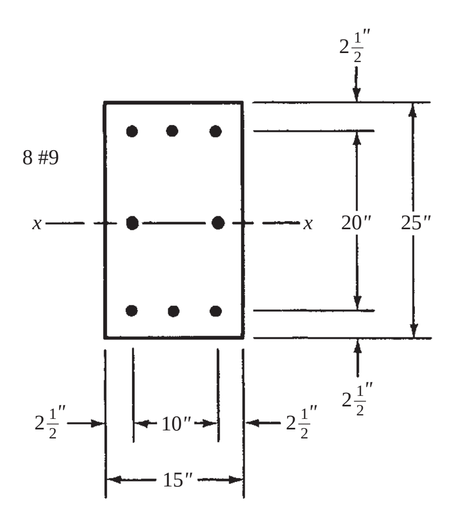


Figura 10.23

EJEMPLO 10.8

Determinar la capacidad de diseño P_{ni} de la columna corta con estribos mostrada en la figura 10.23, sometida a flexión biaxial. $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2, $f_y = 60\,000$ lb/plg^2, $e_x = 16$ plg y $e_y = 8$ plg.

SOLUCIÓN **Para flexión respecto al eje *x***

$$\gamma = \frac{20}{25} = 0.80$$

$$\rho_g = \frac{8.00}{(15)(25)} = 0.0213$$

$$\frac{e}{h} = \frac{16}{25} = 0.64$$

Dibujando una línea de $\frac{e}{h}$ = 0.64 constante en la gráfica 8 del apéndice A

$$R_n = \frac{P_n e}{f'_c A_g h} = 0.185$$

$$P_n = \frac{(4)(15 \times 25)(25)(0.185)}{16} = 434 \text{ klb}$$

Para flexión respecto al eje *y*

$$\gamma = \frac{10}{15} = 0.667$$

$$\rho_g = \frac{8.00}{(15)(25)} = 0.0213$$

$$\frac{e}{h} = \frac{8}{15} = 0.533$$

Dibujando líneas de *e*/*h*(0.533) constante en las gráficas 6 y 7 del apéndice A e interpolando entre ellas para γ = 0.667.

$$R_n = \frac{P_{ny} e}{f'_c A_g h} = 0.163$$

$$P_{ny} = \frac{(4)(15 \times 25)(15)(0.163)}{8} = 458 \text{ klb}$$

Determinando la capacidad por carga axial de la sección

$$P_o = (0.85)(4.0)(15 \times 25) + (8.00)(60) = 1\,755 \text{ klb}$$

Usando la expresión de Bresler para determinar P_{ni}

$$\frac{1}{P_{ni}} = \frac{1}{P_{nx}} + \frac{1}{P_{ny}} - \frac{1}{P_o}$$

$$\frac{1}{P_{ni}} = \frac{1}{434} + \frac{1}{458} - \frac{1}{1\,755}$$

Multiplicando todo por 1 755

$$\frac{1\,755}{P_{ni}} = 4.044 + 3.832 - 1$$

$$P_{ni} = \underline{\underline{255.3 \text{ klb}}}$$

Si los momentos en la dirección débil (el eje *y* aquí) son pequeños en comparación con la flexión en la dirección fuerte (el eje *x)*, es bastante común despreciar el momento menor. Esta práctica es probablemente razonable en tanto que e_y sea menor que aproximadamente 20% de e_x ya que la ecuación de Bresler mostrará poca reducción para P_{ni}. Para el ejemplo recién resuelto, una e_y igual a 50% de e_x causó que la capacidad por carga axial se redujese aproximadamente 40%.

El ejemplo 10.9 ilustra el diseño de una columna sometida a flexión biaxial. La expresión de Bresler, que es de poca utilidad en el proporcionamiento de tales miembros, se emplea para revisar las capacidades de las secciones seleccionadas por algún otro procedimiento. Los diseños teóricos exactos de columnas sometidas a flexión biaxial son muy complicados y, como consecuencia, rara vez se manipulan con calculadoras de bolsillo. Se proporcionan ya sea por métodos aproximados o con programas de computadora.

10.9 DISEÑO DE COLUMNAS CON CARGA BIAXIAL

Durante las décadas pasadas, se han introducido varios métodos aproximados para el diseño de columnas con momentos biaxiales. Por ejemplo, un buen número de gráficas de diseño están disponibles, con las cuales pueden hacerse diseños satisfactorios. Los problemas se reducen a cálculos muy simples en los que se toman coeficientes de las gráficas y se usan para amplificar los momentos respecto a un solo eje. Los diseños se hacen entonces con los diagramas normales de diseño uniaxial.[5-7]

Otro procedimiento aproximado que funciona bastante bien en los cálculos hechos en gabinetes de diseño se usa en el ejemplo 10.9. Si este método simple se aplica a columnas cuadradas, se supone que los valores de M_{nx} y M_{ny} actúan respecto a ambos ejes *x* y *y* (es decir, $M_x = M_y = M_{nx} + M_{ny}$). El acero se selecciona respecto a uno de los ejes y se distribuye alrededor de la columna y la expresión de Bresler se usa para revisar la capacidad última de carga de la columna cargada excéntricamente.

---

[5]Parme, A.L., Nieves, J.M. y Gouwens, A., 1966, "Capacity of Reinforced Concrete Rectangular Columns Subject to Biaxial Bending", *Journal ACI*, 63 (11), págs. 911-923.
[6]Weber, D.C., 1966, "Ultimate Strength Design Charts for Columns with Biaxial Bending", *Journal ACI*, 63 (11), págs. 1205-1230.
[7]Row, D.G. y Paulay, T., 1973, "Biaxial Flexure and Axial Load Interaction in Short Reinforced Concrete Columns", *Bulletin of New Zealand Society for Earthquake Engineering*, 6(2), págs. 110-121.



Centro de Convenciones de Richmond, Richmond, Virginia. Observe los cambios del tamaño de columna. (Cortesía de EFCO.)

Si se emplea una sección rectangular donde el eje *y* es la dirección débil, parecería lógico calcular $M_y = M_{nx} + M_{ny}$ y usar ese momento para seleccionar el acero requerido alrededor del eje *y* y distribuir el área de acero así calculada en toda la sección transversal de la columna. Aunque este procedimiento conduce a diseños seguros, las columnas resultantes pueden ser muy poco económicas porque a menudo serán demasiado resistentes en torno al eje fuerte. Una aproximación bastante satisfactoria es calcular $M_y = M_{nx} + M_{ny}$ y multiplicarlo por b/h y con ese momento diseñar la columna en torno al eje débil.[8]

El ejemplo 10.9 ilustra el diseño de una columna cuadrada corta sometida a flexión biaxial. Se usa el método aproximado descrito en los dos últimos párrafos y la expresión de Bresler se emplea para revisar los resultados. Si ésta hubiera sido una columna larga, habría sido necesario amplificar los momentos del diseño para obtener efectos de esbeltez, independientemente del método de diseño usado.

[8]Fintel, M., ed., 1985, *Handbook of Concrete Engineering*, 2a. ed. (Nueva York: Van Nostrand), págs. 37-39.

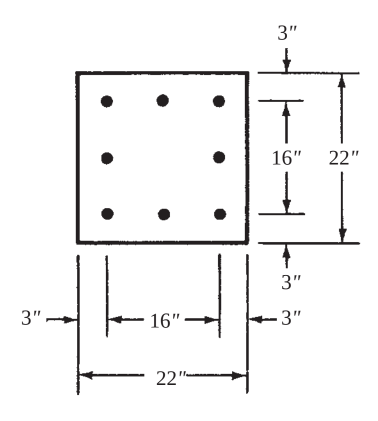


Figura 10.24

EJEMPLO 10.9

Seleccionar el refuerzo necesario para la columna corta cuadrada con estribos mostrada en la figura 10.24 para lo siguiente: $P_D = 100$ klb, $P_L = 200$ klb, $M_{DX} = 50$ pie-klb, $M_{LX} = 110$ pie-klb, $M_{DY} = 40$ pie-klb, $M_L = 90$ pie-klb, $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN **Cálculo de los valores de diseño**

$$P_u = (1.2)(100) + (1.6)(200) = 440 \text{ klb}$$

$$\frac{P_u}{f'_c A_g} = \frac{440}{(4)(484)} = 0.227$$

Suponga, $\phi = 0.65$

$$P_n = \frac{440}{0.65} = 677 \text{ klb}$$

$$M_{ux} = (1.2)(50) + (1.6)(110) = 236 \text{ pie-klb}$$

$$M_{nx} = \frac{236}{0.65} = 363 \text{ pie-klb}$$

$$M_{uy} = (1.2)(40) + (1.6)(90) = 192 \text{ pie-klb}$$

$$M_{ny} = \frac{192}{0.65} = 295 \text{ pie-klb}$$

Como resultado de la flexión biaxial, se supone que el momento de diseño respecto al eje x o al eje y es igual a $M_{nx} + M_{ny} = 363 + 295 = 658$ pie-klb.

Determinación del acero requerido

$$e_x = e_y = \frac{(12)(658)}{677} = 11.66''$$

$$\gamma = \frac{16}{22} = 0.727$$

Por interpolación de los diagramas de interacción con varillas en las cuatro caras,

$$\rho_g = 0.0235$$

$$A_s = (0.0235)(22)(22) = 11.37 \text{ plg}^2$$

Use 8 #11 = 12.50 plg^2

Una revisión de la columna con la expresión de Bresler da un valor de $P_{ni} = 804$ klb > 677 klb, lo cual es satisfactorio. Al emplear la ecuación de Bresler recuerde calcular los valores e_x y e_y *correctos* para su uso con los diagramas de interacción. Por ejemplo,

$$e_x = \frac{(12)(363)}{677} = 6.43 \text{ plg}$$

Cuando una viga está sometida a flexión biaxial, puede usarse la siguiente ecuación aproximada de interacción para propósitos de diseño:

$$\frac{M_x}{M_{ux}} + \frac{M_y}{M_{uy}} \leq 1.0$$

En esta expresión M_x y M_y son los momentos de diseño, M_{ux} es la capacidad por momento de diseño de la sección si la flexión ocurre sólo alrededor del eje x y M_{uy} es la capacidad por momento de diseño si la flexión ocurre sólo alrededor del eje y. Esta misma expresión puede usarse satisfactoriamente para miembros cargados axialmente si la carga axial de diseño es aproximadamente 15% o menor que la capacidad por carga axial de la sección. Un análisis detallado de este tema puede encontrarse en el *Handbook of Concrete Engineering*.[9]

Existen numerosos métodos para el diseño de columnas cargadas biaxialmente. Un método que es particularmente útil a los profesionales de diseño es el Método del Contorno de la Carga de la PCA, recomendado en el ACI *Design Handbook*.[10]

10.10 CONTINUACIÓN DEL ESTUDIO DEL FACTOR DE REDUCCIÓN DE CAPACIDAD, ϕ

Como se describió anteriormente, el valor de ϕ puede ser mayor que 0.65 para columnas con estribos, o 0.75 para columnas zunchadas, si ϵ_t es mayor que f_y/E_s. Los valores más bajos de ϕ son aplicables a las secciones controladas en compresión por sus ductilidades más pequeñas. Tales secciones son más sensibles a la resistencia variable del concreto que las secciones controladas en tensión. El código (9.3.2.2) establece que ϕ para una columna particular puede aumentar linealmente de 0.65 o 0.75 a 0.90 a medida que se incrementa la deformación unitaria ϵ_t a tensión desde la deformación unitaria controlada en compresión f_y/E_s a aquella controlada en tensión de 0.005.

Para este análisis, se repite la figura 3.5 con una ligera modificación como la figura 10.25. En esta figura usted puede ver que el rango de valores de ϵ_t para los cuales ϕ puede aumentar.

El cálculo manual de ϵ_t para una columna particular es un problema largo y tedioso de prueba y error y no se ocupa un espacio aquí para presentar un ejemplo numérico. Sin embargo, se presenta una descripción del procedimiento en los siguientes párrafos. El proyectista común no querrá gastar el tiempo necesario para hacer estos cálculos y ya sea que usará simplemente los valores más pequeños de ϕ o hará uso de un programa de computadora tal como la hoja de cálculo Excel suministrada para este capítulo. Este programa usa una rutina para calcular ϵ_t y ϕ para columnas.

El procedimiento descrito aquí se puede usar para hacer una determinación más detallada de ϵ_t. Para empezar suponemos $c/d_t = 0.60$, en donde $\epsilon_t = 0.002$ (deformación unitaria a la fluencia supuesta para el refuerzo de Grado 60), como se muestra en la figura 10.25. Con este valor podemos calcular c, a, ϵ_c, ϵ_t, f_s y f'_c para nuestra columna. Luego, con referencia a la figura 10.26, pueden tomarse momentos alrededor del eje central de la columna y despejarse el valor de M_n para luego determinar e.

$$M_n = T_s\left(\frac{d_t - d'}{2}\right) + C_s\left(\frac{d_t - d'}{2}\right) + C_c\left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2}\right)$$

[9]Fintel, M., *Handbook of Concrete Engineering*, pág. 38.
[10]American Concrete Institute, 1997, *Design Handbook in Accordance with the Strength Design Method*, Vol. 2, *Columns*, publicación SP-17(97), ACI, Farmington Hills, MI.

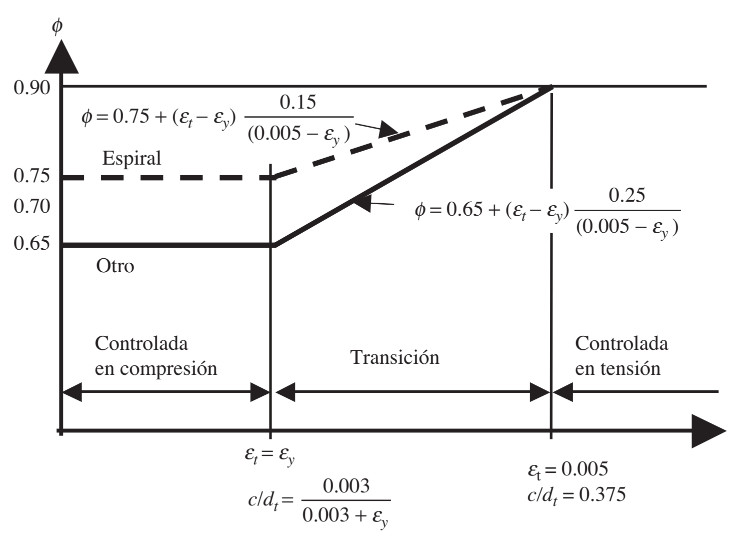


Figura 10.25 Variación de ϕ con ϵ_t neto en tensión y c/d_t.

Como siguiente paso, c/d_t puede suponerse igual a 0.375 (donde $\epsilon_t = 0.005$ como se muestra en la figura 10.25) y se determina otro valor de ϵ_t. Si el ϵ_t de nuestra columna está situado entre los dos valores de ϵ_t que recién hemos calculado, la columna está situada en la zona de transición para ϕ. Para determinar su valor podemos probar con diferentes valores de c/d_t entre 0.600 y 0.375 hasta que el ϵ_t calculado sea igual al ϵ_t real de la columna.

Si usted experimenta este proceso una vez, probablemente habrá visto todo lo que quiere ver de ello y sin duda dará la bienvenida al hecho de que puede usarse la hoja de cálculo de Excel provista para este libro de texto para determinar el valor de ϕ para una columna particular.

Al usar los diagramas de interacción en el apéndice, es fácil ver la región donde tiene aplicación el factor variable ϕ. En la figura 10.15 observe que hay líneas rotuladas como f_s/f_y. Si las coordenadas de K_n y R_n son mayores que el valor de $f_s/f_y = 1$, el factor ϕ es 0.65 (0.75 para columnas zunchadas). Si las coordenadas están debajo de la línea rotulada como $\epsilon_t = 0.005$, el factor ϕ es 0.90. Entre estas líneas, el factor ϕ es variable y usted tendría que recurrir a los métodos aproximados o a la hoja de cálculo provista.

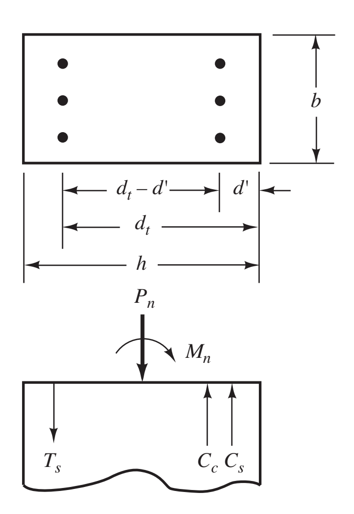


Figura 10.26

10.11 EJEMPLO CON COMPUTADORA

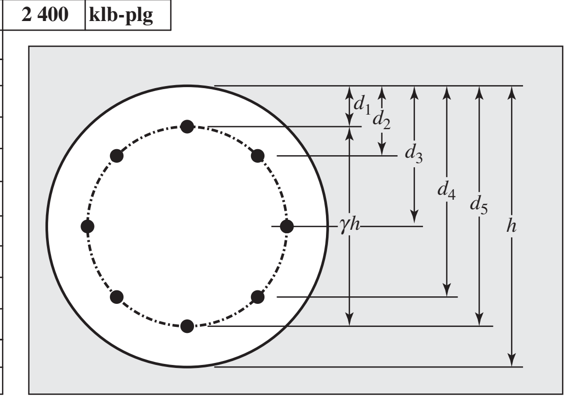
EJEMPLO 10.10

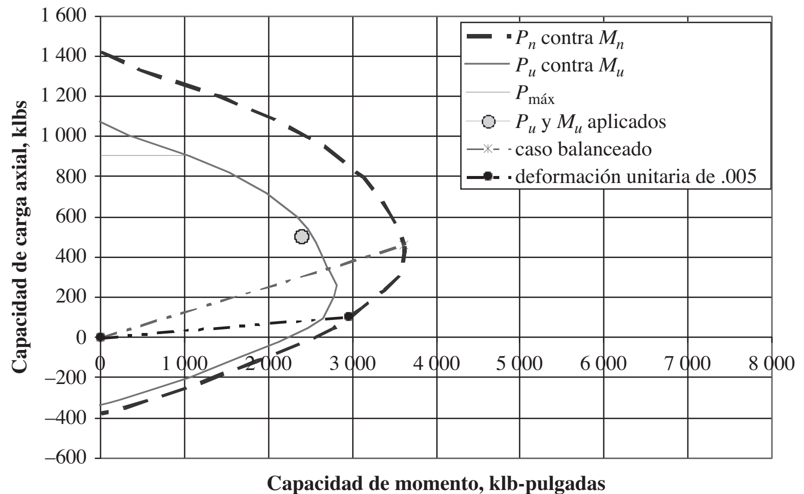
Usando la hoja de cálculo de Excel proporcionada, trazar el diagrama de interacción para la columna obtenida en el ejemplo 10.5.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo Excel llamada capítulos 9 y 10. Abra la hoja de trabajo titulada Columna Circular. En las celdas sombreadas con amarillo ingrese los valores requeridos. Usted no tiene que ingresar valores para P_u y M_u, pero es útil ver cómo las cargas aplicadas se comparan con el diagrama de interacción. Luego abra la hoja de trabajo llamada Diagrama de Interacción: circular. El diagrama muestra que la carga aplicada (un solo punto) está dentro del diagrama P_u *vs.* M_u (línea curvada más pequeña), por tanto la sección transversal de la columna es suficiente si es una columna corta.

Capacidad de una columna circular

$P_u =$	500	klb		
$M_u =$	200	pie-klb =	2 400	klb-plg
$h =$	20	in.		
$\gamma =$	0.75			
$f'_c =$	4 000	lb/plg^2		
$f_y =$	6 0000	lb/plg^2		
$A_{st} =$	6.28	plg^2		
$A_g =$	314.2	plg^2		
$\rho_t =$	0.0200			
$\beta_1 =$	0.85			
$\varepsilon_y =$	0.00207			
$E_s =$	29 000	lb/plg^2		
$c_{bal} =$	10.36	plg		
$c_{.005} =$	6.5625	plg		



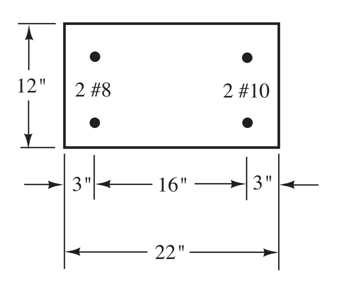


PROBLEMAS

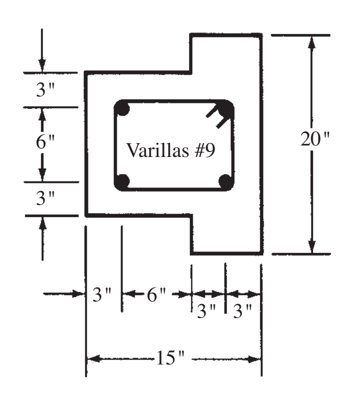
Localización de centroides plásticos

En los problemas 10.1 y 10.2 localice los centroides plásticos si $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.

Problema 10.1 (*Resp.* 11.38 plg desde el borde izquierdo.)

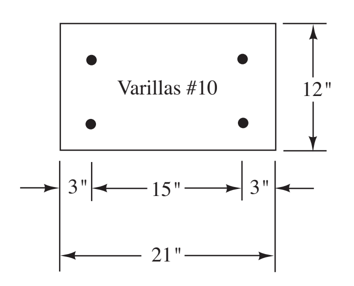


Problema 10.2



Análisis de columnas sujetas a momento y carga axial

10.3 Usando las ecuaciones de la estática, determine los valores de P_n y M_n para la columna mostrada, suponiendo que tiene una deformación unitaria de -0.00300 en el borde derecho y una deformación unitaria de $+0.00200$ en el borde izquierdo. $f'_c = 4$ 000 lb/plg^2, $f_y = 60\,000$ lb/plg^2. (*Resp.* $P_n = 485.8$ klb, $M_n = 335.9$ pie-klb.)



10.4 Repita el problema 10.3 si la deformación unitaria en el borde izquierdo es de +0.001.

10.5 Repita el problema 10.3 si la deformación unitaria en el borde izquierdo es de 0.000. (*Resp.* $P_n = 902.9$ klb, $M_n = 165.4$ pie-klb.)

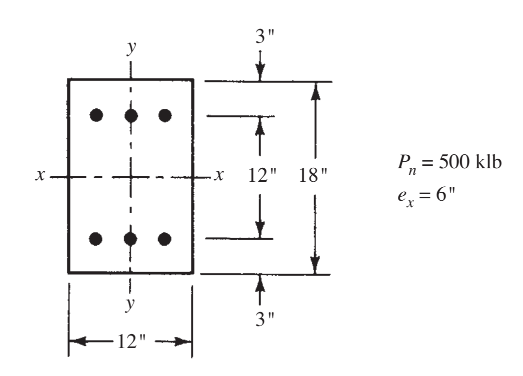
10.6 Repita el problema 10.3 si la deformación unitaria en el borde izquierdo es -0.001.

10.7 Repita el problema 10.3 si el acero en el lado izquierdo tiene una deformación unitaria a tensión de $\epsilon_y = f_y/E_s$ y el borde derecho está a 0.003. (*Resp.* $P_n = 360.8$ klb, $M_n = 368.3$ pie-klb.)

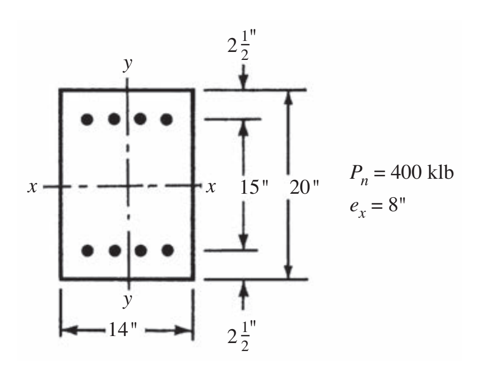
Diseño de columnas por carga axial y momento

En los problemas 10.8 a 10.10 use las curvas de interacción del apéndice A para seleccionar el refuerzo de las columnas cortas mostradas, con $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.

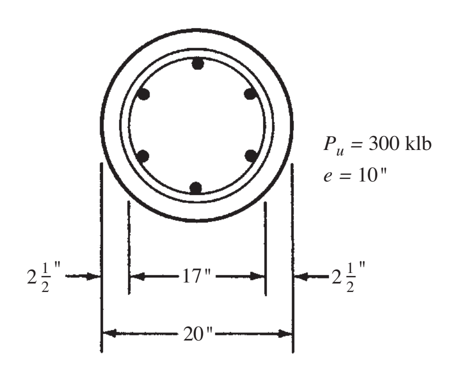
Problema 10.8



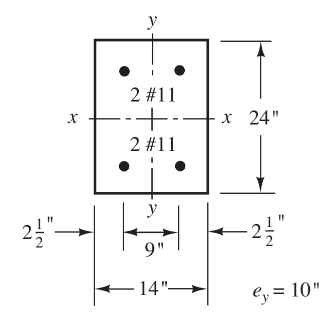
Problema 10.9 (*Una respuesta* 8 varillas #9.)



Problema 10.10

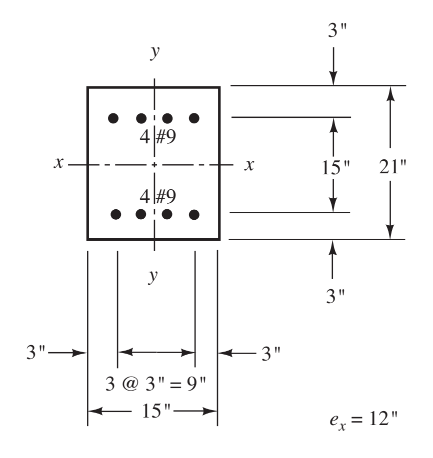


Problema 10.14

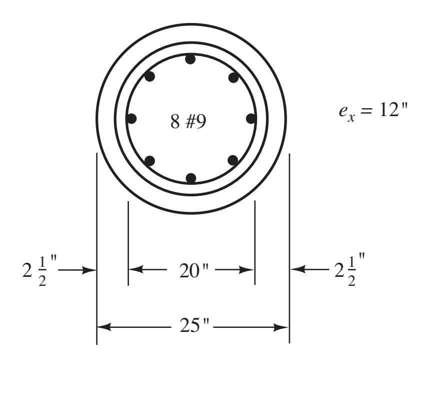


Para los problemas 10.11 a 10.16 use los diagramas de interacción del apéndice A para determinar valores de ϕP_n para las columnas cortas mostradas que tienen flexión alrededor de un eje. f_y = 60 000 lb/plg^2 y f'_c = 4 000 lb/plg^2.

Problema 10.11 (*Resp.* 328 klb.)

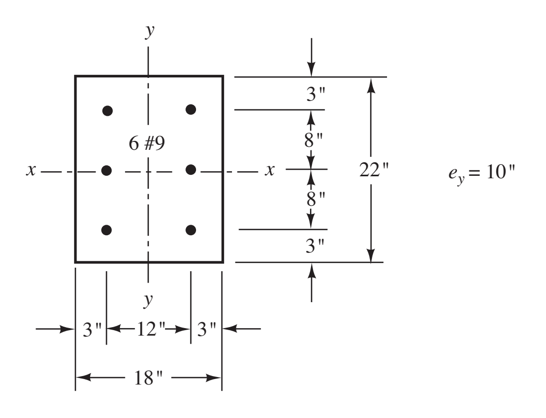


Problema 10.15 (*Resp.* 412 klb.)

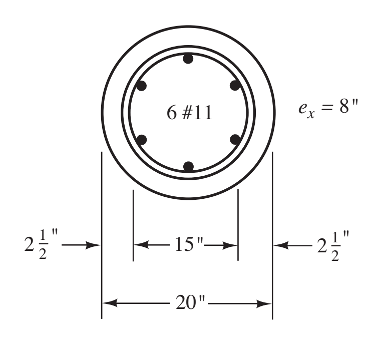


10.12 Repita el problema 10.11 si e_x = 9 plg.

Problema 10.13 (*Resp.* 199 klb.)

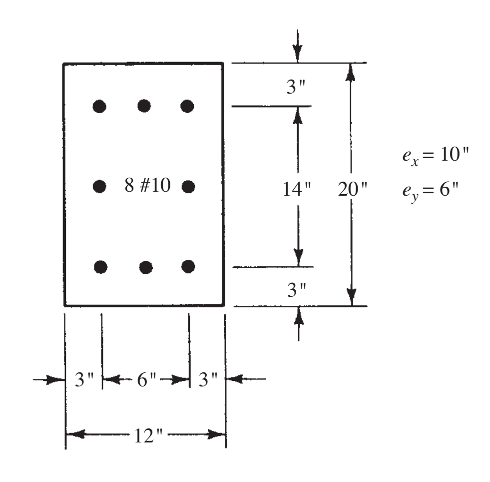


Problema 10.16

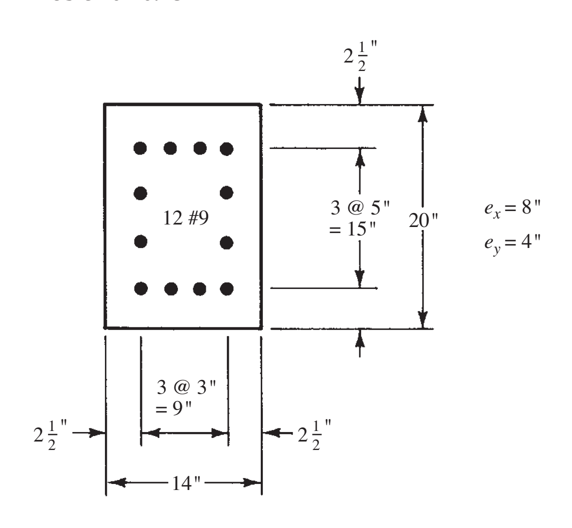


En los problemas 10.17 a 10.21, determine los valores de ϕP_n para las columnas cortas mostradas si $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2.

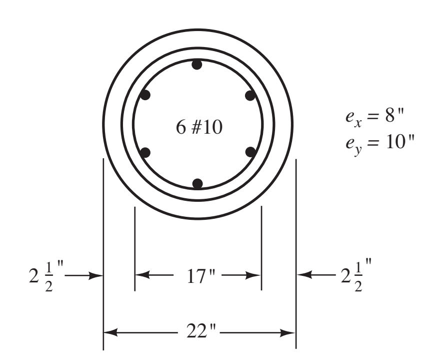
Problema 10.17 (*Resp.* 146 klb.)



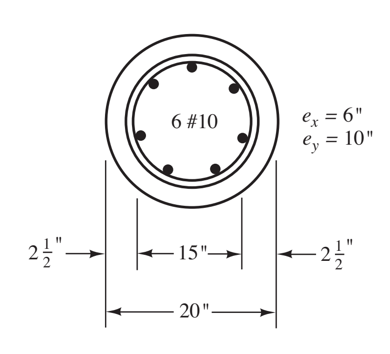
Problema 10.18



Problema 10.19 (*Resp.* 279 klb.)



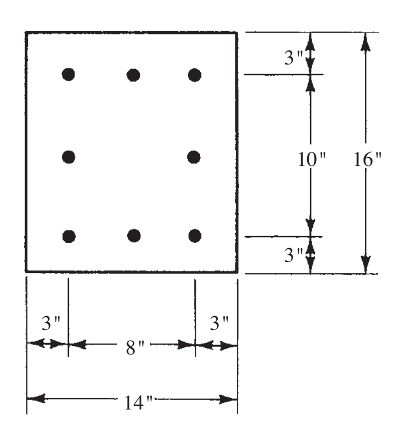
Problema 10.20



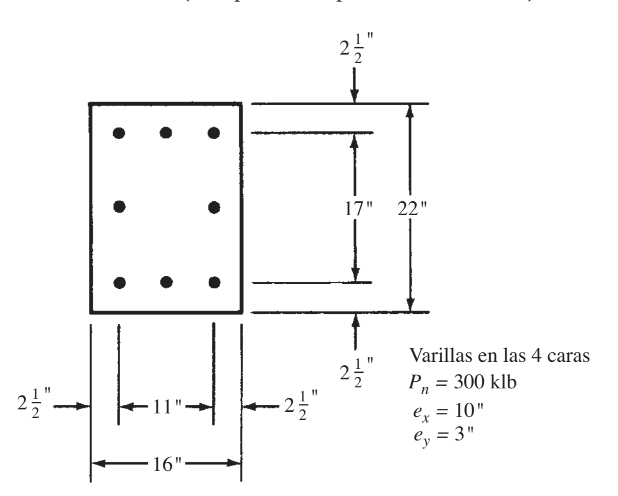
10.21 Repita el problema 10.20 si $e_x = 8''$ y $e_y = 6''$ (*Resp.* 287 klb.)

En los problemas 10.22 y 10.23 seleccione el refuerzo para las columnas cortas mostradas si $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2. Revise los resultados con la ecuación de Bresler.

Problema 10.22



Problema 10.23 (*Una posible respuesta* 8 varillas #7.)



Para los problemas 10.24 a 10.27 use la hoja de cálculo Excel para los capítulos 9 y 10.

10.24 Si la columna del problema 10.8 soporta una carga P_u = 250 klb y $e_x = 0$, ¿qué tan grande puede ser M_{ux}?

10.25 Si la columna del problema 10.13 soporta una carga P_u = 400 klb y $e_x = 0$, ¿Qué valor puede tener M_{uy} si se usan seis varillas del #9? (*Resp.* 264 pie-klb.)

10.26 Si la columna de problema 10.15 debe soportar una carga axial P_u = 400 klb y $e_x = 0$, ¿cuántas varillas del #10 se deben usar para resistir un momento de diseño M_{ux} = 300 pie-klb?

10.27 Si la columna en el problema 10.11 tiene un momento M_{ux} = 300 pie-klb, ¿cuáles son los límites para P_u? (*Resp.* 420 klb $\geq P_u \geq$ 20 klb.)

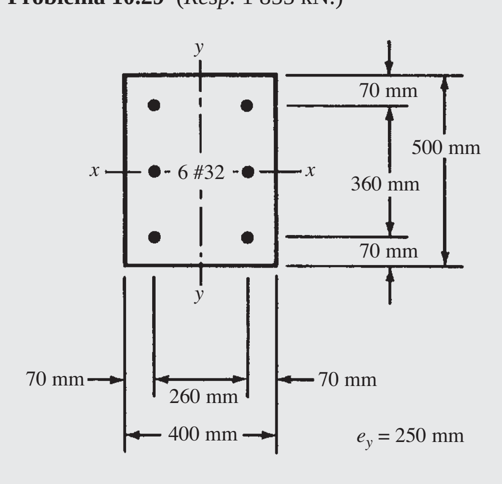
10.28 Prepare un diagrama de flujo para la elaboración de una curva de interacción para cargas axiales de compresión y flexión para una columna corta rectangular con estribos.

Problemas con unidades del SI

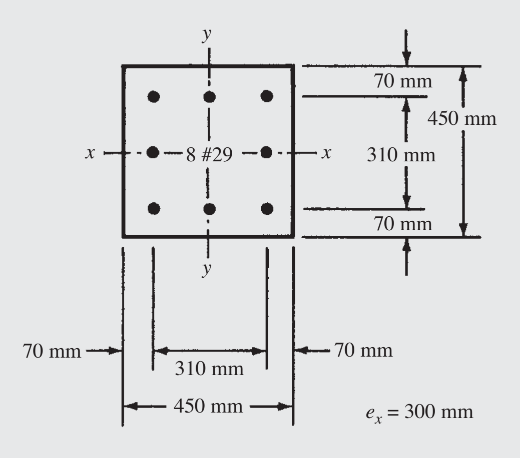
En este texto, no son proveen curvas de interacción para columnas para las resistencias SI usuales del concreto (21 MPa, 24 MPa, 28 MPa, etc.) o para la resistencia usual de fluencia del acero (420 MPa). Por tanto, los siguientes problemas deben resolverse usando las curvas de columnas para f'_c = 4 000 lb/plg^2 y f_y = 60 000 lb/plg^2. Estos diagramas pueden aplicarse para las correspondientes unidades del SI (27.6 MPa y 413.7 MPa), tal como se hace para las unidades acostumbradas en Estados Unidos, pero es necesario convertir los resultados a valores del SI.

En los problemas 10.29 al 10.31 use Los diagramas de interacción de columnas en el apéndice para determinar los valores de P_n *en* las columnas cortas mostradas si f'_c = 28 MPa y f_y = 420 MPa.

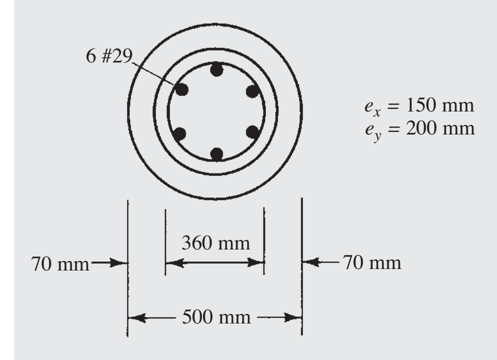
Problema 10.29 (*Resp.* 1 855 kN.)



Problema 10.30

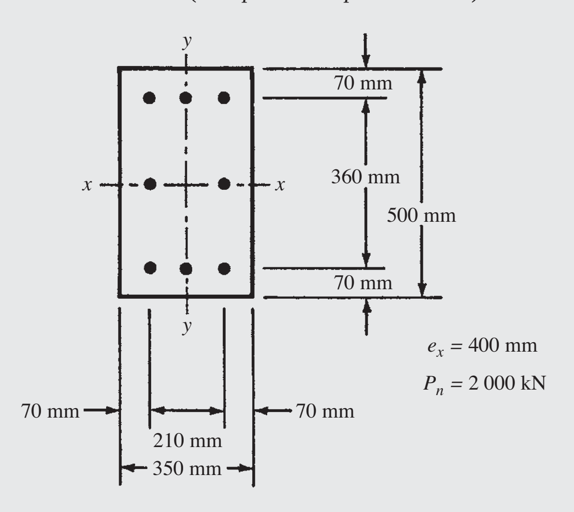


Problema 10.31 (*Resp.* $P_u = 1\ 146$ kN.)

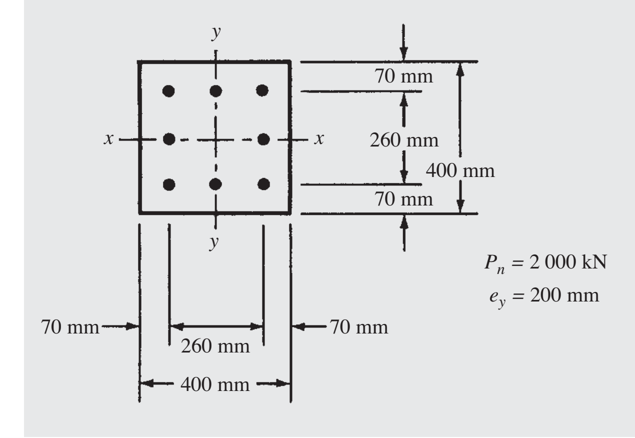


En los problemas 10.32 a 10.34 seleccione el refuerzo para las columnas cortas mostradas si $f'_c = 27.6$ MPa y $f_y = 413.7$ MPa. Recuerde aplicar el factor de conversión previsto antes del problema 10.28 al usar las curvas de interacción.

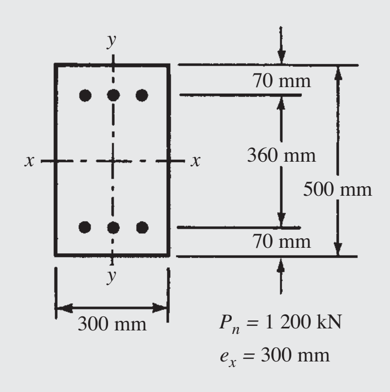
Problema 10.33 (*Una posible respuesta* 6 #36.)



Problema 10.32



Problema 10.34



11

Columnas esbeltas

11.1 INTRODUCCIÓN

Cuando una columna se flexiona o deflexiona lateralmente una cantidad Δ, su carga axial genera un momento adicional en la columna igual a $P\Delta$. Este momento se superpone a cualquier momento que exista ya en la columna. Si este momento $P\Delta$ es de tal magnitud que reduce considerablemente la capacidad por carga axial de la columna, ésta se denomina *columna esbelta*.

La sección 10.10.2 del código establece que el diseño deseable de un miembro a compresión debe basarse en un análisis teórico de la estructura que tome en cuenta los efectos de las cargas axiales, los momentos, las deflexiones, la duración de las cargas, las dimensiones variables de los miembros, las condiciones en los extremos, etc. Si no se usa tal procedimiento teórico, el código (10.10.5) provee un método aproximado para determinar los efectos de esbeltez. Este método, que se basa en los factores antes mencionados para realizar un análisis "exacto", supone un amplificador de momento δ, que debe multiplicarse por el mayor momento en el extremo de la columna denotado como M_2 y ese valor debe usarse en el diseño. Si ocurre flexión en ambos ejes, δ debe calcularse separadamente para cada dirección y los valores obtenidos deben multiplicarse por los valores de los momentos respectivos.

11.2 MARCOS CON Y SIN DESPLAZAMIENTO LATERAL

Para este análisis es necesario distinguir entre los marcos sin desplazamiento lateral y los marcos con desplazamiento lateral. En el código ACI estos marcos son denominados respectivamente como *marcos con impedimento para desplazarse* y *marcos sin impedimento.*

Para el piso del edificio en consideración, las columnas de marcos sin desplazamiento lateral deben diseñarse según la sección 10.10.6 del código, mientras que las columnas de marcos con desplazamiento lateral deben diseñarse según la sección 10.10.7. Como consecuencia, primero es necesario decidir si tenemos un marco con o sin desplazamiento lateral. *Debemos entender que rara vez encontraremos un marco que esté completamente riostrado contra desplazamientos laterales o uno que esté completamente desprovisto de riostras contra el desplazamiento lateral. Por consiguiente, hay que decidir cómo manejar el asunto.*

El asunto posiblemente pueda resolverse examinando la rigidez lateral de los elementos de apuntalamiento para el piso en consideración. Se puede observar que una columna en particular se encuentra en un piso donde existe demasiada rigidez lateral provista por los miembros de apuntalamiento, los muros de cortante, las armaduras de cortante, etc., que cualquier deflexión lateral que ocurra será demasiado pequeña para afectar en forma apreciable la resistencia de la columna. Al examinar una estructura particular, es necesario darse cuenta de que puede haber algunos pisos sin desplazamiento lateral y otros pisos con desplazamiento lateral.

Si no podemos decir mediante una inspección si se trata de un marco sin desplazamiento lateral o de uno con desplazamiento lateral, el código proporciona dos formas de hacerlo. Primero, en la sección 10.10.5.1 del ACI, se dice que el piso de un marco se considera sin desplazamiento lateral si el incremento en los momentos de extremo en las columnas debido a los efectos de segundo orden, equivale a 5% o menos de los momentos de extremo de primer orden.

El segundo método presentado por el código para determinar si un marco en particular es riostrado o no riostrado está dado en el código (10.10.5.2). Si el valor del así llamado *índice de estabilidad* que sigue es ≤ 0.05, el comentario establece que el marco se puede clasificar como un marco sin desplazamiento lateral. (Si V_u es igual a cero, este método no es aplicable.)

$$Q = \frac{\Sigma P_u \Delta_o}{V_u \ell_c} \qquad \text{(Ecuación 10-10, ACI)}$$

En donde

ΣP_u = carga vertical total factorizada para todas las columnas en el piso considerado.

Δ_o = deflexión lateral de primer orden determinada elásticamente debido a V_u en la parte superior del piso en cuestión con respecto a la parte inferior de ese mismo piso.

V_u = fuerza cortante horizontal total factorizada del piso considerado.

ℓ_c = altura de un miembro a compresión en un marco medida de centro a centro de los nudos del marco.

A pesar de estas sugerencias del ACI, el proyectista tendrá que tomar decisiones sobre lo que es un apuntalamiento adecuado y el que no lo es, basándose en la presencia de muros estructurales y de otros elementos de apuntalamiento. En un edificio de concreto reforzado de tamaño promedio, las excentricidades de carga y los valores de esbeltez son pequeños y se considera que los marcos están riostrados. *Sin embargo, que ciertamente en los casos dudosos es preferible optar por la seguridad y considerar que los marcos no están riostrados.*

11.3 EFECTOS DE ESBELTEZ

La esbeltez de las columnas se basa en su geometría y en su arriostramiento lateral. Conforme crece su esbeltez, sus esfuerzos de flexión también aumentan, por lo que puede ocurrir el pandeo. Las columnas de concreto reforzado generalmente tienen pequeñas relaciones de esbeltez. Como consecuencia, usualmente pueden diseñarse como columnas cortas sin reducciones de resistencia por efectos de esbeltez. Si los efectos de esbeltez se consideran pequeños, entonces las columnas pueden considerarse "cortas", y pueden diseñarse de acuerdo con el capítulo 10. Sin embargo, si son "esbeltas", el momento para el cual la columna debe diseñarse se incrementa o se amplifica. Una vez que el momento ha sido amplificado, la columna se diseña entonces de acuerdo con el capítulo 10 usando el momento incrementado.

En los siguientes párrafos se analizan diversos aspectos implicados en el cálculo de las relaciones de esbeltez. Éstos incluyen: longitudes no soportadas de columnas, factores de longitud efectiva, radios de giro y los requisitos del código ACI. El código ACI (10.10.2.1) limita los efectos de segundo orden a no más de 40% de los efectos de primer orden.

Longitudes no soportadas

La longitud ℓ_u usada para calcular la relación de esbeltez de una columna es su longitud sin apoyo. Esta longitud se considera igual a la distancia libre entre las losas, las vigas o los otros miembros que proporcionan soporte lateral a la columna. Si la misma tiene capiteles o cartelas (véase la figura 16.1), la distancia libre se mide desde el fondo de los capiteles o de las cartelas.

Factores de longitud efectiva

Para calcular la relación de esbeltez de una columna en particular, es necesario estimar su longitud efectiva. Ésta es la distancia entre los puntos de momento nulo en la columna. En este análisis inicial



Columnas redondas. (Digital Vision.)

se supone que no es posible ni el desplazamiento lateral ni la traslación de los nudos. Desplazamiento lateral o traslación de nudo quiere decir que uno o ambos extremos de una columna pueden moverse lateralmente uno con respecto a otro.

Si existiese una columna con extremos perfectamente articulados, su longitud efectiva sería su longitud no soportada, como se muestra en la figura 11.1(*a*). El *factor k de longitud efectiva* es el número por el que debe multiplicarse la longitud no soportada de la columna para obtener su longitud efectiva. Para una columna con extremos perfectamente articulados, $k = 1.0$.

Las columnas con condiciones diferentes de extremo tienen longitudes efectivas completamente diferentes. Por ejemplo, en una columna con extremos perfectamente empotrados, sus puntos de inflexión (o los puntos con momento nulo) se presentan en los puntos de los cuartos de su altura y su longitud efectiva es $\ell_u/2$, como se muestra en la figura 11.1(*b*). Como consecuencia, el valor de *k* sería igual a 0.5.

Obviamente, cuanto menor sea la longitud efectiva de una columna en particular, menor será el peligro de pandeo y mayor su capacidad de carga. La figura 11.1(*c*) muestra una columna con un extremo empotrado y otro articulado. El factor *k* para esta columna es aproximadamente igual a 0.70.

El concepto de longitudes efectivas es simplemente un método matemático de tomar una columna —sea cual sea la condición en sus extremos y sujeción lateral— y remplazarla por otra columna equivalente, articulada y riostrada. Podría hacerse un complejo análisis de pandeo en un marco para determinar el esfuerzo crítico en una columna en particular. El factor *k* se determina al delimitar una columna con extremos articulados con una longitud equivalente que proporcione el mismo esfuerzo crítico. El procedimiento del factor *k* es un método para lograr soluciones sencillas en problemas complicados de pandeo en marcos.

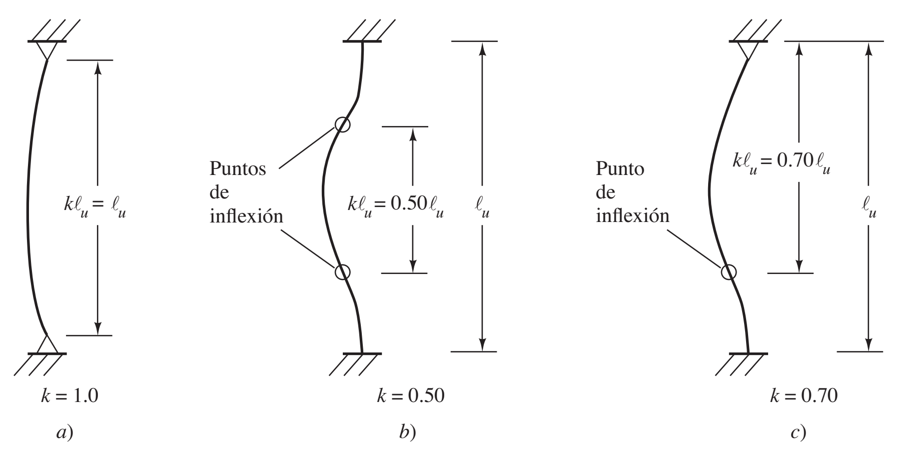
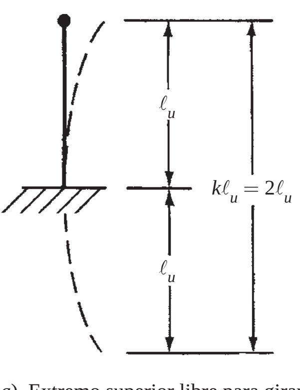


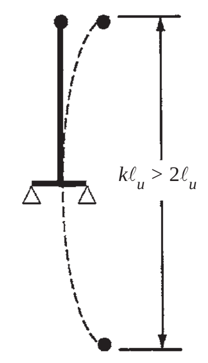
Figura 11.1 Longitudes efectivas para columnas en marcos riostrados (desplazamiento lateral impedido).

Las columnas de concreto reforzado sirven como partes de marcos y estos marcos algunas veces son *riostrados* y otras veces son *no riostrados.* Un marco riostrado es uno en el cual el desplazamiento lateral o la traslación de nudos están impedidos por medio de riostras, los muros de cortante, o el soporte lateral de las estructuras adyacentes. Un marco no riostrado no tiene ninguno de estos tipos de arriostramiento y debe depender de la rigidez de sus propios miembros para impedir el pandeo lateral. Los valores de k para marcos riostrados nunca pueden ser mayores que 1.0, pero en marcos no riostrados los valores de k siempre son mayores que 1.0 debido al desplazamiento lateral.

En la figura 11.2(*a*) se muestra un ejemplo de una columna no riostrada. La base de esta columna se supone empotrada, mientras que su extremo superior se supone completamente libre para girar y desplazarse. La curva elástica de tal columna tomará la forma de la curva elástica de una columna con extremos articulados y de doble longitud. Su longitud efectiva por consiguiente será igual a $2\ell_u$, como se muestra en la figura. En la figura 11.2(*b*) se muestra el caso de otra columna no riostrada. La base de esta columna está conectada a vigas que proveen resistencia a la rotación, pero no lo suficiente como para ser considerado un empotramiento. En la mayoría de los edificios es común una restricción a la rotación parcial,



a) Extremo superior libre para girar y desplazarse, extremo inferior empotrado



b) Extremo superior libre para girar y desplazarse, extremo inferior parcialmente restringido contra la rotación

Figura 11.2 Columnas para marcos no riostrados.

no extremos con pasadores o empotrados. La sección 11.4 muestra cómo evaluar tal restricción parcial. Para el caso mostrado en la figura 11.2(*b*), si la viga en la base es flexible comparada con la columna, el factor *k* tiende al infinito. Si es muy rígida, *k* tiende a 2.

El código (10.10.6.3) establece que el factor de longitud efectiva debe tomarse igual a 1.0 para los miembros a compresión de marcos riostrados, a menos que un análisis teórico justifique que puede usarse un valor menor. Si el miembro no está en un marco riostrado contra el desplazamiento lateral, el valor de *k* será mayor que 1.0 y deberá ser determinado considerando los efectos del agrietamiento y del refuerzo en la rigidez de la columna. El comité ACI-ASCE 441 sugiere que no es realista dar por supuesto que *k* será menor que 1.2 para tales columnas; y por ello parece lógico hacer diseños preliminares con *k* igual a o mayor que ese valor.

11.4 DETERMINACIÓN DE LOS FACTORES *k* CON NOMOGRAMAS

El procedimiento preliminar que se usa para estimar las longitudes efectivas involucra el uso de los nomogramas mostrados en la figura 11.3.[1,2] Antes del análisis con computadora, el uso de los nomogramas fue el método tradicional para determinar longitudes efectivas de columnas. El nomograma de la parte (*a*) de la figura es aplicable a marcos riostrados, mientras que el de la parte (*b*) es aplicable a marcos no riostrados.

Para usar los nomogramas para una columna particular, se calculan los factores ψ en cada extremo de la columna. El factor ψ en un extremo de la columna es igual a la suma de las rigideces $[\Sigma(EI/\ell)]$ de las columnas que concurren en ese nudo, incluyendo la columna en consideración, dividida entre la suma de todas las rigideces de las vigas que concurren en el nudo. Si un extremo de la columna está articulado, ψ es teóricamente igual a ∞ y si está empotrado, $\psi = 0$. Como es prácticamente imposible lograr un empotramiento perfecto, ψ usualmente se toma igual a 1.0 en vez de 0 para los empotramientos supuestos. Cuando el extremo de la columna está soportado por una zapata pero no está rígidamente conectado a ella, ψ es teóricamente infinito, pero usualmente se toma igual a 10 en los diseños prácticos.

Uno de los dos valores ψ se denomina ψ_A y el otro ψ_B. Después de calcular estos valores, se obtiene el factor *k* de longitud efectiva trazando una línea recta entre ψ_A y ψ_B. El punto de intersección de esta recta con el eje medio del nomograma nos da el valor de *k*.

Puede verse que los factores ψ usados para entrar a los nomogramas y por tanto los factores de longitud efectiva, dependen de las rigideces relativas de los miembros a compresión y a flexión. Si tenemos una columna muy ligera y flexible y trabes muy rígidas, la rotación y el movimiento lateral de los extremos de la columna se aminorarán considerablemente. Los extremos de la columna tendrán una condición cercana a la de empotramiento, por lo que los valores ψ y los valores *k* resultantes serán pequeños. Obviamente, si el inverso ocurre, es decir, columnas muy rígidas con trabes flexibles, los extremos de las columnas girarán casi libremente, acercándose a la condición de una articulación. Consecuentemente, tendremos valores grandes de ψ y *k*.

Para calcular los valores ψ es necesario usar valores realistas para los momentos de inercia. Las trabes suelen estar bastante agrietadas en sus lados de tensión, en tanto que las columnas probablemente tienen sólo unas cuantas grietas. Si los valores de *I* para las trabes se subestiman un poco, los factores *k* de la columna serán un poco mayores, quedando así del lado de la seguridad.

---

[1]Structural Stability Research Council, *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, 4a. ed., T.V. Galambos, Ed. (Nueva York: Wiley, 1988).

[2]Julian, O.G., y Lawrence, L.S., 1959, “Notes on J and L Nomograms for Determination of Effective Lengths”, sin publicar. Estos nomogramas también se llaman Nomogramas Jackson y Moreland, por la empresa con la que estaban asociados Julian y Lawrence.

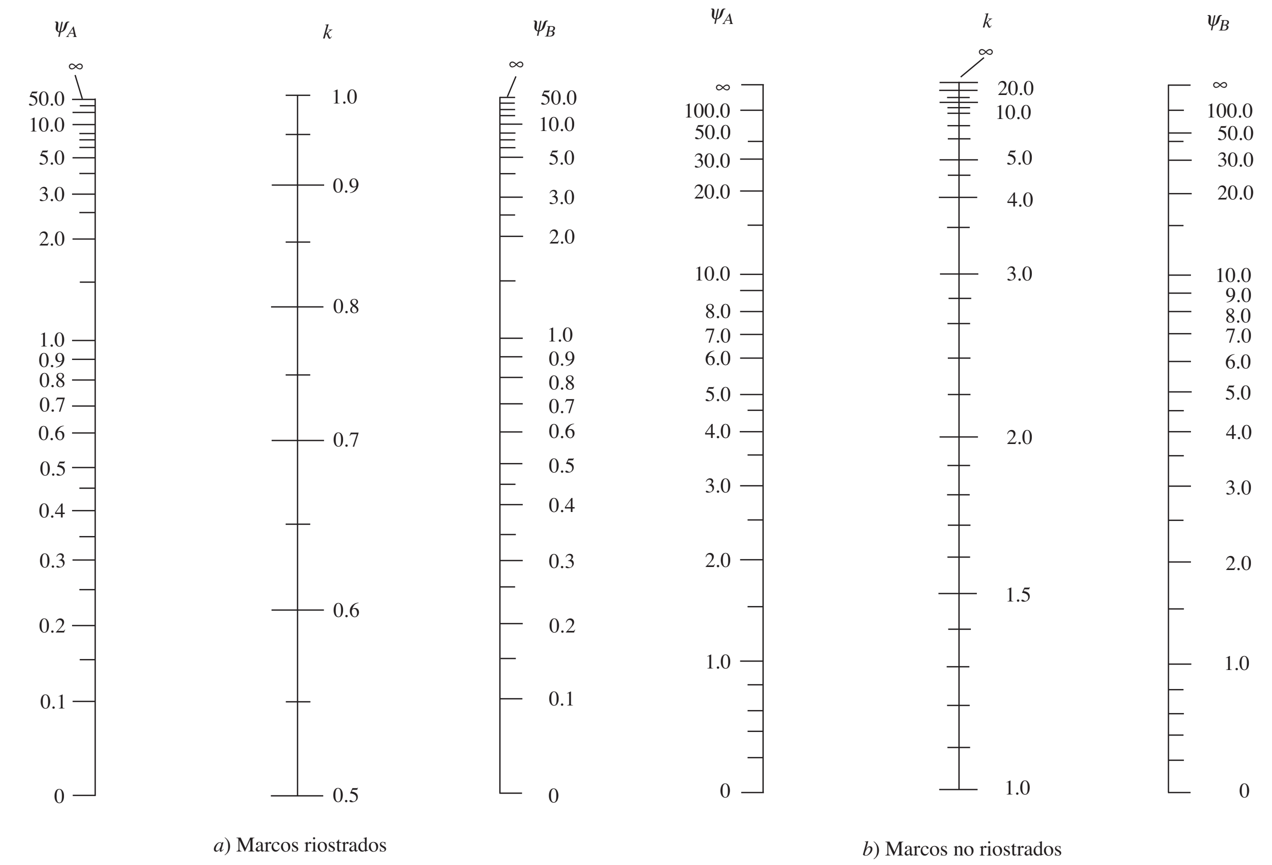


Figura 11.3 Factores de longitud efectiva. $\psi =$ razón de $\Sigma(EI/\ell)$ de los miembros a compresión a $\Sigma(EI/\ell)$ de los miembros a flexión en un plano en un extremo de un miembro a compresión. $k =$ factor de longitud efectiva.

Varias reglas se usan para estimar aproximadamente las rigideces de vigas y columnas. Una práctica común del pasado para relaciones de esbeltez del orden de hasta aproximadamente 60 o 70, era usar momentos de inercia totales para las columnas y 50% de los momentos de inercia totales para las vigas.

En la sección 10.10.4.1 del ACI, se establece que para determinar valores ψ que han de usarse en la evaluación de los factores *k*, la rigidez de las vigas se puede calcular con base en $0.35I_g$ para tomar en cuenta el agrietamiento y el refuerzo, mientras que $0.70I_g$ puede usarse para miembros a compresión. Esta práctica se sigue para los ejemplos en este capítulo. En la misma sección se proporcionan otros valores para la rigidez estimada de muros y placas planas.

11.5 DETERMINACIÓN DE FACTORES *k* MEDIANTE ECUACIONES

En lugar de usar nomogramas para determinar los valores de *k*, existe un método alterno que consiste en el uso de ecuaciones relativamente simples. Estas ecuaciones, que estaban en el comentario (R10.12.1) del código ACI 318-05 y que se tomaron del British Standard Code of Practice,[3] son particularmente útiles con programas de computadora.

Para miembros a compresión riostrados, un límite superior para el factor de longitud efectiva puede tomarse como el menor valor determinado de las dos ecuaciones siguientes en donde ψ_A y ψ_B son los valores descritos anteriormente para los nomogramas (comúnmente llamados nomogramas de Jackson y Moreland, como se describe en la nota 2 del pie de página de este capítulo). $\psi_{\text{mín}}$ es el menor de ψ_A y ψ_B.

$$k = 0.7 + 0.05(\psi_A + \psi_B) \leq 1.0$$

$$k = 0.85 + 0.05\psi_{\text{mín}} \leq 1.0$$

El valor de *k* para los miembros a compresión no riostrados y restringidos en ambos extremos puede determinarse con el valor apropiado dado por las siguientes dos ecuaciones, en donde ψ_m es el promedio de ψ_A y ψ_B:

Si $\psi_m < 2$

$$k = \frac{20 - \psi_m}{20}\sqrt{1 + \psi_m}$$

Si $\psi_m \geq 2$

$$k = 0.9\sqrt{1 + \psi_m}$$

El valor del factor de longitud efectiva para los miembros a compresión no riostrados que están articulados en un extremo, se puede determinar con la siguiente expresión, en donde ψ es el valor en el extremo restringido:

$$k = 2.0 + 0.3\psi$$

Como se mencionó anteriormente en la sección 11.3 de este capítulo, el código ACI en su sección 10.10.6.3 establece que *k* debe tomarse igual a 1.0 para miembros a compresión en marcos apuntalados contra desplazamientos laterales, a menos que un análisis teórico muestre que puede usarse un valor más pequeño. *En el último párrafo de la sección R10.10.6.3 del comentario, se dice que el uso de los nomogramas o de las ecuaciones recién presentadas, es satisfactorio para justificar valores de k menores que 1.0 en marcos riostrados.*

[3]*Code of Practice for the Structural Use of Concrete* (CP110: Part 1), British Standards Institution, Londres, 1972, 154 págs.



Columnas de concreto reforzado. (Cortesía de RSM Advertising, representando a Molded Fiber Glass Products Company.)

11.6 ANÁLISIS DE PRIMER ORDEN USANDO PROPIEDADES ESPECIALES DE LOS MIEMBROS

Después de esta sección, el resto de este capítulo está dedicado a un procedimiento aproximado de diseño en donde el efecto de la esbeltez se toma en consideración, calculando los amplificadores de momento que son multiplicados por los momentos de las columnas. Un amplificador para una columna en particular es una función de su carga axial factorizada P_u y de su carga de pandeo crítica P_c.

Antes de poder calcular los amplificadores de momento para una estructura en particular, es necesario hacer un análisis de primer orden de la estructura. Las propiedades de la sección del miembro usadas para tal análisis deben tener en cuenta la influencia de las cargas axiales, la presencia de regiones agrietadas en los miembros y el efecto de la duración de las cargas. En lugar de hacer tal análisis, la sección 10.10.4.1 del código ACI permite el uso de las siguientes propiedades para los miembros de la estructura. Estas propiedades se pueden usar para marcos con o sin desplazamiento lateral.

a) *Módulo de elasticidad*, determinado con la siguiente expresión dada en la sección 8.5.1 del código:
$E_c = w_c^{1.5} 33\sqrt{f'_c}$ para valores de w_c entre 90 y 155 lb/pie^3 o 57 000 $\sqrt{f'_c}$ para concreto de peso normal.

b) *Momentos de inercia*, donde I_g = momento de inercia de la sección total de concreto respecto al eje centroidal despreciando el refuerzo (sección 10.10.4.1 del ACI):

Vigas	$0.35I_g$
Columnas	$0.70I_g$
Muros no agrietados	$0.70I_g$
Muros agrietados	$0.35I_g$
Placas planas y losas planas	$0.25I_g$

c) *Área* $1.0A_g$

Como una alternativa para las ecuaciones aproximadas anteriormente citadas para columnas y muros, el código permite el siguiente valor más complejo para el momento de inercia:

$$I = \left(0.80 + 25\frac{A_{st}}{A_g}\right)\left(1 - \frac{M_u}{P_u h} - 0.5\frac{P_u}{P_0}\right)I_g \leq 0.875 I_g \qquad \text{(Ecuación 10-8, ACI)}$$

P_u and M_u deben tomarse de la combinación de carga en estudio, o conservadoramente pueden tomarse como los valores de P_u y M_u que conduzcan al valor más bajo de *I*. En ningún caso debe tomarse un valor de *I* para los miembros a compresión menor que $0.35I_g$. P_0 es la resistencia teórica de la carga axial concéntrica (véase el capítulo 9 de este libro de texto).

Para miembros a flexión (vigas y placas planas y losas planas) se permite la siguiente ecuación aproximada:

$$I + (0.10 + 25\rho)\left(1.2 - 0.2\frac{b_w}{d}\right)I_g \leq 0.5 I_g \qquad \text{(Ecuación 10-9, ACI)}$$

Para miembros continuos a flexión, se permite usar el valor promedio de *I* de las secciones de momento positivo y negativo. En ningún caso el valor de *I* requerido para miembros a flexión debe ser tomado menor que $0.25I_g$.

A menudo durante el proceso de diseño, el proyectista no sabe los valores finales de las dimensiones de la sección del miembro o las áreas de acero al hacer cálculos tales como aquellos en la ecuación 10-8 del ACI. Esto conduce a un proceso iterativo donde el último ciclo de iteraciones supone las mismas propiedades del miembro que el diseño final. El código (10.10.4.1) le permite que estos valores estén sólo dentro de 10% de los valores finales en la iteración final.

11.7 COLUMNAS ESBELTAS EN MARCOS CON Y SIN DESPLAZAMIENTO LATERAL

Existe una gran diferencia entre el comportamiento de las columnas de marcos sin desplazamiento lateral o riostrados y el de aquéllas de marcos con desplazamiento lateral o no riostrados. En efecto, cada columna en un marco riostrado actúa por sí misma. En otras palabras, su resistencia individual se puede determinar, comparar con sus cargas y momentos factorizados calculados. En un marco no riostrado o con desplazamiento lateral, una columna probablemente no se pandea individualmente, sino simultáneamente con todas las demás columnas al mismo nivel. Como consecuencia, es necesario en un marco riostrado, considerar la resistencia por pandeo de todas las columnas en el nivel considerado como una unidad.

Para un miembro a compresión en un marco sin desplazamiento lateral, la relación de esbeltez efectiva $k\ell_u/r$ se usa para determinar si el miembro es corto o esbelto. Para este cálculo, ℓ_u es la longitud no soportada del miembro. El factor *k* de longitud efectiva puede tomarse igual a 1.0, a menos que el análisis proporcione un valor menor. El radio de giro *r* es igual a 0.25 veces el diámetro de una columna redonda y 0.289 veces la dimensión de una columna rectangular en la dirección en que la estabilidad está siendo considerada. El código ACI (10.10.1.2) permite usar el valor aproximado de 0.30 en lugar de 0.289 y esto lo haremos aquí. Para otras secciones, el valor de *r* tendrá que calcularse a partir de las propiedades de las secciones totales.

Para marcos sin desplazamiento lateral, los efectos de esbeltez pueden ignorarse si se satisface la siguiente expresión:

$$\frac{k\ell_u}{r} \leq 34 - 12\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \qquad \text{(Ecuación 10-7, ACI)}$$

En esta expresión, M_1 es el menor momento de extremo factorizado en un miembro a compresión. Tiene el signo más si el miembro está flexionado en forma de curvatura simple (en forma de C) y el signo menos si el miembro está flexionado en curvatura doble (en forma de S). M_2 es el mayor momento

de extremo factorizado en un miembro a compresión y siempre tiene el signo más. En esta ecuación el término $\left(34 - 12\frac{M_1}{M_2}\right)$ no debe ser mayor que 40, según el artículo 10.10.1 del código ACI.

Para marcos riostrados, los efectos de esbeltez pueden ignorarse si

$$k\ell_u/r < 22 \qquad \text{(Ecuación 10-6, ACI)}$$

Si $k\ell_u/r$ para una columna en particular es mayor que la relación aplicable, tendremos una columna esbelta. Para tal columna, el efecto de esbeltez debe ser considerado. Esto puede hacerse usando métodos aproximados o usando un análisis teórico de segundo orden que tome en cuenta el efecto de las deflexiones. Los efectos de segundo orden no pueden exceder 40% de los efectos de primer orden (ACI 10.10.2.1).

Un análisis de segundo orden es aquel que toma en cuenta el efecto de las deflexiones y también hace uso de un módulo tangente reducido. Las ecuaciones necesarias para diseñar una columna en este intervalo son sumamente complicadas y en la práctica se recurre a gráficas de diseño de columnas o programas de computadora.

Cómo evitar las columnas esbeltas

El diseño de columnas esbeltas es considerablemente más complicado que el diseño de columnas cortas. Como consecuencia, es apropiado considerar el uso de ciertas dimensiones mínimas de manera que las columnas no resulten esbeltas. De este modo, tales columnas pueden evitarse casi completamente en los edificios de tamaño medio.

Si se supone k igual a 1.0, usualmente la esbeltez puede despreciarse en columnas de marcos riostrados si ℓ_u/h se mantiene igual a 10 o menos en la planta baja y 14 o menos para los pisos arriba de la planta baja. Para determinar estos valores, se supone que hay poca resistencia al momento en la conexión de la zapata a la columna y que las columnas de la planta baja están flexionadas en forma de curvatura simple. Si la conexión zapata-columna se diseña con una resistencia apreciable al momento, el valor máximo indicado de ℓ_u/h de 10 debe aumentarse aproximadamente a 14 o al mismo valor usado en los pisos superiores.[4]

Si tenemos un marco no riostrado y se supone $k = 1.2$, probablemente es necesario tomar ℓ_u/h igual a 6 o menor. Así, para una altura libre de piso de 10 pies, hay que usar una h mínima de aproximadamente 10 pies/6 = 1.67 pies = 20 plg en la dirección de la flexión para evitar columnas esbeltas.

El ejemplo 11.1 ilustra la selección del factor k y la determinación de la relación de esbeltez para una columna en un marco no riostrado. Para calcular los valores de I/L, el autor usó 0.70 veces los momentos de inercia totales para las columnas, 0.35 veces los momentos de inercia totales para las trabes, y las longitudes completas entre los centros de los soportes en todos los miembros.

EJEMPLO 11.1

a) Con ayuda de los nomogramas de la figura 11.3, calcular el factor de longitud efectiva para la columna AB del marco riostrado de la figura 11.4. Considere sólo flexión en el marco del plano.

b) Calcular la relación de esbeltez de la columna AB. ¿Es una columna corta o esbelta? *La relación de esbeltez máxima permisible para una columna corta sin arriostramiento es 22, como se describirá en la sección 11.9 de este capítulo.* Los momentos de extremo en la columna son $M_1 = 45$ pie-klb y $M_2 = 75$ pie-klb, resultando en curvatura simple.

[4]Neville, G.B., ed., 1984, *Simplified Design Reinforced Concrete Buildings of Moderate Size and Height* (Skokie, IL: Portland Cement Association), págs. 5-10 y la 5-12.

SOLUCIÓN **a) Factor de longitud efectiva para la columna AB**

Usando los Momentos de Inercia Reducidos de 11.6*b*) y aplicando el método descrito en la sección 11.4

$$\psi_A = \frac{\dfrac{0.7 \times 8\,000}{12 \times 10}}{\left[\dfrac{0.35 \times 5\,832}{12 \times 20} + \dfrac{0.35 \times 5\,832}{12 \times 24}\right]} = 2.99$$

$$\psi_B = \frac{\dfrac{0.7 \times 8\,000}{12 \times 10} + \dfrac{0.7 \times 8\,000}{12 \times 12}}{\left[\dfrac{0.35 \times 13\,824}{12 \times 20} + \dfrac{0.35 \times 13\,824}{12 \times 24}\right]} = 2.31$$

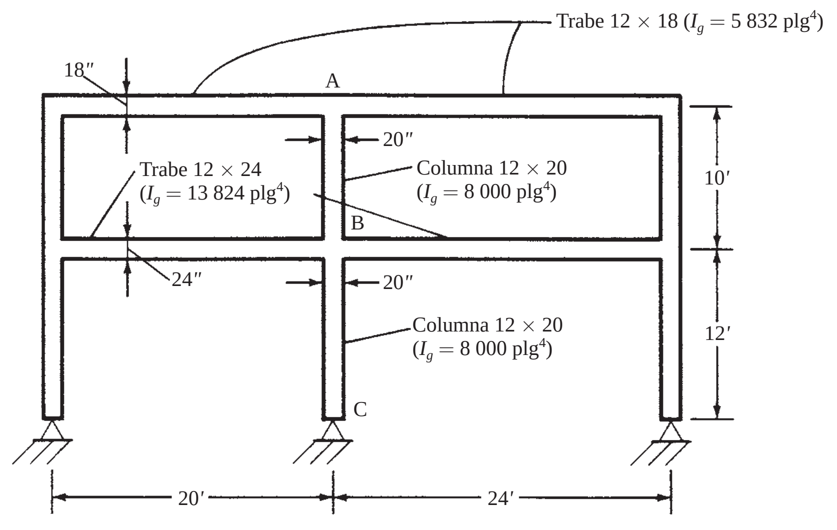
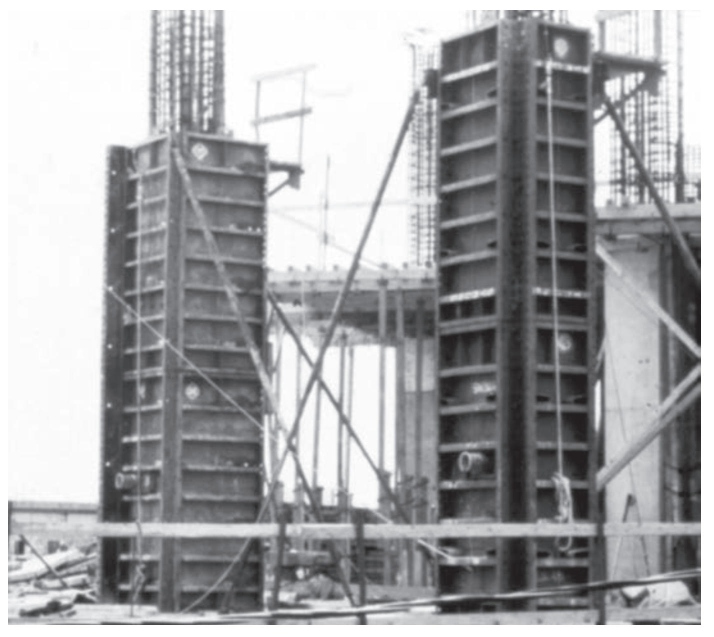
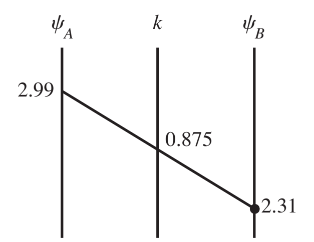


Figura 11.4



Sistema de cimbra de acero ajustable para columnas. (Cortesía de Symons Corporation.)

De la figura11.3*a*)



b) ¿Es una columna esbelta?

$$\ell_u = 10 \text{ pies} - \frac{9+12}{12} = 8.25 \text{ pies}$$

$$\frac{k\ell_u}{r} = \frac{(0.875)\times(12\times 8.25)}{0.3\times 20} = 14.44 < \text{ Máximo } \frac{kl_u}{r} \text{ para una columna corta en un marco}$$

$$\text{arriostrado mediante la ecuación 10-7 del ACI} = 34 - 12\left(\frac{+45}{+75}\right) = 26.8$$

$\therefore$ No es una columna esbelta

Un proyectista experimentado primero supondría simplemente $k = 1$ y rápidamente vería que $k\ell_u/r = \ell_u/r = 16.5 < 26.5$. Entonces no habría necesidad de determinar k.

Si esta columna estuviera en el mismo marco, pero un marco no riostrado, entonces k sería 1.78 y $k\ell_u/r = 29.37 > 22$. Sería una columna esbelta. La única diferencia para determinar k es el uso de la figura 11.3(*b*) para columnas con desplazamiento lateral en lugar de la figura 11.3(*a*) para columnas sin desplazamiento lateral.

11.8 TRATAMIENTO DEL CÓDIGO ACI DE LOS EFECTOS DE ESBELTEZ

El código ACI permite la determinación de los efectos de segundo orden mediante uno de tres métodos. El primero es por un *análisis no lineal de segundo orden* (ACI 10.10.3). Tal análisis debe considerar la no linealidad de los materiales, la curvatura del miembro y la deriva lateral, la duración de la carga, los cambios volumétricos en el concreto debido al flujo plástico, la contracción y la interacción del cimiento o del apoyo. La técnica de análisis debe predecir las cargas últimas dentro de 15% de los resultados experimentales en estructuras de concreto reforzado estáticamente indeterminadas. Esta técnica requeriría software complejo de computadora que ha sido demostrado que satisface el requisito de exactitud de 15% anteriormente citado.

El segundo método es un *análisis elástico de segundo orden* (ACI 10.10.4). Esta técnica es más simple que el método no lineal porque usa las rigideces de los miembros inmediatamente antes de la falla. Los valores de E_c, y los momentos de inercia así como el área de la sección transversal de las columnas, vigas, muros, placas planas y losas planas en los que se permite usar en el análisis elástico de segundo orden se listan en la sección 11.6. Lo más probable es que este método también requeriría un análisis de computadora.

El tercer método es el *procedimiento de amplificación de momentos* (ACI 10.10.5). Se dan diferentes procedimientos para este método para estructuras con desplazamiento lateral y sin desplazamiento lateral. Las siguientes dos secciones describen el método de amplificación de momentos para estos dos casos.

11.9 AMPLIFICACIÓN DE MOMENTOS DE COLUMNAS EN MARCOS SIN DESPLAZAMIENTO LATERAL

Cuando una columna está sometida a momentos a lo largo de su longitud no apuntalada, se desplaza lateralmente en el plano de flexión. El resultado será un momento aumentado o momento secundario igual a la carga axial multiplicada por el desplazamiento lateral o excentricidad. En la figura 11.5 la

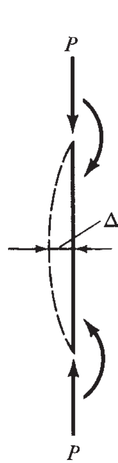


Figura 11.5 Amplificación de momentos en una columna sin desplazamiento lateral.

carga P causa que el momento de la columna se incremente una cantidad $P\Delta$. Este momento causará que δ aumente un poco más, con el resultado de que el momento $P\Delta$ aumentará, que a su vez causará un incremento más en Δ, etc., hasta que se alcanza el equilibrio.

Podríamos tomar los momentos en la columna, calcular la deflexión lateral, aumentar el momento en $P\Delta$, recalcular la deflexión lateral y el momento aumentado, etc. Si bien dos ciclos serían suficientes, este procedimiento sería muy tedioso e impráctico.

Puede demostrarse[5] que el momento aumentado puede estimarse muy bien multiplicando el momento primario por $1/(1 - P/P_c)$, donde P es la carga axial y P_c es la carga de pandeo de Euler igual a $\pi^2 EI/(k\ell_u)^2$.

En el ejemplo 11.2 esta expresión se usa para estimar el momento amplificado en una columna cargada lateralmente. Puede verse que en este problema el momento primario de 75 pie-klb se incrementa 7.4 pie-klb. Si calculamos la deflexión debida a la carga lateral, obtenemos 0.445 plg. Para este valor $P\Delta = (150)\,(0.445) = 66.75$ plg-klb $= 5.6$ pie-klb. Este momento causa más deflexión que a su vez causa más momento y así sucesivamente.

EJEMPLO 11.2

a) Calcular el momento primario en la columna mostrada en la figura 11.6 debido a la carga lateral de 20 klb.

b) Determinar el momento total estimado, incluyendo el momento secundario debido a la deflexión lateral, usando el factor de amplificación apropiado justamente presentado. $E = 3.16 \times 10^3$ klb/plg^2. Suponer $k = 1.0$ y $\ell_u =$ 15 pies.

SOLUCIÓN **a)** Momento primario debido a la carga lateral:

$$M_u = \frac{(20)(15)}{4} = \underline{\underline{75 \text{ pie-klb}}}$$

b) Momento total incluyendo el momento secundario:

$$P_c = \text{carga de pandeo de Euler} = \frac{\pi^2 EI}{(k\,\ell_u)^2} \qquad \text{(Ecuación 10-13, ACI)}$$

$$= \frac{(\pi^2)(3\,160)\left(\frac{1}{12} \times 12 \times 12^3\right)}{(1.0)(12 \times 15)^2} = 1\,663.4 \text{ klb}$$

[5]Timoshenko, S.P., y Gere, J.M., 1961, *Theory of Elastic Stability*, 2a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill), págs. 319-356.

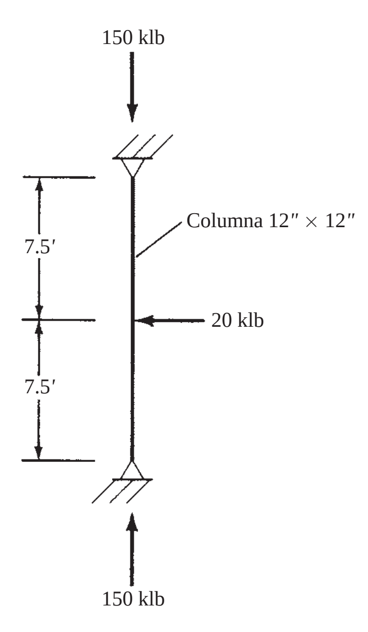


Figura 11.6

$$\text{Momento amplificado} = 75 \frac{1}{1 - \dfrac{P}{P_c}}$$

$$= 75 \frac{1}{1 - \dfrac{150}{1\,663.4}} = \underline{\underline{82.4 \text{ pie-klb}}}$$

Como hemos visto, es posible calcular aproximadamente el momento amplificado debido a deflexión lateral usando la expresión $(1 - P/P_c)$. En el artículo 10.10.16 del código ACI el momento de diseño factorizado para columnas esbeltas sin desplazamiento se incrementa usando la siguiente expresión, en la cual M_c *es* el momento amplificado o aumentado y M_2 es el momento factorizado final mayor en un miembro a compresión:

$$M_c = \delta M_2 \qquad \text{(Ecuación 10-11, ACI)}$$

Si nuestros cálculos proporcionan momentos muy pequeños en ambos extremos de la columna, el código provee un valor mínimo absoluto de M_2 para usarse en el diseño. En efecto, se requiere el cálculo de un momento basado en una excentricidad mínima de $0.6 + 0.03h$, donde h es el espesor total del miembro perpendicular al eje de flexión.

$$M_{2\,\text{mín}} = P_u(0.6 + 0.03h) \qquad \text{(Ecuación 10-17, ACI)}$$

O en unidades del SI

$$M_{2\,\text{mín}} = P_u(15 + 0.03h), \text{ donde } h \text{ está en mm, así como el número 15.}$$

Se usa un amplificador de momento δ para estimar el efecto de la curvatura del miembro entre los extremos de los miembros a compresión. Implica un término C_m, que se define más adelante en esta sección.

$$\delta = \frac{C_m}{1 - \dfrac{P_u}{0.75P_c}} \geq 1.0 \qquad \text{(Ecuación 10-12, ACI)}$$

La determinación del amplificador de momento δ_{ns} consiste en los siguientes cálculos:

1. $E_c = 57\,000\sqrt{f'_c}$ para concreto de peso normal (véase la sección 1.11 para otras densidades).
2. I_g = momento de inercia total de la sección transversal de la columna respecto al eje centroidal bajo consideración.
3. $E_s = 29 \times 10^6$ lb/plg^2.
4. I_{se} = momento de inercia del refuerzo respecto al eje centroidal de la sección. (Este valor = la suma de cada área de varilla multiplicada por el cuadrado de su distancia al eje centroidal del miembro en compresión.)
5. El término β_{dns} considera la reducción de la rigidez causada por cargas axiales sostenidas y es aplicable solamente a marcos sin desplazamiento lateral. Se define como la relación de la carga axial sostenida factorizada máxima dividida por la carga axial factorizada total asociada con la misma combinación de carga. Siempre se supone que tiene signo positivo y nunca se permite que exceda de 1.0.
6. A continuación es necesario calcular *EI*. Las dos expresiones dadas para *EI* en el código se desarrollaron tomando en cuenta el flujo plástico, las grietas, etc. Si el tamaño de la columna y de las varillas ya se ha seleccionado o estimado, *EI* se puede calcular con la siguiente expresión, que es particularmente satisfactoria para columnas con altos porcentajes de acero.

$$EI = \frac{(0.2E_cI_g + E_sI_{se})}{1+\beta_{dns}} \qquad \text{(Ecuación 10-14, ACI)}$$

   La expresión alternativa dada a continuación para *EI*, es probablemente la mejor expresión que se puede usar cuando los porcentajes de acero son bajos. Observe también que esta expresión es la que se usa cuando el refuerzo no se ha seleccionado previamente.

$$EI = \frac{0.4E_cI_g}{1+\beta_{dns}} \qquad \text{(Ecuación 10-15, ACI)}$$

7. Se calcula la carga de pandeo de Euler:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k\ell_u)^2} \qquad \text{(Ecuación 10-13, ACI)}$$

8. Para algunas situaciones de momentos en columnas, la expresión para la amplificación o el amplificador de momentos conduce a momentos que son demasiado grandes. Una de estas situaciones ocurre cuando el momento en un extremo del miembro es cero. Para esta situación, la deflexión lateral es en realidad aproximadamente la mitad de la deflexión obtenida con el factor de amplificación. Si tenemos momentos aproximadamente iguales en los extremos que causan una curvatura doble, la deflexión y los momentos a media altura ahí son cercanos a cero. Como resultado de éstas y otras situaciones, el código proporciona un factor de modificación (C_m) para usarse en la expresión del momento que dará como resultado una amplificación más realista del momento.

En los marcos riostrados sin cargas transversales entre apoyos, C_m puede variar de 0.4 a 1.0 y debe determinarse con la expresión al final de este párrafo. Para todos los demás casos debe tomarse igual a 1.0. (Recuerde la convención de los signos: M_1 es positivo para curvatura simple y es negativo para curvatura doble; M_2 es siempre positivo.)

$$C_m = 0.6 + 0.4\,\frac{M_1}{M_2} \geq 0.4 \qquad \text{(Ecuación 10-16, ACI)}$$

Si $M_{2,\,\text{mín}}$ calculado con la ecuación 10-17 del ACI resulta mayor que M_2, el de valor anterior de C_m se tomará igual a 1.0 o se basará en la relación de los momentos extremos calculados $\frac{M_1}{M_2}$ (sección 10.10.6.4 del ACI).

El ejemplo 11.3 ilustra el diseño de una columna en un marco sin desplazamiento lateral.

EJEMPLO 11.3

La columna con estribos de la figura 11.7 se ha diseñado aproximadamente con las dimensiones de 12 plg × 15 plg. Se usará en un marco riostrado contra desplazamientos laterales. La columna se flexiona con curvatura simple alrededor de su eje y y tiene una ℓ_u de 16 pies. Si $k = 0.83$, $f_y = 60\,000$ lb/plg^2, y $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2, determinar el refuerzo requerido. Considerar sólo la flexión en el plano del marco. Obsérvese también que la carga muerta axial no factorizada P_D es de 30 klb y el concreto es de peso normal.

SOLUCIÓN **1.** ¿Es una columna esbelta?

$$\frac{k\ell_u}{r} \text{ máximo para columnas cortas} = 34 - 12\frac{M_1}{M_2} = 34 - 12\left(\frac{+82}{+86}\right)$$

$$= 22.56$$

$$\frac{k\ell_u}{r} \text{ real} = \frac{(0.83)(12 \times 16)}{0.3 \times 15} = 35.41 > 22.56$$

∴ Es una columna esbelta $k\ell_u/r$.

2. $E_c = 57\,000\sqrt{f'_c} = 57\,000\sqrt{4\,000} = 3\,605\,000 \text{ lb/plg}^2 = 3.605 \times 10^3 \text{ klb/plg}^2$

3. $I_g = \left(\frac{1}{12}\right)(12)(15)^3 = 3\,375 \text{ plg}^4$

4. $\beta_d = \dfrac{\text{carga muerta axial factorizada}}{\text{carga axial total factorizada}} = \dfrac{(1.2)(30)}{110} = 0.327$

5. Como el refuerzo no se ha seleccionado, debemos usar la segunda expresión para EI.

$$EI = \frac{0.4E_cI_g}{1+\beta_d} = \frac{(0.4)(3\,605)(3\,375)}{1+0.327} = 3.67 \times 10^6 \text{ klb-plg}^2 \quad \text{(Ecuación 10-15, ACI)}$$

6. $P_c = \dfrac{\pi^2 EI}{(k\ell_u)^2} = \dfrac{(\pi^2)(3.67 \times 10^6)}{(0.83 \times 12 \times 16)^2} = 1\,426 \text{ klb}$ (Ecuación 10-13, ACI)

7. $C_m = 0.6 + 0.4\dfrac{M_1}{M_2} = 0.6 + 0.4\left(\dfrac{+82}{+86}\right) = 0.981$ (Ecuación 10-16, ACI)

8. $\delta = \dfrac{C_m}{1 - \dfrac{P_u}{0.75P_c}} = \dfrac{0.981}{1 - \dfrac{110}{(0.75)(1\,426)}} = 1.09$ (Ecuación 10-12, ACI)

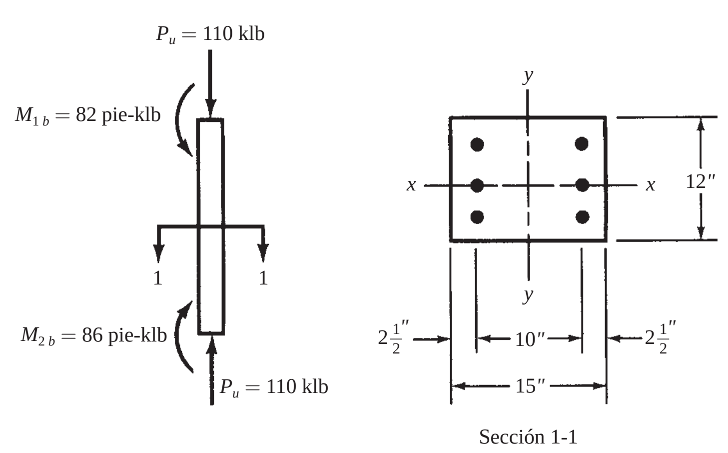


Figura 11.7

9. $M_{2,\,\text{mín}} = P_u(0.6 + 0.03h) = 110(0.6 + 0.03 \times 15)$
$= 115.5$ plg-klb $= 9.6$ pie-klb (Ecuación 10-17, ACI)

10. $M_c = \delta M_2 = (1.09)(86) = 93.7$ pie-klb (Ecuación 10-11, ACI)

11. e amplificado $= \delta e = \frac{(12)(93.7)}{110} = 10.22$ plg

12. $\lambda = \frac{10}{15} = 0.667 \therefore \rho_g$ se determina por interpolación entre los valores presentados en el apéndice A, gráficas 2 y 3.

$$P_n = \frac{P_u}{\phi} = \frac{110}{0.65} = 169.23 \text{ klb}$$

$$K_n = \frac{P_n}{f_c' A_g} = \frac{169.23}{(4)(12 \times 15)} = 0.235$$

$$R_n = \frac{P_n}{f_c' A_g}\frac{\delta e}{h} = (0.235)\left(\frac{10.22}{15}\right) = 0.160$$

$$\rho_g = 0.0160$$

$$A_g = (0.0160)(12)(15) = 2.88 \text{ plg}^2$$

Use 4 varillas #8 (3.14 plg^2)

Como K_n y R_n están entre las líneas radiales designadas $f_s/f_y = 1.0$ y $\varepsilon_t = 0.005$ en los diagramas de interacción, se permite que el factor ϕ se incremente desde el valor usado de 0.65. Si se usa la hoja de cálculo de los capítulos 9 y 10 para columnas rectangulares, se encuentra que es suficiente un área de refuerzo de sólo 1.80 plg^2. Esta reducción significativa ocurre debido al factor incrementado de ϕ en esta región.

La mayoría de las columnas se diseñan para combinaciones múltiples de carga y el proyectista debe estar seguro de que la columna puede resistir a todas ellas. A menudo hay algunas con carga axial alta y momento bajo, tal como $1.2D + 1.6L$ y otras con carga axial baja y momento alto, tal como $0.9D + 1.6E$. La primera de éstas probablemente tenga un factor ϕ de 0.65. Sin embargo, es probable que la segunda sea preferible para el incremento en el factor ϕ.

En este ejemplo el autor supuso que el marco estaba riostrado y sin embargo hemos dicho que los marcos suelen estar en esa zona de indeterminación entre el total riostramiento y ningún riostramiento. *Suponer que un marco está totalmente riostrado puede ser muy poco conservador.*

11.10 AMPLIFICACIÓN DE LOS MOMENTOS EN LAS COLUMNAS DE MARCOS CON DESPLAZAMIENTO LATERAL

Las pruebas han mostrado que aunque las deflexiones laterales en marcos no riostrados son más bien pequeñas, sus cargas de pandeo son mucho menores que lo que serían si los marcos estuviesen riostrados. Como consecuencia, las resistencias por pandeo de las columnas de un marco sin riostrar pueden aumentarse decididamente (tal vez por un factor de dos o tres) proporcionando un arriostramiento adecuado.

Si un marco no está riostrado contra desplazamientos laterales, primero es necesario calcular su relación de esbeltez. Si $k\ell_u/r$ es menor que 22, la esbeltez puede despreciarse (10.10.1 del ACI). Para nuestro análisis supondremos que se obtienen valores > 22.

Cuando se tienen marcos con desplazamientos laterales, es necesario decidir para cada combinación de carga cuál de las cargas causa un desplazamiento lateral apreciable (probablemente las cargas laterales) y cuál no. Los momentos de extremo factorizados que causan desplazamientos laterales se designan M_{1s} y M_{2s}, y deben amplificarse debido al efecto $P\Delta$. Los otros momentos de extremo, resultantes de cargas que no causan un desplazamiento lateral apreciable, se designan M_{1ns} y M_{2ns}. Éstos se determinan mediante un análisis de primer orden y no tienen que ser amplificados.

El código (10.107) establece que el amplificador de momentos δ_s puede determinarse mediante uno de los dos siguientes métodos.

1. El amplificador de momentos puede calcularse con la ecuación dada al final de este párrafo en donde Q es el índice de estabilidad presentado anteriormente en la sección 11.2 de este capítulo. Si el valor calculado de δ_s es > 1.5 será necesario calcular δ_s por la sección 10.10.7.4 del ACI o por un análisis de segundo orden.

$$\delta_s = \frac{1}{1-Q} \geq 1 \qquad \text{(Ecuación 10-20, ACI)}$$

2. Con el segundo método y el que se usa en este capítulo los momentos amplificados con desplazamiento lateral pueden calcularse con la siguiente expresión:

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \dfrac{\Sigma P_u}{0.75\Sigma P_c}} \geq 1 \qquad \text{(Ecuación 10-21, ACI)}$$

En esta última ecuación ΣP_u es la suma de todas las cargas verticales en el nivel estudiado y ΣP_c es la suma de todas las cargas de pandeo de Euler $\left(P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k\ell_u)^2}\right)$ para todas las columnas resistentes con desplazamiento lateral en el nivel con los valores k determinados como se describe en la sección 10.10.7.2 del ACI. Esta fórmula refleja el hecho de que las deflexiones laterales de todas las columnas en un nivel en particular son iguales y entonces las columnas son interactivas.

Con cualquiera de los métodos anteriores que se use para determinar los valores de δ_s, los momentos de diseño que deben usarse se deben calcular con las expresiones siguientes.

$$M_1 = M_{1ns} + \delta_s M_{1s} \qquad \text{(Ecuación 10-18, ACI)}$$

$$M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s} \qquad \text{(Ecuación 10-19, ACI)}$$



Iglesia de la Primera Asamblea en Wyoming, MI. (Cortesía de Veneklasen Concrete Construction Co.)

Algunas veces el punto de máximo momento en una columna esbelta estará entre sus extremos. El comentario (R10.10.2.2) del ACI dice que la amplificación de momento para este caso puede evaluarse usando el procedimiento descrito para marcos sin desplazamiento lateral (ACI 10.10.6).

El ejemplo 11.4 ilustra el diseño de una columna esbelta sometida a desplazamiento lateral.

EJEMPLO 11.4

Seleccionar las varillas de refuerzo usando el método de amplificación del momento para la columna no riostrada de 18 plg × 18 plg mostrada en la figura 11.8 si $\ell_u = 17.5$ pies, k = 1.3, $f_y = 60$ klb/plg^2 y $f'_c = 4$ klb/plg^2. Un análisis de primer orden ha resultado en los siguientes momentos y cargas axiales:

$$P_D = 300 \text{ klb} \quad M_D = 48 \text{ klb-pie}$$

$$P_L = 150 \text{ klb} \quad M_L = 25 \text{ klb-pie}$$

$$P_W = 170 \text{ klb} \quad M_W = 29 \text{ klb-pie}$$

La combinación de carga que se supone que controla para el caso de que no hay desplazamiento lateral es la ecuación 9.4 del ACI (sección 4.1 de este texto).

$$P_U = 1.2P_D + 1.6P_L = 1.2(300) + 1.6(150) = 600 \text{ klb}$$
$$M_U = 1.2M_D + 1.6M_L = 1.2(48) + 1.6(25) = 97.6 \text{ klb-pie} = M_{2ns}$$

La combinación de carga que se supone que controla con desplazamiento lateral es la ecuación 9.6 del ACI

$$P_U = 0.9P_D + 1.6P_W = 0.9(300) + 1.6(170) = 542 \text{ klb}$$
$$M_U = 0.9M_D + 1.6M_W = 0.9(48) + 1.6(20) = 89.6 \text{ klb-pie} = M_{2s}$$

Observe que la ecuación 9.3 del ACI también puede controlar para el caso de desplazamiento lateral, pero en este caso es improbable.

$$\Sigma P_u = 12\ 000 \text{ para todas las columnas del piso}$$
$$\Sigma P_c = 60\ 000 \text{ para todas las columnas del piso}$$

SOLUCIÓN *¿Es una columna esbelta? (ACI 10.13.2)*

$$\frac{k\ell_u}{r} = \frac{(1.3)(12)(17.5)}{(0.3)(18)} = 50.55 > 22$$ <u>Sí</u>

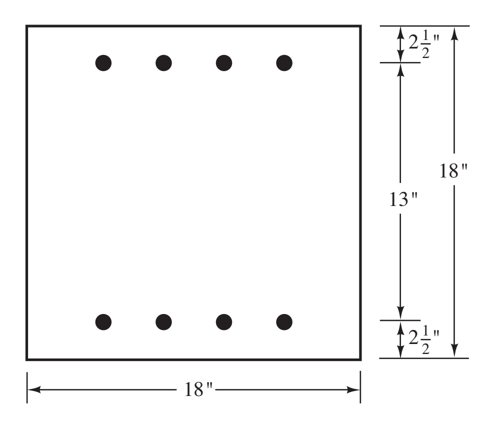


Figura 11.8

Cálculo del momento amplificado δ_s

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \dfrac{\Sigma P_u}{0.75\Sigma P_c}} \qquad \text{(Ecuación 10-18, ACI)}$$

$$= \frac{1}{1 - \dfrac{12\,000}{(0.75)(60\,000)}} = 1.364$$

Cálculo del momento amplificado M_2

$$M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s} \qquad \text{(Ecuación 10-19, ACI)}$$

$$= 97.6 + (1.364)(89.6) = 219.8 \text{ pie-klb}$$

¿Es $M_{2ns} \geq$ valor mínimo permitido en la sección 10.10.6.5 del ACI?

$$M_{2\,\text{mín}} = P_u(0.6 + 0.03h) \qquad \text{(Ecuación 10-17, ACI)}$$

$$= (544)(0.6 + 0.03 \times 18) = 620.2 \text{ plg-klb}$$

$$= 51.7 \text{ pie-klb} < 97.6 \text{ pie-klb}$$

Sí

Selección del refuerzo

$$\gamma = \frac{13}{18} = 0.722 \text{ con referencia a la figura 11.8}$$

$$P_n = \frac{P_u}{\phi} = \frac{542}{0.65} = 833.8$$

$$e = \frac{(12)(219.8)}{542} = 4.87$$

$$K_n = \frac{P_n}{f'_c A_g} = \frac{833.8}{(4)(18 \times 18)} = 0.643$$

$$R_n = \frac{P_n}{f'_c A_g}\frac{e}{h} = (0.643)\left(\frac{4.87}{18}\right) = 0.174$$

Por la interpolación entre las gráficas 3 y 4 del apéndice A, encontramos $\rho_z = 0.023$

$$A_z = \rho_z A_g = (0.023)(18 \times 18) = 7.45$$

Use 8 varillas #9 (9.00)

11.11 ANÁLISIS DE MARCOS CON DESPLAZAMIENTO LATERAL

Se supone que el marco de la figura 11.9 no está riostrado en el plano del marco. Soporta una carga uniforme gravitacional w_u y una carga lateral concentrada de corta duración P_w. Como consecuencia, hay que considerar tanto los momentos debidos a las cargas que no causan desplazamiento lateral apreciable, así como las cargas que sí lo hacen. Por consiguiente hay que calcular los dos valores δ y δ_s si la columna resulta ser esbelta.

Los valores M_s son obviamente causados por la carga lateral en este caso. Sin embargo, el lector debería percatarse de que si las cargas de gravedad y/o el marco son asimétricos, ocurrirán momentos M_s adicionales o momentos debido a desplazamiento lateral.

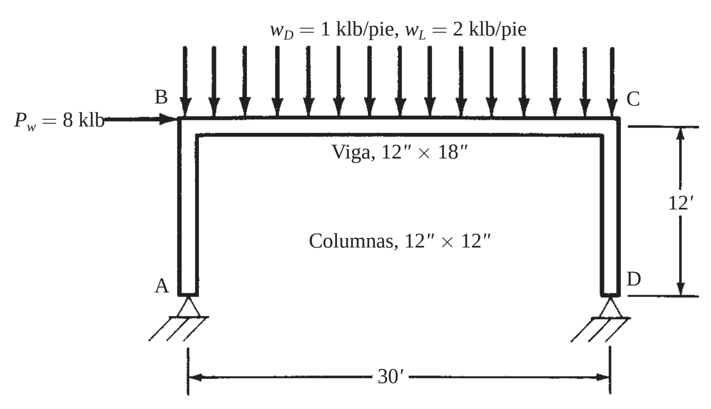


Figura 11.9

Si tenemos un marco no riostrado sometido a cargas laterales de viento o sismo de corta duración, las columnas no tendrán un flujo plástico apreciable (que aumentarían las deflexiones laterales y por ende los momentos PΔ). El efecto del flujo plástico se toma en consideración en el diseño reduciendo la rigidez *EI* usada para calcular P_c y por tanto δ_s dividiendo *EI* entre $1 + \beta_{dns}$ como se especifica en la sección 10.10.6.1 del ACI. Tanto el término de concreto como el término de acero en la ecuación 10-14 del ACI se dividen por este valor. En el caso de carga lateral sostenida, tal como relleno de suelo o presión hidráulica, la sección 10.10.4.2 del ACI requiere que los momentos de inercia de los miembros a compresión en la sección 11.6 se dividan entre $(1 + \beta_{dns})$. El término β_{dns} es la relación de la fuerza cortante factorizada máxima sostenida en ese piso entre la fuerza cortante factorizada máxima para la misma combinación de carga.

Para ilustrar el cálculo de los momentos amplificados necesarios para el diseño de una columna esbelta en un marco con desplazamiento lateral, los autores han escogido el marco simple de la figura 11.9. Con ello esperamos que el estudiante no se pierda en un cúmulo de números como los que se generarían si se considerara un marco grande.

La viga y las columnas del marco se han dimensionado tentativamente como se muestra en la figura. En el ejemplo 11.5 el marco es analizado para cada una de las condiciones especificadas en la sección 9.2 del ACI utilizando 1.6*W*.

En el ejemplo se calculan los factores de amplificación δ y δ_s para cada una de las condiciones de carga y se usan para calcular los momentos amplificados. Nótese que en la solución se usan valores diferentes de *k* para determinar δ y δ_s. La *k* para el cálculo de δ se determina con el nomograma de la figura 11.3(*a*) para marcos riostrados, mientras que la *k* para el cálculo de δ_s se determina con el nomograma de la figura 11.3(*b*) para marcos no riostrados.

EJEMPLO 11.5

Determinar los momentos y las fuerzas axiales que deben usarse para el diseño de la columna CD del marco sin riostrar de la figura 11.9. Considere la flexión sólo en el plano del marco. Los tamaños supuestos de los miembros mostrados en la figura se usan para los análisis dados en el problema. $f_y = 60\,000$ lb/plg^2 y $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2. Para este ejemplo, los autores consideraron los casos de factor de carga de las ecuaciones 9-1, 9-4 y 9-6 del ACI. Para otras situaciones tendrán que considerarse otras ecuaciones apropiadas de factor de carga del ACI.

SOLUCIÓN

1. *Determinar el factor de longitud efectiva para el caso de desplazamiento usando 0.35 I_g para la trabe y 0.70 I_g para las columnas.*

$$I_{\text{columna}} = (0.70)\left(\frac{1}{12}\right)(12)(12)^3 = 1\,210 \text{ plg}^4$$

Nótese que si la carga lateral fuera sostenida, I_{columna} sería dividido entre $(1 + \beta_{ds})$.

$$I_{\text{trabe}} = (0.35)\left(\frac{1}{12}\right)(12)(18)^3 = 2\,041 \text{ plg}^4$$

$$\psi_B = \frac{\frac{1\,210}{12}}{\frac{2\,041}{30}} = 1.48$$

$\psi_A = \infty$ para extremos articulados (Para propósitos prácticos, usar 10)

$k = 1.95$ de la figura 11.3(b)

2. *¿Es una columna esbelta?*

$$\ell_u = 12 - \frac{9}{12} = 11.25 \text{ pies}$$

Máx $\frac{k\ell_u}{4}$ para que sea una columna corta = 22 en marcos no riostrados

$$\frac{k\ell_u}{r} = \frac{(1.95)(12 \times 11.25)}{0.3 \times 12} = 73.12 > 22$$

$\therefore$ Es una columna esbelta

3. *Considerar el caso de carga U = 1.2D + 1.6L (véase la figura 11.10).*

a) *¿Son los momentos en las columnas ≥ que el mínimo del ACI?*

$e_{\text{mín}} = 0.6 + 0.03 \times 12 = 0.96$ plg

$M_{2\,\text{Mín}} = (66)(0.96) = 63.36$ plg-klb $= 5.28$ pie-klb < 173.5 pie-klb (véase la figura 11.10) OK

$w_u = (1.2)(1) + (1.6)(2) = 4.4$ klb/pie

B C

$M_{2b} = 173.5$ pie-klb (del análisis de estructuras indeterminadas que no se muestra)

A D

66 klb 66 klb

Figura 11.10 Carga 1.2D + 1.6L.

b) *Calcular el factor de amplificación δ:*

$$E_c = 57\ 000\sqrt{4\ 000} = 3\ 605\ 000\ \text{lb/plg}^2 = 3\ 605\ \text{klb/plg}^2$$

$$\beta_d = \frac{(1.2)(1)}{(1.2)(1) + (1.6)(2)} = 0.273$$

$$EI = \frac{(0.4)(3\ 605)(1\ 728)}{1 + 0.273} = 1.96 \times 10^6\ \text{klb-plg}^2$$

Suponiendo conservadoramente que $k = 1.0$ para calcular P_c

$$P_c = \frac{(\pi^2)(1.96 \times 10^6)}{(1.0 \times 12 \times 11.25)^2} = 1\ 061\ \text{klb}$$

$$C_m = 0.6 + (0.4)\left(\frac{-0}{+173.5}\right) = 0.6$$

$$\delta_{ns} = \frac{0.6}{1 - \dfrac{66}{(0.75)(1\ 061)}} = 0.65 < 1.0 \qquad \underline{\underline{\text{Use } 1.0}}$$

c) *Calcular el factor de amplificación δ_s:*
Usando $k = 1.95$ tal como está dada para determinar P_c

$$P_c = \frac{(\pi^2)(1.96 \times 10^6)}{(1.95 \times 12 \times 11.25)^2} = 279.1\ \text{klb}$$

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \dfrac{\Sigma P_u}{0.75 \Sigma P_c}} = \frac{1}{1 - \dfrac{(2)(66)}{(0.75)(2 \times 279.1)}} = 1.46$$

d) *Calcular el momento amplificado:*

$$M_c = (1.0)(173.5) + (1.47)(0) = \underline{\underline{173.9\ \text{pie-klb}}}$$

4. *Considerar el caso de carga U = (1.2D + 1.0L + 1.6W) como se especifica en la sección 9.2.1(b) del código ACI. Los resultados del análisis se muestran en la figura 11.11.*

a) *¿Son los momentos en las columnas ≥ que los mínimos del ACI?*

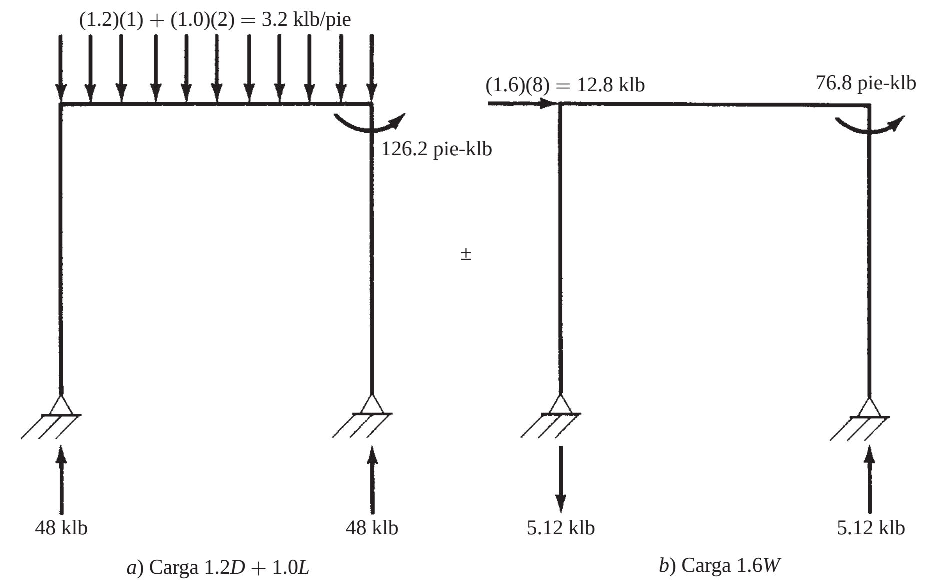
$$e_{\text{mín}} = 0.6 + 0.03 \times 12 = 0.96\ \text{plg}$$

$$M_{2\ \text{mín}} = (48)(0.96) = 46.08\ \text{plg-klb} = 3.84\ \text{pie-klb} < 126.2\ \text{pie-klb} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

b) *Calcular δ:*
β_{ns}, EI y P_c son los mismos que antes

$$C_m = 0.6 + 0.4\left(\frac{-0}{+14}\right) = 0.6$$

$$\delta = \frac{0.6}{1 - \dfrac{48 + 5.12}{0.75 \times 1\ 061}} = 0.64 \qquad \underline{\underline{\text{Use } 1.0}}$$



a) Carga 1.2*D* + 1.0*L*   *b*) Carga 1.6*W*

Figura 11.11

c) *Calcular δ_s:*

$$\beta_{dns} = \frac{1.2D}{1.2D + 1.0L + 1.6W} = \frac{18}{18 + 30 + 5.12} = 0.339$$

$$EI = \frac{(0.4)(3\ 605)(1\ 728)}{1 + 0.339} = 1.86 \times 10^6 \text{ klb-plg}^2$$

$$P_c = \frac{(\pi^2)(1.86 \times 10^6)}{(1.95 \times 12 \times 11.25)^2} = 264.9 \text{ klb}$$

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \dfrac{(2)(48) + 5.12 - 5.12}{0.75 \times 2 \times 264.9}} = 1.32$$

d) *Calcular el momento amplificado:*

$$M_c = (1.0)(126.2) + (1.32)(76.8) = \underline{\underline{227.6 \text{ pie-klb}}}$$

5. *Considerar el caso de carga 0.9D + 1.6W. Los resultados del análisis se muestran en la figura 11.12.*

a) *¿Son los momentos en las columnas ≥ que los mínimos del ACI?*

$$e_{\text{mín}} = 0.6 + (0.03)(12) = 0.96 \text{ plg}$$
$$M_{2\text{ mín}} = (13.5)(0.96) = 12.96 \text{ plg-klb} = 1.08 \text{ pie-klb} < 35.5 \text{ pie-klb} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

b) *Calcular δ:*

$$\beta_{dns} = \frac{0.9D}{0.9D + 1.6W} = \frac{13.5}{13.5 + 5.12} = 0.725$$

$$EI = \frac{(0.4)(3\ 605)(1\ 728)}{1 + 0.725} = 1.44 \times 10^6 \text{ klb-plg}^2$$

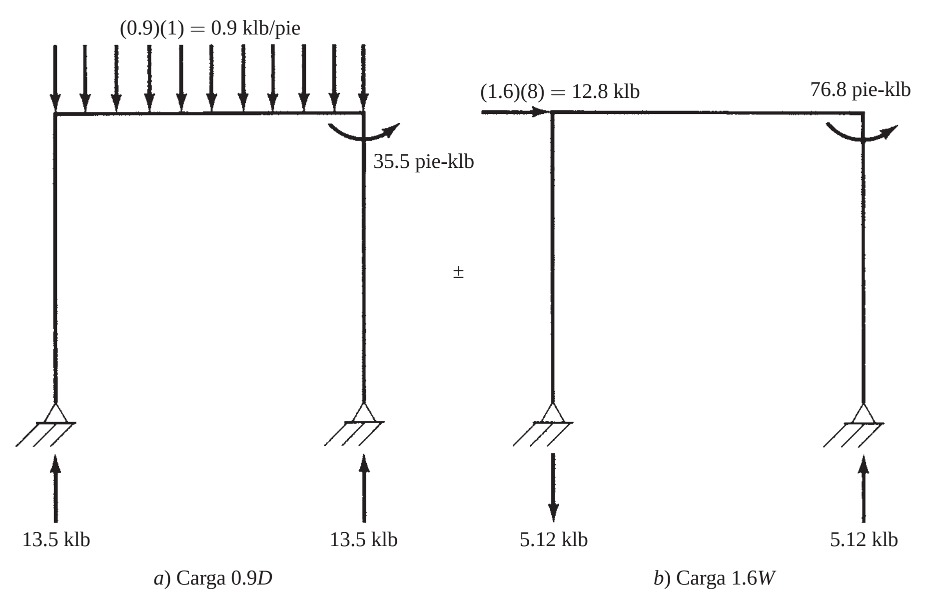


Figura 11.12

$$P_c = \frac{(\pi^2)(1.44 \times 10^6)}{(1.00 \times 12 \times 11.25)^2} = 780 \text{ klb}$$

$$C_m = 0.6 + 0.4\left(\frac{-0}{35.5}\right) = 0.6$$

$$\delta = \frac{0.6}{1 - \dfrac{13.5 + 13.5}{0.75 \times 2 \times 780}} = 0.61 < 1.0$$ Use 1.0

c) *Calcular* δ_s*:*

$$\beta_d = 0.725 \text{ del paso anterior}$$

$$EI = 1.44 \times 10^6 \text{ klb-plg}^2$$

$$P_c = 780/1.95 = 400 \text{ klb}$$

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \dfrac{(2)(13.5) + 5.12 - 5.12}{0.75 \times 2 \times 400}} = 1.05$$

d) *Calcular el momento:*

$$M_c = (1.0)(35.5) + (1.05)(76.8 = \quad \underline{\underline{116.1 \text{ pie-klb}}}$$

6. *Resumen de los momentos y las cargas axiales que deben usarse en el diseño:*

Carga I: $P_u = 66$ klb, $M_c = 173.5$ pie-klb

Carga II: $P_u = 48 + 5.12 = 53.12$ klb, $M_c = 227.6$ pie-klb

Carga III: $P_u = 13.5 + 5.12 = 18.62$ klb, $M_c = 116.1$ pie-klb

Nota: si el lector desea calcular ahora el refuerzo necesario para las cargas y momentos anteriores, encontrará que el porcentaje de acero es demasiado alto. Como consecuencia, tendrá que usarse una columna mayor.

11.12 EJEMPLOS CON COMPUTADORA

La hoja de cálculo Excel provista para el capítulo 11 calcula el factor de longitud efectiva, k, para marcos riostrados y no riostrados. Usa el mismo método que el ejemplo 11.1, con la excepción de que usa las ecuaciones de la sección 11.5 en lugar del nomograma de Jackson-Moreland para determinar k.

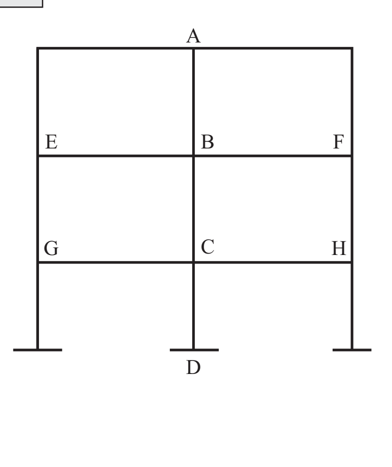
EJEMPLO 11.6

Repita el ejemplo 11.1 usando la hoja de cálculo Excel para el capítulo 11.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo del capítulo 11 y seleccione la tecla del factor k. Ingrese los valores de las celdas sombreadas en amarillo. Nótese que se ingresa un valor de $b = 0$ para el miembro AB ya que no existe. El software determina un valor de $\Psi_A = 2.99$ y $\Psi_B = 2.31$. Éstos son los mismos que se calculan a mano en el ejemplo 11.1. El valor de k de la hoja de cálculo es 1.72 si el marco es no riostrado comparado con 1.74 del nomograma de Jackson-Moreland. Si el marco fuera riostrado, el software da un valor de $k = 0.96$. El nomograma de Jackson-Moreland da un valor de 0.87. Las ecuaciones en la sección 11.5 no concuerdan bien con el nomograma en el caso de marcos riostrados.

Esta hoja de cálculo calcula el factor k para la columna BC.
Ingrese los valores de las celdas sombreadas en amarillo.
Si usted no tiene todos los miembros mostrados, ingrese $b = 0$ para el miembro faltante.

Columnas				Trabes			
	f'_c=	4 000	lb/plg²		f'_c=	4000	
Col AB	b	0	plg	Trabe EB	b	12	plg
	h	12	plg		h	18	plg
	Alt. col.	15	pie		claro	20	
	$0.70I_g$	0	plg⁴		$0.35I_g$	2041	plg⁴
Col BC	b	12	plg²	Trabe BF	b	12	
	h	20			h	18	
	Alt. col.	10	pie		claro	24	plg
	$0.70I_g$	5 600			$0.35I_g$	2041	plg⁴
Col CD	b	12	plg	Trabe CG	b	12	plg
	h	20	plg⁴		h	24	
	Alt. col.	12	pie		claro	20	pie
	$0.70I_g$	5 600			$0.35I_g$	4 838	plg⁴
				Trabe CH	b	12	klb
					h	24	klb
					claro	24	
					$0.35I_g$	4 838	plg⁴



$$\Psi_B = \frac{E_c \times 0.70 I_g/l_{AB} + E_c \times 0.70 I_g/l_{BC}}{E_c \times 0.35 I_g/l_{BE} + E_c \times 0.35 I_g/l_{BF}} \quad 2.993$$

$$\Psi_C = \frac{E_c \times 0.70 I_g/l_{BC} + E_c \times 0.70 I_g/l_{CD}}{E_c \times 0.35 I_g/l_{CG} + E_c \times 0.35 I_g/l_{CH}} \quad 2.315$$

$$\Psi_{\text{mín}} = 2.315$$

$$\Psi_m = 2.654$$

Riostrado

$k = 0.7 + 0.05(\Psi_A + \Psi_B) \leq 1.0 = 0.965$

$k = 0.85 + 0.05\Psi_{\text{mín}} \leq 1.0 = 0.966$

Riostrado

k = 0.965

No riostrado

k = 1.72

EJEMPLO 11.7

Repita el ejemplo 11.3 usando la hoja de cálculo Excel para el capítulo. 11.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo del capítulo 11 y seleccione la tecla “slender column braced rect.” (columna esbelta riostrada rect.). Ingrese los valores en las celdas de color amarillo (sombreadas abajo, amarillas en la hoja de cálculo). El valor de A_s ingresado es cero ya que la columna todavía no se diseña. El software usa automáticamente la ecuación 10-15 del ACI en este caso. Si se ingresa un valor de A_s, el software compara el valor de EI de la ecuación 10-15 y 10-16 del ACI y usa el mayor. El valor final de δ es 1.093 que concuerda con la solución obtenida en el ejemplo 11.3. El momento amplificado final, $\delta M_2 = 93.97$ pie-klb. Para completar el diseño, pueden usarse las hojas de cálculo del Diseño de Columnas para los capítulos 9 y 10.

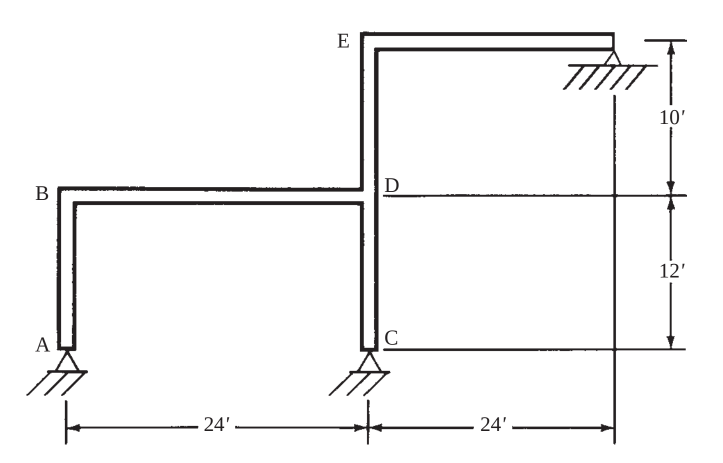
Columna esbelta riostrada: rectangular			
	f'_c	4 000	lb/plg^2
		145	lb/pie^3
Columna	b	12	plg
	h	15	plg
	ℓ_u	16	pie
	A_{st}	0	plg^2
	ρ_g	0	
Carga de las columnas	P_D	30	klb
	P_L	46.25	klb
	M_{2D}	10	pie-klb
	M_{2L}	46.25	pie-klb
	P_U	110	klb
	M_2	86	pie-klb
	M_{1D}	10	pie-klb
	M_{1L}	43.75	pie-klb
	M_1	82	pie-klb
	C_m	0.9814	
	k	0.83	
	$k\ell_u/r$	35.41	
34-12M_1/M_2		22.56	
Si $k\ell_u/r$<34-12M_1/M_2		considere esbeltez	
	E_c	3 644	lb/plg^2
	n	7.96	
	I_g	3 375	plg^4
	γ	0.67	
	β_{dns}	0.327	
	n	0.500	
	$.4E_cI_gn$	4 920	klb-plg^2
$EI = 0.4EIn/1+\beta_d$		3 707	klb-plg^2
	P_c	1 440	klb
	$M_{2\ min}$	9.625	pie-klb
		-	
	δ	1.093	
	δM_2	93.97	pie-klb

Use la hoja de cálculo del capítulo 10 para diseñar esta columna para

P_U	110	klb
δM_2	93.97	pie-klb

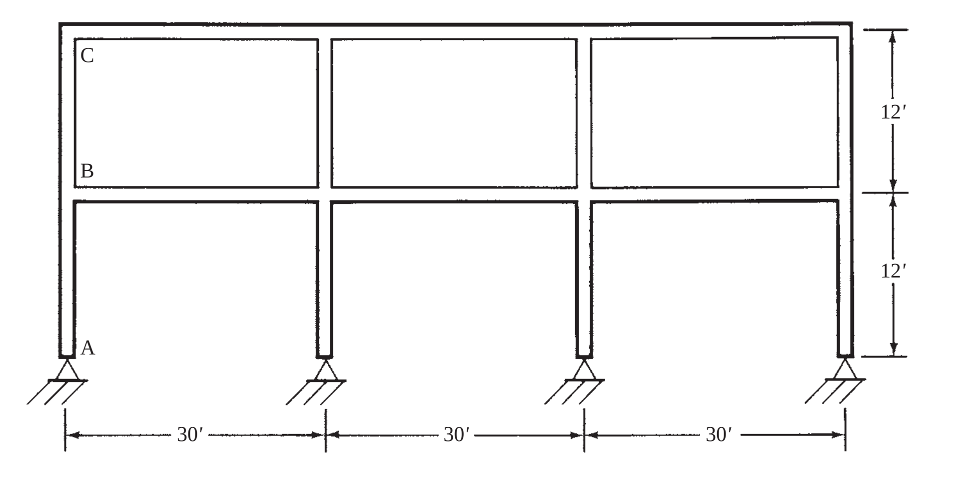
PROBLEMAS

11.1 Usando los nomogramas de la figura 11.3, determine los factores de longitud efectiva para las columnas CD y DE para el marco riostrado mostrado. Suponga que las vigas son de 12 plg × 20 plg y que las columnas son de 12 plg × 16 plg. Para las columnas use 0.70 de los momentos de inercia totales y para las vigas 0.35 de los momentos de inercia totales. Suponga ψ_A y $\psi_C = 10$. (*Resp.* 0.94, 0.89.)



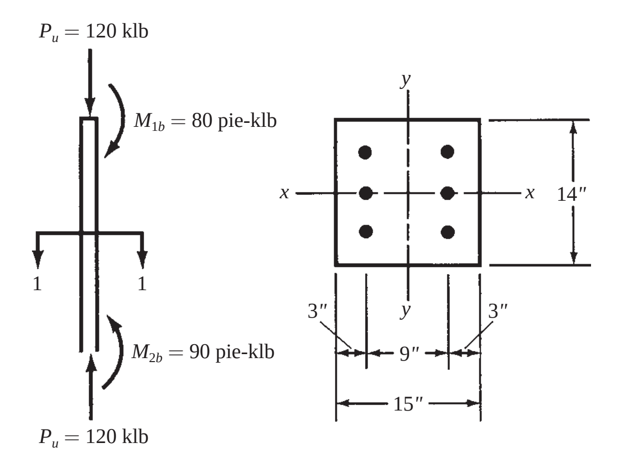
11.2 Repita el problema 11.1 si las columnas están empotradas en la base.

11.3 Usando los nomogramas de la figura 11.3, determine los factores de longitud efectiva para las columnas AB y BC del marco riostrado mostrado. Suponga que todas las vigas son de 12 plg × 20 plg y que todas las columnas son de 12 plg × 16 plg. Para las columnas use 0.70 de los momentos de inercia totales y para las vigas 0.35 de los momentos de inercia totales. Suponga que los extremos alejados de las vigas están articulados y use $\psi_A = 10$. (*Resp.* 0.94, 0.92.)



11.4 Repita el problema 11.3 si el marco no está riostrado.

11.5 La columna con estribos mostrada va a usarse en un marco riostrado. La flexión es alrededor de su eje y con los momentos factorizados mostrados y ℓ_u es 16 pies. Si $k = 1.0$, $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2, seleccione el refuerzo requerido. Suponga $P_D =$ 60 klb. (*Una respuesta posible:* $\delta = 1.21$, 6 varillas #8.)



11.6 Repita el problema 11.5 con el valor *EI* basado en el tamaño de las varillas dado como respuesta para ese problema.

11.7 Repita el problema 11.5 si la columna se flexiona en forma de curvatura doble y que su longitud es de 18 pies. Use la ecuación 10-12 del ACI para *El*. (*Una respuesta posible:* $\delta = 1.0$, 6 varillas #6.)

Para los problemas **11.8** al **11.12** y para las columnas riostradas con estribos dadas, seleccione las varillas de refuerzo si la distancia del borde de la columna al c.g. de las varillas es de 2.5 plg. $f_y = 60$ klb/plg^2 y $f'_c = 4$ klb/plg^2 para todos los problemas. Coloque las varillas en sólo dos caras. Las columnas rectangulares se flexionan alrededor de su eje fuerte. Use la ecuación 10-12 del ACI para *EI.*

Problema núm.	Tamaño de columna $b \times h$ (plg)	ℓ_u(pie)	klb	P_u (klb)	No factorizado P_D (klb)	Factorizado M_{1b} (pie-klb)	Factorizado M_{2b} (pie-klb)	Curvatura	
11.8	14 × 14	12	1.0	400	100	75	85	Simple	
11.9	15 × 15	16	1.0	500	120	100	140	Doble	(*Una respuesta* $\delta = 1.0$, 8 varillas #10)
11.10	16 × 18	15	0.85	250	40	100	120	Simple	
11.11	12 × 18	16	0.80	500	130	90	120	Simple	(*Una respuesta* $\delta = 1.20$, 8 varillas #9)
11.12	14 × 18	18	0.90	600	150	100	130	Doble	

11.13 Repita el problema 11.9 usando doble curvatura y la ecuación 10-11 del ACI para *EI.* (*Una respuesta posible:* $\delta = 1.28$, 8 varillas #11.)

Para los problemas **11.14** al **11.17** y las columnas no riostradas con estribos dadas, seleccione las varillas de refuerzo (colocadas en dos caras) si la distancia del borde de la columna al c.g. de las varillas es de 2.5 plg. $f_y = 60$ klb/plg^2 y $f'_c = 4$ klb/plg^2. Use la ecuación 10-12 del ACI para *EI*. Las columnas rectangulares se flexionan alrededor de su eje fuerte. La carga de viento no se considera sostenida.

Problema núm.	Tamaño de columna $b \times h$ (plg)	ℓ_u (pie)	klb	P_u (klb) para cargas sin considerar desplazamiento vertical	P_u (klb) debido al viento	M_{1ns} (pie-klb)	M_{2ns} (pie-klb)	M_u (pie-klb) debido al viento	ΣP_u(klb) para todas las columnas del piso	ΣP_c(klb) para todas las columnas del piso	
11.14	16 × 20	15	1.3	500	110	90	80	100	12 000	34 000	
11.15	14 × 18	12	1.4	300	80	70	75	80	10 000	30 000	(*Una respuesta:* 6 varillas #10)
11.16	16 × 20	16	1.65	500	140	110	140	120	16 500	80 000	
11.17	12 × 18	12	1.5	480	140	90	120	110	14 000	36 200	(*Una respuesta:* Se requiere columna más larga)

Problemas SI

Para los problemas **11.18** al **11.20** y las columnas riostradas con estribos dadas, seleccione las varillas de refuerzo (colocadas en dos caras). Suponga que las distancias de los bordes de la columna al c.g. de las varillas son de 75 mm en cada caso. Para poder usar las gráficas del apéndice, use $f_y = 413.7$ MPa y $f_c' = 27.6$ MPa. No olvide aplicar el factor de conversión.

Problema núm.	Tamaño de columna $b \times d$ (mm)	ℓ_u(m)	klb	P_u (kN)	P_D no factorizado (kN)	M_{1b} factorizado (kN· m)	M_{2b} factorizado (kN·m)	Curvatura	
11.18	450 × 450	4	1.0	1 800	400	80	100	Simple	
11.19	300 × 400	5	0.92	2 200	500	110	125	Doble	(*Una respuesta:* 6 varillas #32)
11.20	300 × 500	6	0.88	2 400	550	120	140	Simple	

Para los problemas **11.21** al **11.22** y las columnas no riostradas con estribos dadas, seleccione las varillas de refuerzo (colocadas en dos caras) si la distancia del borde de la columna al c.g. de las varillas es de 75 mm. $f_y = 420$ MPa y $f_c' = 28$ MPa. Recuerde aplicar el factor de conversión.

Problema núm.	Tamaño de columna $b \times h$ (plg)	ℓ_u (m)	klb	P_u (kN) para cargas sin considerar desplazamiento vertical	P_u (klb) debido al viento	M_{1ns} (kNm)	M_{2ns} (kNm)	M_u (kNm) debido al viento	ΣP_u(kN) para todas las columnas del piso	ΣP_c(kN) para todas las columnas del piso	
11.21	300 × 400	5	1.2	400	1 200	40	50	60	40 000	110 000	(*Una respuesta:* 6 varillas #32)
11.22	300 × 500	4	1.3	500	1 800	50	60	70	44 000	125 000	
11.23	350 × 600	6	1.35	600	2 500	65	90	100	50 000	156 000	(*Una respuesta:* 6 varillas #29)

12

Zapatas

12.1 INTRODUCCIÓN

Las zapatas son miembros estructurales que se usan para soportar columnas, muros y transmitir sus cargas al suelo subyacente. El concreto reforzado es un material muy adecuado para las zapatas y se usa así en edificios de concreto reforzado, de acero estructural, en puentes, torres y otras estructuras.

La presión permisible en un suelo debajo de una zapata es normalmente de unas cuantas toneladas por pie cuadrado. Los esfuerzos de compresión en los muros y las columnas de una estructura ordinaria pueden llegar a ser de cientos de toneladas por pie cuadrado. Por consiguiente, es necesario repartir estas cargas sobre la suficiente área de suelo como para que éste soporte las cargas en forma segura.

No sólo es deseable transferir las cargas de la superestructura al suelo subyacente en forma tal que no se generen asentamientos excesivos o disparejos y rotaciones, sino que también es necesario proporcionar la suficiente resistencia al deslizamiento y volteo.

Para lograr estos objetivos, es necesario transmitir las cargas soportadas a un suelo de suficiente resistencia y luego repartirlas sobre un área tal que la presión unitaria quede dentro de un intervalo razonable. Si no es posible excavar a una pequeña profundidad y encontrar un suelo satisfactorio, será necesario usar pilotes o cajones de cimentación para hacer el trabajo. Estos últimos temas no se considerarán en este texto.

Cuanto más cerca esté una cimentación a la superficie del terreno, más económico será construirla. Sin embargo, hay dos razones por las que no deben usarse cimentaciones muy poco profundas. Primero, es necesario desplantar la base de las zapatas por debajo del nivel de congelamiento para que el suelo congelado no ocasione movimientos verticales o expansiones de la cimentación al aumentar su volumen. Esta profundidad varía de 3 a 6 pies en los estados del norte de Estados Unidos y entre valores menores en los estados del sur. En segundo lugar, es necesario excavar a una profundidad suficiente a fin de encontrar un material de apoyo satisfactorio y esta profundidad puede en ocasiones ser de varios pies.

12.2 TIPOS DE ZAPATAS

Entre las diversas zapatas de concreto reforzado de uso común se cuentan: las zapatas corridas para muros, las zapatas aisladas, las zapatas combinadas, las losas de cimentación y las cabezas de pilotes. En esta sección se presentan brevemente estos tipos de zapatas; el resto del capítulo se usa para proveer información más detallada acerca de los tipos más simples de este grupo.

1. Una *zapata corrida* [figura 12.1(*a*)] es simplemente una ampliación de la parte inferior de un muro, cuya finalidad es distribuir adecuadamente la carga sobre el suelo de la cimentación. Las zapatas corridas normalmente se usan en el perímetro de un edificio y a veces bajo los muros interiores.
2. Una *zapata aislada o zapata para una sola columna* [figura 12.1(*b*)] se usa para soportar la carga de una sola columna. Éstas son las zapatas más comúnmente usadas, en particular cuando las cargas son relativamente ligeras y las columnas no están muy cercanas entre sí.



Colado del concreto, Big Dig, Boston, MA. (Steve Dunwell/The Image Bank.)

3. Las *zapatas combinadas* se usan para soportar las cargas de dos o más columnas [figura 12.1(*c*)]. Una zapata combinada puede ser económica cuando dos o más columnas fuertemente cargadas están separadas entre sí a una distancia tal que sus zapatas individuales quedarían traslapadas. Generalmente, las zapatas individuales son cuadradas o rectangulares y si se emplearan para columnas localizadas en los linderos del terreno, se extenderían más allá de éstos. Una zapata para tal columna, combinada con otra para una columna interior, puede diseñarse de manera que no sobrepase los linderos de la propiedad.
4. Una *plancha de cimentación o losa de cimentación o cimentación flotante* [figura 12.1(*d*)] es una losa continua de concreto reforzado sobre un área grande que se usa para soportar muchas columnas y muros. Este tipo de cimentación sirve cuando la resistencia del suelo es baja o las cargas de las columnas son grandes, pero no se usan pilotes o cajones de cimentación. Para tales casos, las zapatas aisladas resultarían tan grandes que sería más económico usar una losa continua sobre toda el área. El costo de la cimbra para una losa de cimentación es mucho menor que el costo de la cimbra para un gran número de zapatas aisladas. Si se diseñan zapatas individuales para cada columna y su área combinada es mayor que la mitad del área contenida dentro del perímetro del edificio, usualmente es más económico usar una sola losa continua. Este tipo de cimentación es particularmente útil para reducir los asentamientos diferenciales entre columnas; esta reducción puede ser de 50% o mayor. Para este tipo de cimentación las excavaciones suelen ser bastante profundas. La meta es retirar una cantidad de tierra aproximadamente igual al peso del edificio. Si esto se hace así, la presión neta del suelo después de construir el edificio será teóricamente igual a la que existía antes de efectuar la excavación. Así el edificio *flotará* sobre la losa.
5. Las *cabezas de pilotes* [figura 12.1(*e*)] son losas de concreto reforzado que se usan para distribuir las cargas de las columnas a grupos de pilotes.

12.3 PRESIONES REALES DEL SUELO

La presión de suelo en la superficie de contacto entre una zapata y el suelo, se supone uniformemente distribuida siempre que la carga que está arriba esté aplicada en el centro de gravedad de la zapata [figura

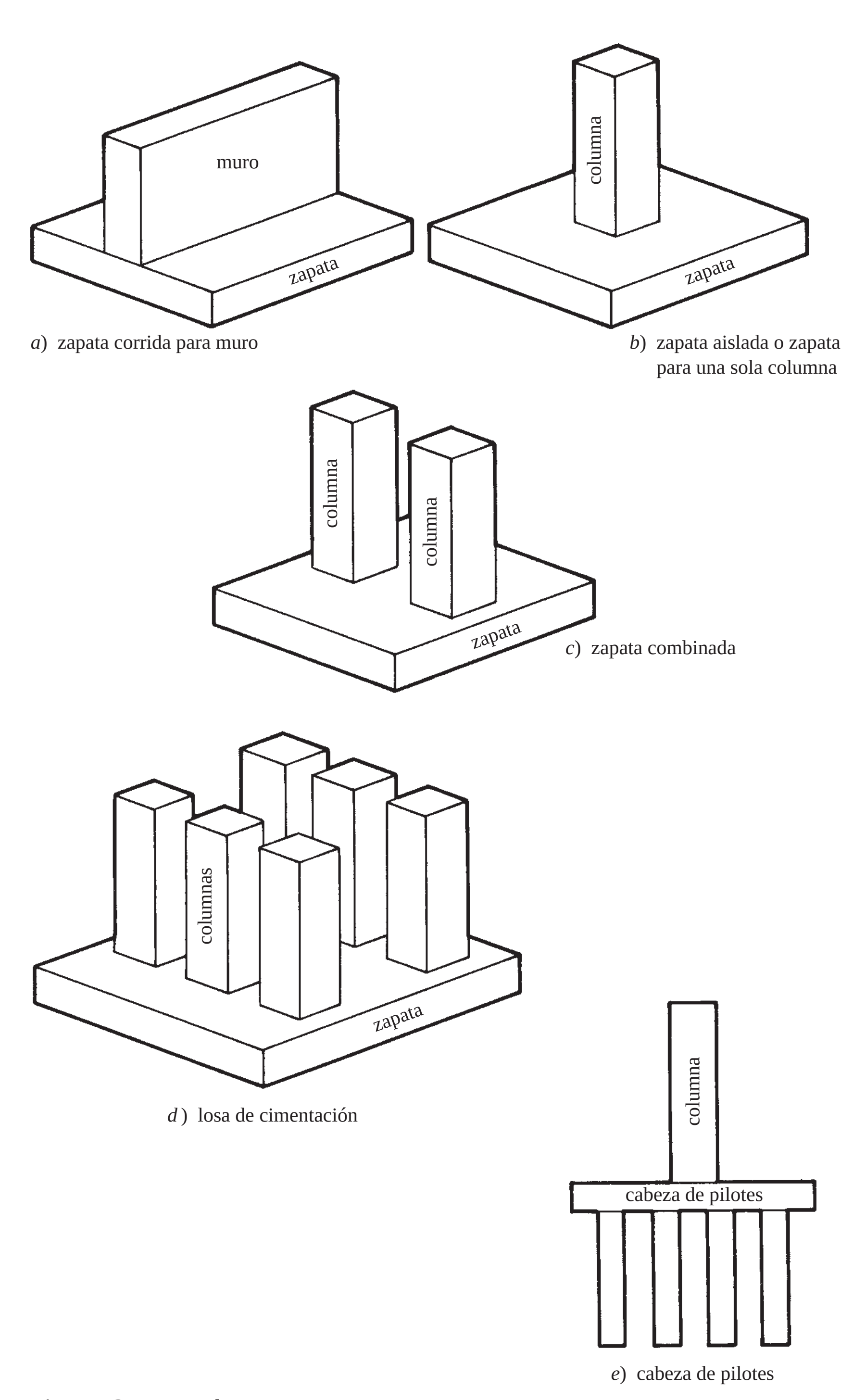


Figura 12.1 Tipos de zapatas.

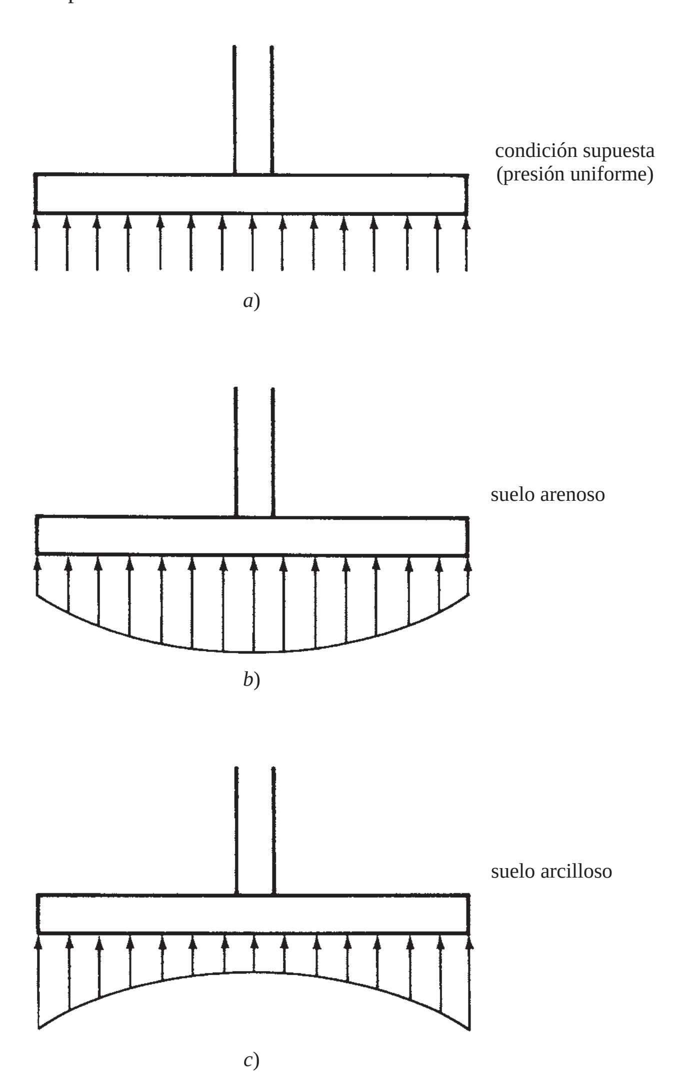


Figura 12.2 Condiciones del suelo.

12.2(*a*)]. Esta hipótesis se hace aun cuando muchas pruebas han mostrado que las presiones del suelo no están distribuidas uniformemente, debido a variaciones en las propiedades del suelo, a la rigidez de la zapata y a otros factores.

Como ejemplo de la variación de las presiones del suelo, consideremos las zapatas sobre suelos de arena y suelos de arcilla. Cuando las zapatas están soportadas por suelos arenosos, las presiones son mayores bajo el centro de la zapata y menores cerca de los bordes [figura 12.2(*b*)]. La arena en los bordes de la zapata no tiene un gran soporte lateral y tiende a moverse por debajo de los bordes en cuestión, con el resultado de que más carga es tomada cerca del centro de la zapata. Si el fondo de una zapata está localizado a cierta distancia de la superficie del terreno, un suelo arenoso proveerá un soporte bastante uniforme para la zapata, pues su movimiento lateral está restringido.

La situación justamente contraria ocurre para zapatas soportadas por suelos arcillosos. La arcilla bajo los bordes de la zapata se "pega" o tiene cohesión con el suelo arcilloso del entorno. Como consecuencia, más carga es tomada en los bordes que en el centro de la zapata. [Véase la figura 12.2(*c*).]

El proyectista debe entender claramente que la hipótesis de una presión uniforme del suelo bajo la zapata se hace con el fin de simplificar los cálculos y muy bien puede ser que la hipótesis tenga que revisarse para ciertas condiciones de los suelos.

Si la carga está aplicada excéntricamente a la zapata con respecto al centro de gravedad de ésta, se supone que la presión del suelo varía uniformemente en proporción al momento, como se ilustra en la sección 12.12 y en la figura 12.23.

12.4 PRESIONES PERMISIBLES DEL SUELO

Las presiones permisibles del suelo que se usan para diseñar la cimentación para una estructura particular, se obtienen usando los servicios de un ingeniero especializado en geotecnia. Éste determinará los valores de seguridad con base en los principios de la mecánica de suelos, en los resultados de las pruebas de los sondeos, en pruebas de carga y en otras investigaciones experimentales. Otros asuntos pueden entrar en la determinación de las presiones permisibles del suelo, como la sensibilidad del marco del edificio para acomodar la deflexión de las zapatas. También, el agrietamiento de la superestructura que resulta del asentamiento de las zapatas sería mucho más importante en un centro de artes escénicas que en un almacén.

Como tales investigaciones no siempre son factibles, la mayoría de los códigos de construcción proveen ciertas presiones aproximadas permisibles de apoyo que pueden usarse para los tipos y condiciones de suelos que se presentan en esa localidad. La tabla 12.1 muestra un conjunto de valores permisibles que son típicos de estos códigos de construcciones. Se considera que estos valores usualmente proveen coeficientes de seguridad de aproximadamente 3 contra los asentamientos severos.

La sección 15.2.2 del código ACI establece que el área requerida para una zapata debe determinarse dividiendo la carga total prevista, incluyendo el peso de la zapata, entre la presión permisible del suelo o la capacidad permisible del pilote que se determinan usando los principios de la mecánica de suelos. Se notará que esta carga total es una carga *sin factorizar* y que, sin embargo, el diseño de zapatas descrito en este capítulo se basa en el diseño por resistencia, donde las cargas se multiplican por factores de carga apropiados. Es obvio que una carga última no puede dividirse entre una presión de suelo permisible para determinar el área de apoyo requerida.

El proyectista puede manejar este problema de dos maneras. Puede determinar el área de apoyo requerida sumando las cargas vivas y muertas reales o sin factorizar y dividirlas entre la presión permisible del suelo. Una vez determinada esta área y seleccionadas las dimensiones, puede calcularse una presión última del suelo dividiendo la carga factorizada o última entre el área provista. El resto del diseño

Tabla 12.1 Presión máxima permisible del suelo.

	Presión máxima permisible del suelo	
Tipo de material	Unidades de EUA (klb/pie^2)	Unidades SI (kN/m^2)
Roca	20% de la resistencia última al aplastamiento	20% de la resistencia última al aplastamiento
Arena gruesa compacta, arena fina compacta, arcilla dura o arcilla arenosa	8	385
Arcilla semirrígida o arcilla arenosa	6	290
Arena inorgánica compacta y mezclas de limo	4	190
Arena suelta	3	145
Arcilla arenosa suave o arcilla simple	2	95
Arena inorgánica suelta y mezclas de limo	1	50
Arena orgánica suelta y mezclas de limo, humus o barro de color blanco amarillento	0	0

de la zapata puede hacerse por el método de resistencia, usando esta presión última del suelo. Este procedimiento simple se usa para los ejemplos dados aquí para el análisis de zapatas.

El comentario (15.2) del ACI de 1971 provee un método alternativo para determinar el área de zapata requerida que dará exactamente el mismo resultado que el procedimiento descrito anteriormente. Según este método alternativo, la presión permisible del suelo se incrementa a un valor último multiplicándolo por una relación igual a la usada para incrementar la magnitud de las cargas de servicio. Por ejemplo, la relación para las cargas D y L sería

$$\text{Relación} = \frac{1.2D + 1.6L}{D + L}$$

O para $D + L + W$, etcétera

$$\text{Relación} = \frac{1.2D + 1.6W + 1.0L + 0.5(L_r \text{ o } S \text{ o } R)}{D + L + W + (L_r \text{ o } S \text{ o } R)}$$

La última presión resultante en el suelo se puede dividir entre la última carga de la columna para determinar el área requerida.

12.5 DISEÑO DE ZAPATAS PARA MUROS

La teoría que se usa para diseñar vigas es aplicable al diseño de zapatas con sólo unas cuantas modificaciones. La presión hacia arriba del suelo bajo la zapata del muro en la figura 12.3 tiende a flexionar la zapata en la forma mostrada. Las zapatas se diseñan como vigas de pequeño peralte para los momentos y los cortantes existentes. En las vigas, donde las cargas son usualmente de sólo unos cuantos cientos

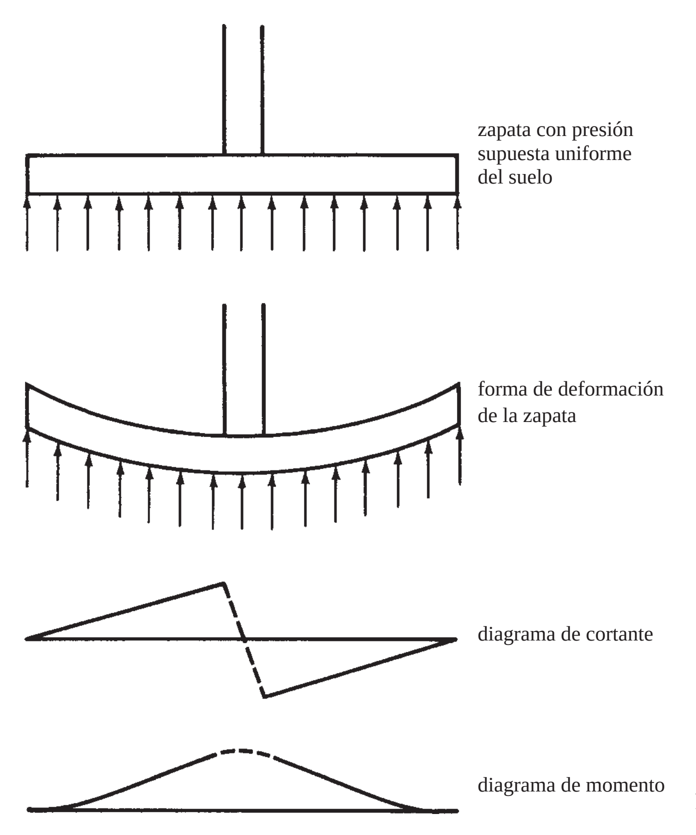


Figura 12.3

de libras por pie y los claros son bastante grandes, las dimensiones son casi siempre determinadas por momentos. En las zapatas, las cargas del suelo que las soportan pueden ser de varios miles de libras por pie y los claros son relativamente cortos. Como consecuencia, la fuerza cortante es casi siempre la que determina su espesor.

Parecería que el momento máximo en esta zapata ocurre bajo el eje del muro, pero las pruebas han mostrado que esto no es correcto por la rigidez de tales muros. Si éstos son de concreto reforzado, lo que los hace sumamente rígidos, se considera satisfactorio calcular los momentos en las caras del muro (código 15.4.2 del ACI). Si una zapata soporta un muro de mampostería que tiene mayor flexibilidad, el código establece que el momento debe tomarse en una sección a la mitad de la distancia entre la cara del muro y su eje. (Para una columna con una placa de base de acero, la sección crítica por momento se localiza a la mitad de la distancia entre la cara de la columna y el borde de la placa.)

Para calcular los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes en una zapata, es necesario calcular sólo la presión neta hacia arriba q_u causada por las cargas factorizadas arriba del muro. En otras palabras, los pesos de la zapata y del suelo sobre ella pueden despreciarse. Estos elementos causan una presión hacia arriba igual a la de sus pesos dirigidos hacia abajo que se cancelan entre sí para fines del cálculo de momentos y cortantes. De manera similar, es obvio que no hay momentos o cortantes en un libro que está recargado sobre una mesa.

Si una zapata para muro se carga hasta que falla por cortante, la falla no ocurrirá en un plano vertical en la cara del muro, sino en un plano a 45° aproximadamente con la pared, como se muestra en la figura 12.4. Evidentemente, la tensión diagonal que esperaría que causara grietas entre las dos líneas diagonales, es contrapuesta por el aplastamiento o la compresión causados por la carga hacia abajo del muro y la presión hacia arriba del suelo. Fuera de esta zona, el efecto de la compresión sobre la tensión diagonal es despreciable. Por consiguiente, para secciones que no están sometidas a esfuerzos previos, la fuerza cortante puede calcularse a una distancia d de la cara del muro (código ACI, 11.1.3.1) debido a las cargas localizadas fuera de la sección.

Suele considerarse que el uso de estribos en las zapatas es poco práctico y antieconómico. Por esta razón, el espesor efectivo de las zapatas para muros se selecciona de manera que V_u quede limitada a la fuerza cortante de diseño ϕV_c que el concreto puede tomar sin refuerzo del alma, es decir, $\phi 2\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$ (de la sección 11.3.1.1 y de la ecuación 11-3 del ACI). Aunque la ecuación para V_c contiene el término λ, sería insólito usar concreto ligero para construir una zapata. La principal ventaja del uso del concreto ligero y su costo adicional asociado es reducir el peso de la superestructura de concreto. No sería económico usarlo en una zapata. Por esta razón, el término λ no se incluye en los problemas de ejemplo para este capítulo. La siguiente expresión se usa para seleccionar los espesores de zapatas de muros:

$$d = \frac{V_u}{(\phi)(2\lambda\sqrt{f'_c})(b_w)}$$

o para unidades SI

$$d = \frac{3V_u}{\phi\lambda\sqrt{f'_c}b_w}$$

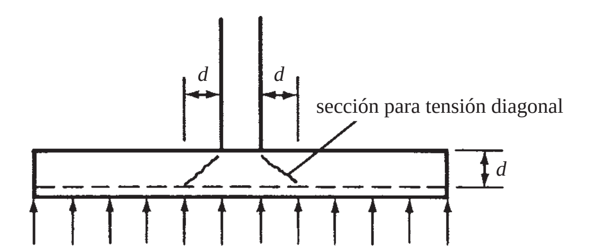


Figura 12.4

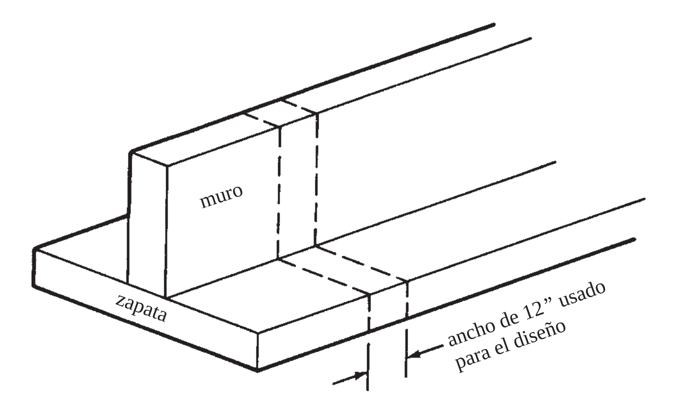


Figura 12.5

El diseño de las zapatas para muros se efectúa usando franjas de 12 plg de ancho de muro, como se muestra en la figura 12.5. Tal procedimiento se usa para el diseño de la zapata para muro del ejemplo 12.1. La sección 15.7 del código establece que el espesor de una zapata, medido arriba de las varillas de refuerzo en el fondo, no debe ser menor que 6 plg para zapatas sobre suelos y de 12 plg para zapatas sobre pilotes. Así, los espesores totales mínimos prácticos son por lo menos de 10 plg para zapatas amplias comunes y de 16 plg para las cabezas de pilotes.

En unidades del SI es conveniente diseñar las zapatas de muros para secciones de 1 m de ancho de los muros. El espesor de tales zapatas arriba del refuerzo interior no debe ser menor que 150 mm para las zapatas sobre suelos, o de 300 mm para aquellas sobre pilotes. Como consecuencia, los espesores mínimos de las zapatas son por lo menos de 250 mm para las zapatas aisladas y de 400 mm para las cabezas de pilotes.

El diseño de una zapata de muro se ilustra en el ejemplo 12.1. Aunque los ejemplos de problemas y los problemas propuestos en este capítulo usan varios valores f'_c los concretos de 3 000 y de 4 000 lb/plg^2 son comúnmente usados para zapatas y generalmente son muy económicos. Ocasionalmente, cuando es muy importante minimizar el espesor y el peso de las zapatas, pueden usarse concretos más resistentes. Sin embargo, en la mayoría de los casos, el costo adicional del concreto más resistente sobrepasará los ahorros obtenidos con el menor volumen de concreto. La categoría de exposición de la zapata puede controlar la resistencia del concreto. La sección 4.2 del ACI requiere que el concreto expuesto a sulfatos tenga valores mínimos de f'_c de 4 000 o 4 500 lb/plg^2, dependiendo de la concentración de azufre en el suelo.

La determinación del espesor de una zapata es un problema que se resuelve mediante ensayo y error. El proyectista supone un espesor efectivo *d*, calcula la *d* requerida por cortante, propone otra *d*, calcula la *d* requerida por cortante, etc., hasta que el valor supuesto y el valor calculado queden entre sí con una diferencia aproximada de 1 plg.

Puede ser que el lector no concuerde con el autor cuando éste supone un tamaño para la zapata. ¿De dónde sacó ese valor?, se preguntará. El autor parte de lo que considera un tamaño razonable de la zapata y empieza allí. Calcula la *d* requerida por cortante, tal vez encontrando que supuso un valor bastante diferente. Propone entonces otro valor de entre dos terceras partes a tres cuartos de la diferencia entre el valor propuesto y el valor calculado (para zapatas de muros) y recalcula *d*. (Para zapatas de columnas, probablemente usaría la mitad de la diferencia entre el valor propuesto y el valor calculado.) Dos pruebas son usualmente suficientes. El autor tiene la ventaja de que al preparar los problemas de muestra para este libro de texto, hizo algunos cálculos preliminares antes de proponer los valores supuestos usados en el texto.

EJEMPLO 12.1

Diseñar la zapata para soportar un muro de concreto reforzado de 12 plg de ancho con una carga muerta $D = 20$ klb/pie y una carga viva $L = 15$ klb/pie. El fondo de la zapata estará a 4 pies debajo de la rasante final, el suelo pesa 100 lb/pie^3,

la presión permisible en el suelo es $q_a = 4$ klb/pie^2 y no hay contenido apreciable de azufre en el suelo. $f_y = 60$ klb/plg^2 y $f'_c = 3$ klb/plg^2, concreto de peso normal.

SOLUCIÓN Suponga un espesor de 12 plg para la zapata ($d = 8.5$ plg). El recubrimiento se determina de acuerdo con el código (7.7.1), el cual dice que para el concreto colado y expuesto permanentemente al suelo, se requiere un mínimo de 3 plg de distancia libre afuera de cualquier varilla de refuerzo. En condiciones de exposición severa, tal como una alta concentración de sulfato en el suelo, el recubrimiento debe incrementarse de conformidad (sección 7.7.6 del código ACI).

El peso de la zapata es $\left(\frac{12}{12}\right)(150) = 150$ lb/pie^2 y el del relleno de suelo encima de la zapata es $\left(\frac{36}{12}\right)(100) = 300$ lb/pie^2. Así que 450 lb/pie^2 de la presión permisible q_a del suelo se usa para soportar la zapata misma y el relleno de suelo encima de ella. La presión de suelo restante queda disponible para soportar las cargas del muro. Se llama q_e, la presión efectiva del suelo

$$q_e = 4\,000 - \left(\frac{12}{12}\right)(150) - \left(\frac{36}{12}\right)(100) = 3\,550 \text{ lb/pie}^2$$

$$\text{Ancho requerido de zapata} = \frac{20 + 15}{3.55} = 9.86' \qquad \underline{\underline{\text{Digamos } 10'0''}}$$

Presión de apoyo para el diseño por resistencia

$$q_u = \frac{(1.2)(20) + (1.6)(15)}{10.00} = 4.80 \text{ klb/pie}^2$$

Peralte requerido por cortante a una distancia *d* de la cara del muro (figura 12.6)

$$V_u = \left(\frac{10.00}{2} - \frac{6}{12} - \frac{8.5}{12}\right)(4.80) = 18.20 \text{ klb}$$

$$d = \frac{18\,200}{(0.75)(2\sqrt{3\,000})(12)} = 18.46'', h = 18.46 + 3.5'' = 21.96'' > 12'' \qquad \underline{\underline{\text{Hacemos otro ensayo}}}$$

Suponemos una zapata de 20 plg (*d* = 16.5 plg)

$$q_e = 4\,000 - \left(\frac{20}{12}\right)(150) - \left(\frac{28}{12}\right)(100) = 3\,517 \text{ klb/pie}^2$$

$$\text{Ancho requerido} = \frac{35}{3.517} = 9.95 \text{ pie} \qquad \underline{\underline{\text{Digamos } 10'0''}}$$

Presión de apoyo para el diseño por resistencia

$$q_u = \frac{(1.2)(20) + (1.6)(15)}{10.00} = 4.80 \text{ klb/pie}^2$$

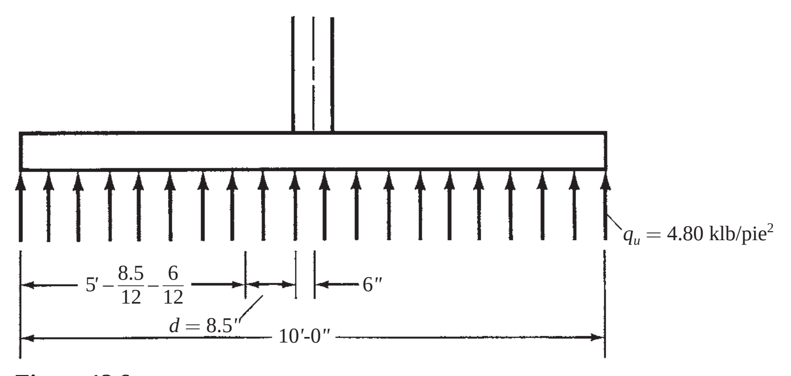


Figura 12.6

Peralte requerido por cortante

$$V_u = \left(\frac{10.00}{2} - \frac{6}{12} - \frac{16.50}{12}\right)(4.80) = 15.0 \text{ klb}$$

$$d = \frac{15\,000}{(0.75)(2\sqrt{3\,000})(12)} = 15.21'', h = 15.21 + 3.5'' = 18.71''$$

Use 20″ de peralte total

(Una revisión subsiguiente de una zapata de 19 plg muestra que no es el peralte adecuado.)

Área del acero (usando *d* = 15.5 plg)

Tomando momentos en la cara del muro,

$$\text{Longitud del voladizo} = \frac{10.00}{2} - \frac{6}{12} = 4.50'$$

$$M_u = (4.50)(4.80)(2.25) = 48.6 \text{ pie-klb}$$

$$\frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{(12)(48\,600)}{(0.9)(12)(16.5)^2} = 198.3$$

De la tabla A.12 del apéndice, $\rho = 0.00345 < 0.0136$ de la tabla A.7 del apéndice. ∴ La sección está controlada por tensión y se supone $\phi = 0.9$.

$$A_s = (0.00345)(12)(16.5) = 0.68 \text{ plg}^2$$

Use varillas #7 a cada 10″ (0.72 plg2 de la tabla A.6)

Longitud de desarrollo

De la tabla 7.1 en el capítulo 7

$$\psi_t = \psi_e = \psi_s = \lambda = 1.0$$

$$c_b = \text{recubrimiento lateral} = 3.50 \text{ plg} \leftarrow$$

$$c_b = \text{media separación entre centros de varillas} = \frac{1}{2} \times 10 = 5''$$

Haciendo $K_{tr} = 0$

$$\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = \frac{3.5 + 0}{0.875} = 4.0 > 2.5$$

∴ Use 2.5

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{3}{40} \frac{f_y}{\lambda\sqrt{f'_c}} \frac{\psi_t \psi_e \psi_s}{\frac{c + K_{tr}}{d_b}}$$

$$= \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{60\,000}{(1)\sqrt{3\,000}}\right)\frac{(1.0)(1.0)(1.0)}{2.5} = 32.86 \text{ diámetros}$$

$$\frac{\ell_d}{d_b}\frac{A_{s,\text{ req}}}{A_{s,\text{ prop}}} = (32.86)\left(\frac{0.68}{0.72}\right) = 31.03 \text{ diámetros}$$

$$\ell_d = (31.03)(0.875) = 27.15''$$

Digamos 28 plg

$$\left(\begin{array}{c}\text{Longitud de desarrollo disponible}\\ \text{suponiendo que las varillas se}\\ \text{cortan a } 3'' \text{ del borde de la zapata}\end{array}\right) = \frac{10'0''}{2} - 6'' - 3''$$

$$= \begin{pmatrix} 4'3'' \text{ de la cara del} \\ \text{muro en la sección} \\ \text{del momento máximo} \end{pmatrix} > 28'' \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

(Las varillas deben extenderse hasta un punto no menor que 3 plg o mayor que 6 plg del borde de la zapata.)

Acero longitudinal por temperatura y contracción

$$A_s = (0.0018)(12)(20) = 0.432 \text{ plg}^2 \qquad \underline{\underline{\text{Use varillas \#5 a cada } 8''}}$$

12.6 DISEÑO DE ZAPATAS CUADRADAS AISLADAS

Las zapatas de una sola columna generalmente proveen la solución más económica para la cimentación de columnas. Tales zapatas son comúnmente cuadradas en planta, pero también pueden ser rectangulares, circulares u octagonales. Las zapatas rectangulares se usan cuando el espacio disponible o las secciones transversales de las columnas son marcadamente rectangulares.

La mayoría de las zapatas constan de losas de espesor constante, como las mostradas en la figura 12.7(*a*), pero si los espesores calculados son mayores de 3 o 4 pies, puede ser más económico usar zapatas escalonadas, como se ilustra en la figura 12.7(*b*). Las fuerzas cortantes y los momentos en una zapata son obviamente mayores cerca de la columna, con el resultado de que se requiere un mayor espesor en



Zapata aislada para una columna antes de la colocación del refuerzo de la columna, Anexo de Rodas: Clemson University, 2008.

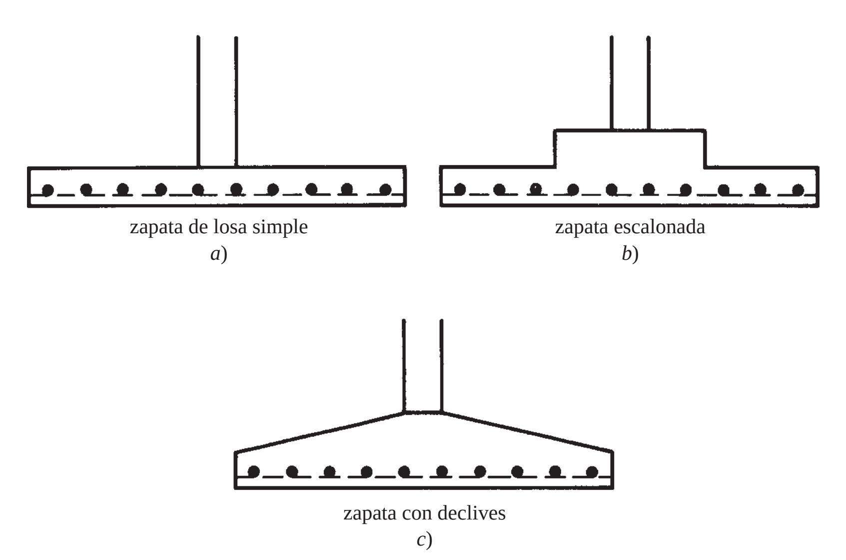


Figura 12.7 Formas de zapatas aisladas.

esa zona en comparación con las partes exteriores de la zapata. Para zapatas muy grandes, como las de estribos de puentes, las zapatas escalonadas pueden proporcionar ahorros considerables en la cantidad de concreto.

Ocasionalmente, se usan zapatas con declives [figura 12.7(*c*)] en lugar de las escalonadas, pero el costo de la mano de obra puede ser mayor. Ya sea que use una zapata escalonada o una con declives, se considera necesario verter el concreto en una sola colada para garantizar una estructura monolítica, evitando así zonas horizontales débiles a cortante. Si no se sigue este procedimiento, es preferible usar cuñas o refuerzos por fricción cortante (espigas) entre las partes para asegurar una acción monolítica. Además, cuando se usan zapatas escalonadas o con declives, es necesario revisar los esfuerzos en más de una sección de la zapata. Por ejemplo, los requisitos del área de acero y de la longitud de desarrollo deben revisarse en los escalones así como en las caras de los muros o columnas.

Antes de proceder a diseñar una zapata para columna, es necesario hacer algunos comentarios referentes a las fuerzas cortantes y los momentos. Esto se hace en los párrafos siguientes, mientras que un tema relacionado, la transferencia de carga de las columnas a las zapatas, se analiza en la sección 12.8.

Fuerzas cortantes

Deben considerarse dos condiciones debidas al esfuerzo cortante en las zapatas para columnas, independientemente de su forma. La primera es debida al cortante en un sentido o cortante de viga, el cual es el mismo que se considera para las zapatas de muros en la sección anterior. En el siguiente análisis, nos referiremos a la zapata de la figura 12.8. La fuerza cortante total (V_{u1}) que se toma a lo largo de la sección 1-1, es igual a la presión neta del suelo q_u multiplicada por el área sombreada hacia afuera de la misma sección. En la expresión que sigue, b_w es el ancho total de la zapata. El valor máximo de V_{u1}, si no se usan estribos, es igual a ϕV_c, que es $\phi 2\sqrt{f'_c} b_w d$ y el espesor máximo requerido es como sigue:

$$d = \frac{V_{u1}}{\phi 2\sqrt{f'_c} b_w}$$

La segunda condición de esfuerzo al corte es la del cortante en dos sentidos o por penetración, véase la figura 12.9. La carga de compresión de la columna tiende a extenderse en la zapata, oponiéndose a la tensión diagonal en esa zona, con el resultado de que una columna cuadrada tiende a perforar una porción de losa, que tiene la forma de una pirámide truncada. El código ACI (11.11.1.2) establece que la sección crítica para el cortante en dos sentidos se localiza a una distancia $d/2$ de la cara de la columna.

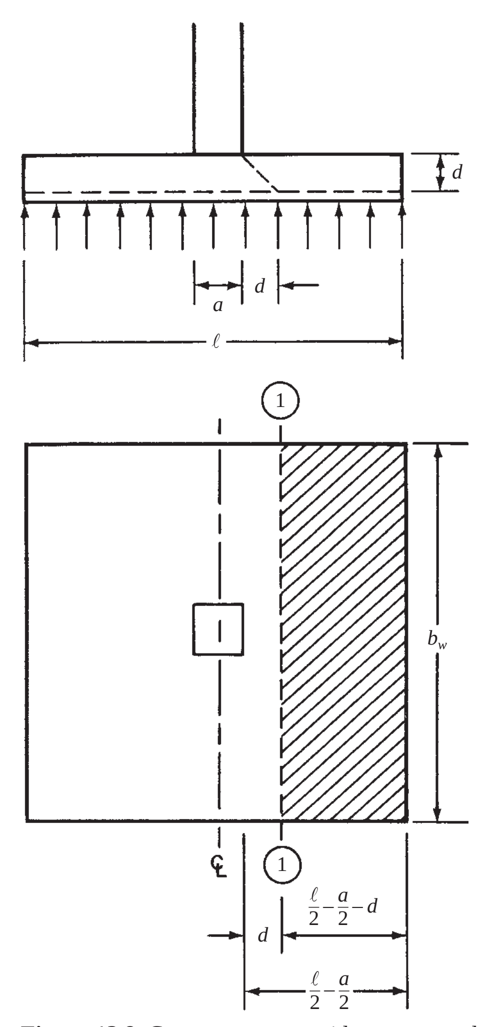


Figura 12.8 Cortante en un sentido o cortante de viga.

La fuerza cortante V_{u2} consiste en toda la presión neta hacia arriba q_u sobre el área sombreada mostrada, es decir, sobre el área fuera de la porción que tiende a ser penetrada. En las expresiones que siguen, b_o es el perímetro alrededor del área penetrada, igual a $4(a + d)$ en la figura 12.9. La resistencia nominal al cortante en dos sentidos V_c del concreto, se especifica como el menor de los valores obtenidos al sustituir en las ecuaciones aplicables que siguen.

La primera expresión es la resistencia al cortante usual por penetración

$$V_c = 4\lambda\sqrt{f'_c}b_o d \qquad \text{(Ecuación 11–35, ACI)}$$

Las pruebas han mostrado que cuando las losas rectangulares de zapatas están sometidas a flexión en dos direcciones y el lado largo del área cargada es más de dos veces la longitud del lado corto, la resistencia por cortante $V_c = 4\lambda\sqrt{f'_c}b_o d$ puede ser demasiado alta. En la expresión que sigue, β_c es la relación del lado largo de la columna al lado corto de la columna, carga concentrada, o el área de reacción.

$$V_c = \left(2 + \frac{4}{\beta_c}\right)\lambda\sqrt{f'_c}b_o d \qquad \text{(Ecuación 11–33, ACI)}$$

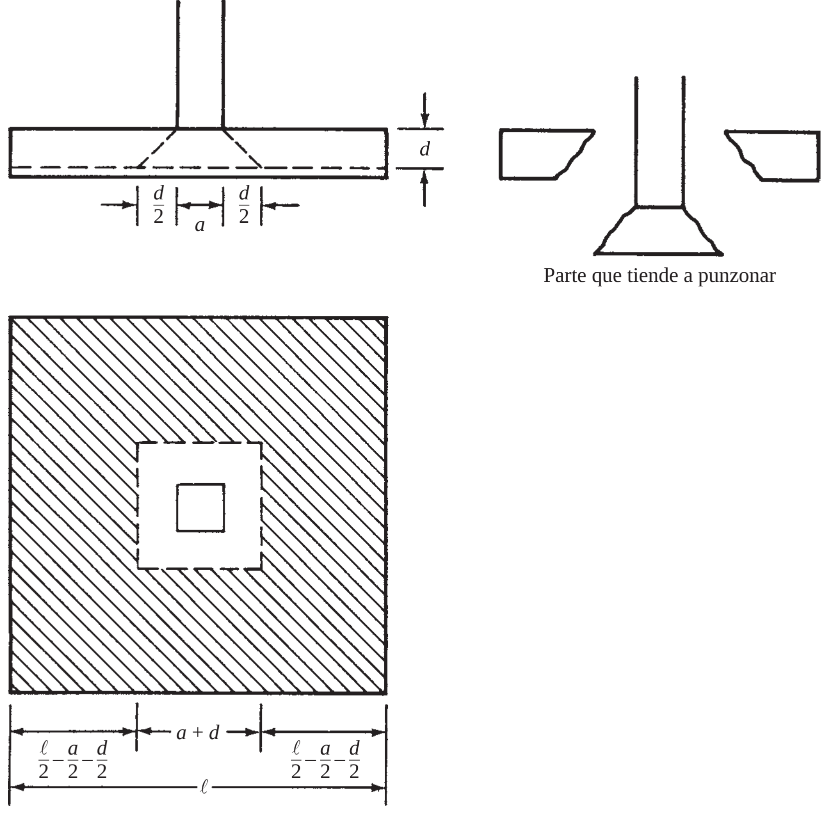


Figura 12.9 Cortante en dos direcciones o por perforación.

El esfuerzo cortante en una zapata aumenta conforme decrece la proporción b_o/d. Para tomar esto en cuenta el ACI desarrolló la ecuación 11-34. La ecuación incluye un término α_s que se usa para tomar en cuenta las variaciones en la proporción. Al aplicar la ecuación, α_s se toma igual a 40 para columnas interiores (donde el perímetro es de cuatro lados), igual a 30 para columnas de borde (donde el perímetro es de tres lados), e igual a 20 para columnas de esquina (donde el perímetro es de dos lados).

$$V_c = \left(\frac{\alpha_s d}{b_o} + 2\right)\lambda\sqrt{f'_c}\,b_o d \qquad \text{(Ecuación 11–34, ACI)}$$

El valor de d requerido para el cortante en dos sentidos es el mayor que se obtiene de las siguientes expresiones:

$$d = \frac{V_{u2}}{\phi 4\lambda\sqrt{f'_c}\,b_o}$$

$$d = \frac{V_{u2}}{\phi\left(2 + \frac{4}{\beta_c}\right)\lambda\sqrt{f'_c}\,b_o} \text{ (no aplicable a menos que } \beta_c \text{ sea} > 2)$$

$$d = \frac{V_{u2}}{\phi\left(\frac{\alpha_s d}{b_o} + 2\right)\lambda\sqrt{f'_c}\,b_o}$$

O en unidades del SI, con f'_c en MPa y b_o y d en mm,

$$d = \frac{6V_{u2}}{\phi\lambda\sqrt{f'_c}b_o}$$

$$d = \frac{6V_{u2}}{\phi\left(1 + \dfrac{8}{\beta_c}\right)\lambda\sqrt{f'_c}b_o}$$

$$d = \frac{12V_{u2}}{\phi\left(\dfrac{\alpha_s d}{b_o} + 2\right)\lambda\sqrt{f'_c}b_o}$$

Momentos

El momento flexionante en una zapata cuadrada de concreto reforzado con una columna cuadrada es el mismo respecto a ambos ejes debido a la simetría. Si la columna no es cuadrada, el mayor momento será en la dirección de la dimensión más corta de la columna. Sin embargo, debe notarse que el peralte efectivo de la zapata no puede ser el mismo en las dos direcciones, porque las varillas en una dirección se apoyan en las varillas de la otra dirección. El peralte efectivo usado en los cálculos podría ser el promedio para las dos direcciones o, más conservadoramente, el valor asociado a las varillas superiores. Este valor menor se usa en los ejemplos de este texto. Aunque el resultado implica mayor refuerzo de acero en una dirección, se considera que el acero en cualquier dirección debe ser suficiente para resistir el momento en esa dirección. Debe entenderse claramente que el exceso de acero en una dirección no compensa la escasez en la otra dirección en un ángulo de 90°.

La sección crítica de flexión se toma en la cara de una columna de concreto reforzado o a la mitad entre el eje y el borde de un muro de mampostería o a la mitad de la distancia del borde de la placa de base a la cara de la columna si se usan columnas de acero estructural (código 15.4.2).

La determinación de los peraltes de las zapatas por el procedimiento descrito aquí a menudo requerirá varios ciclos de un procedimiento de ensayo y error. Sin embargo, existen muchas tablas y manuales con los que pueden estimarse con precisión los peraltes de las zapatas. Uno de estos textos es el previamente mencionado *CRSI Design Handbook*. Además, hay muchas reglas empíricas que usan los proyectistas para hacer estimaciones iniciales del espesor, como las que dicen que éste debe ser igual a 20% del ancho de la zapata o el diámetro de la columna más 3 plg. Los programas de computadora tal como la hoja de cálculo suministrada para este capítulo resuelven fácilmente este problema.

El área de acero de refuerzo calculada para zapatas a menudo será considerablemente menor que los valores mínimos $(200b_w d/f_y)$ y $(3\sqrt{f'_c}b_w d/f_y)$ especificados para miembros a flexión en la sección 10.5.1 del ACI. Sin embargo, el código en su sección 10.5.4 establece que en las losas de espesor uniforme, el área mínima y la separación máxima de las varillas de refuerzo en la dirección de la flexión, tienen que ser iguales sólo a aquellas requeridas para el refuerzo de contracción y temperatura. La separación máxima de este refuerzo no debe exceder la distancia menor de tres veces el espesor de la zapata, o bien 18 plg. Muchos proyectistas consideran que no es apropiada la combinación de altos cortantes y bajos valores de ρ que a menudo ocurre en zapatas. Por esto, especifican áreas de acero al menos tan grandes como los mínimos por flexión de la sección 10.5.1 del ACI. Ésta es la práctica que también seguimos en este punto.

El ejemplo 12.2 ilustra el diseño de una zapata aislada para una columna.

EJEMPLO 12.2

Diseñar la zapata para una columna interior cuadrada de 16 plg de lado con estribos, que debe soportar una carga muerta $D = 200$ klb y una carga viva $L = 160$ klb. La columna está reforzada con ocho varillas del #8 y la base de la zapata estará 5 pies por abajo de la rasante, el peso del suelo es 100 lb/ft^3, $f_y = 60\,000$ lb/plg^2, $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2 y $q_a = 5\,000$ lb/pie^2.

SOLUCIÓN **Después de dos intentos previos supóngase una zapata de 24 plg (*d* = 19.5 plg, estimada para el c. g. de la *capa superior* del acero a flexión)**

$$q_e = 5\,000 - \left(\frac{24}{12}\right)(150) - \left(\frac{36}{12}\right)(100) = 4\,400 \text{ lb/pie}^2$$

$$\text{A requerida} = \frac{200 + 160}{4.400} = 81.82 \text{ pies}^2$$

$$\underline{\underline{\text{Usar una zapata de 9 pies 0 plg} \times \text{9 pies 0 plg} = 81.0 \text{ pies}^2}}$$

Presión de apoyo para el diseño por resistencia

$$q_u = \frac{(1.2)(200) + (1.6)(160)}{81.0} = 6.12 \text{ klb/pie}^2$$

Peralte requerido para el cortante por punzonado o en dos direcciones (figura 12.10)

$$b_o = (4)(35.5) = 142 \text{ plg}$$

$$V_{u2} = (81.0 - 2.96^2)(6.12) = 442.09 \text{ klb}$$

$$d = \frac{442\,090}{(0.75)(4\sqrt{3\,000})(142)} = 18.95 \text{ plg} < 19.5 \text{ plg} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$d = \frac{442\,090}{0.75\left(\dfrac{40 \times 19.5}{142} + 2\right)\sqrt{3\,000}(142)} = 10.12 \text{ plg} < 19.5 \text{ plg} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Como ambos valores de *d* son menores que el valor supuesto de 19.5, el cortante por punzonado es correcto.

Peralte requerido para el cortante en una dirección (figura 12.11)

$$V_{u1} = (9.00)(2.208)(6.12) = 121.62 \text{ klb}$$

$$d = \frac{121\,620}{(0.75)(2\sqrt{3\,000})(108)} = 13.71 \text{ plg} < 19.5 \text{ plg} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\underline{\underline{\text{Use un peralte total de 24 plg}}}$$

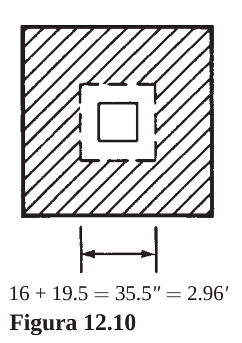


Figura 12.10

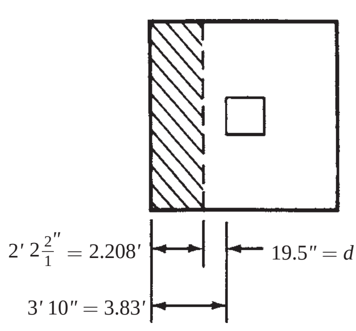


Figura 12.11

$$M_u = (3.83)(9.00)(6.12)\left(\frac{3.83}{2}\right) = 404 \text{ pie-klb}$$

$$\frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{(12)(404\ 000)}{(0.9)(108)(19.5)^2} = 131.2 \text{ lb/plg}^2, \therefore \quad \rho = 0.00225 < \rho_{\text{mín}} \text{ para flexión}$$

$$\text{Use } \rho = \text{mayor de } \frac{200}{60\ 000} = 0.0033 \leftarrow$$

$$\text{o bien } \frac{3\sqrt{3\ 000}}{60\ 000} = 0.00274$$

$$A_s = (0.0033)(108)(19.5) = 6.95 \text{ plg}^2$$

Use 9 varillas #8 en ambas direcciones (7.07 plg^2)

Longitud de Desarrollo

De la tabla 6.1 en el capítulo 6

$$\psi_t = \psi_e = \psi_s = \lambda = 1.0$$

Suponiendo una distancia entre centros de las varillas de 12″

dejando 6″ en cada lado

$$c_b = \text{recubrimiento de fondo} = 3.5''$$

$$c_b = \text{mitad de la distancia de centro a centro de las varillas} = \left(\tfrac{1}{2}\right)(12) = 6''$$

Tomando $K_{tr} = 0$

$$\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = \frac{3.5 + 0}{1.0} = 3.5 > 2.5 \qquad \therefore \text{ Usar } 2.5$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{3}{40}\frac{f_y}{\lambda\sqrt{f'_c}}\frac{\psi_t\psi_e\psi_s}{\frac{c + K_{tr}}{d_b}}$$

$$= \frac{3}{40}\frac{60\ 000}{(1.0)\sqrt{3\ 000}}\frac{(1.0)(1.0)(1.0)}{2.5}$$

$$= 32.86 \text{ diámetros}$$

$$\frac{\ell_d}{d_b}\frac{A_{s\text{ req}}}{A_{s\text{ prop}}} = (32.86)\left(\frac{6.95}{7.07}\right) = 32.30 \text{ diámetros}$$

$$\ell_d = (32.30)(1.00) = 32.30'' \qquad \text{Digamos } 33''$$

$$< \ell_d \text{ disponible} = 4'6'' - \frac{16''}{2} - 3''$$

$$= 43'' \qquad \text{OK}$$

12.7 ZAPATAS QUE SOPORTAN COLUMNAS CIRCULARES O CON SECCIÓN EN FORMA DE POLÍGONO REGULAR

Algunas veces las zapatas son diseñadas para soportar columnas circulares o columnas con formas poligonales regulares. En tales casos, la sección 15.3 del código establece que la columna puede remplazarse por un miembro cuadrado que tenga la misma área que la circular o poligonal. La columna cuadrada equivalente se usa entonces para localizar las secciones críticas para momento, cortante y longitud de desarrollo.

12.8 TRANSMISIÓN DE LA CARGA DE LAS COLUMNAS A LAS ZAPATAS

Todas las fuerzas que actúan en la base de una columna deben transferirse satisfactoriamente a la zapata. Las fuerzas de compresión pueden transmitirse directamente mediante apoyo, mientras que las fuerzas de levantamiento o tensión deben transferirse a la zapata o pedestal sustentantes por medio de varillas de refuerzo desarrolladas o mediante conectores mecánicos (usados con frecuencia en concretos precolados).

Una columna transfiere su carga directamente a su zapata de soporte sobre un área igual al área de la sección transversal de la columna. Sin embargo, la zapata que circunda a esta área de contacto proporciona un soporte lateral considerable a la parte directamente cargada, con el resultado de que el concreto cargado en la zapata puede soportar más carga. Así, para el mismo grado de concreto, la zapata puede tomar una mayor carga de apoyo que la base de la columna.

Al revisar la resistencia de la parte inferior de la columna, sólo se toma en cuenta el concreto. Las varillas de refuerzo de la columna en ese punto no pueden incluirse en la resistencia porque no están ancladas, a menos que se provean espigas, o bien las mismas varillas se prolonguen hacia la zapata.

En la base de la columna, la resistencia permisible de apoyo es $\phi(0.85f'_cA_1)$ (donde ϕ es 0.65, pero se puede multiplicar por $\sqrt{A_2/A_1} \leq 2$ por apoyo sobre la zapata (código ACI 10.14.1). En estas expresiones,



Bases de pilar para el puente entre la Isla del Príncipe Eduardo y la tierra firme de New Brunswick y Nova Scotia, Canadá. (Cortesía de Economy Forms Corporation.)

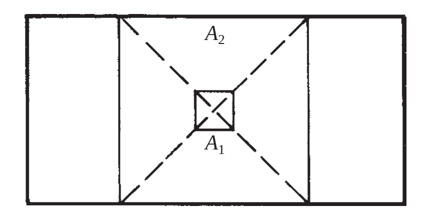


Figura 12.12

A_1 es el área de la columna y A_2 es el área de la porción de la zapata sustentante que es geométricamente similar y concéntrica con las columnas. (Véase la figura 12.12.)

Si la fuerza de apoyo calculada es mayor que el menor de los dos valores permisibles en la columna o en la zapata, será necesario tomar el exceso con espigas o con las varillas de la columna prolongadas hacia dentro de la zapata. En lugar de usar espigas, es posible también aumentar el tamaño de la columna o incrementar f'_c. Si la fuerza de apoyo calculada es menor que el valor permisible, teóricamente no son necesarias ni espigas ni la prolongación del refuerzo, pero el código (15.8.2.1) estipula que deberá proporcionarse un área mínima de espigas igual a no menos que 0.005 veces el área total de la sección transversal de la columna o el pedestal.

La longitud de desarrollo de las varillas debe ser suficiente para transferir la compresión al miembro de apoyo, según el código ACI (12.3). En ningún caso puede el área del refuerzo diseñado o de las espigas ser menor que el área especificada para el caso donde la fuerza de apoyo permisible no se exceda. Como un aspecto práctico en la colocación de espigas, debe observarse que independientemente de qué tan pequeña sea teóricamente la distancia que deben penetrar en la zapata, las espigas usualmente se doblan en sus extremos y se asientan sobre el refuerzo principal de la zapata, como se muestra en la figura 12.13. Allí las espigas pueden amarrarse firmemente en su lugar para evitar el peligro de que sean empujadas a través de la zapata durante la construcción, como fácilmente podría ocurrir por otro lado. La parte doblada de la varilla no cuenta como parte de la longitud de desarrollo a compresión (código ACI, 12.5.5). El lector debe notar nuevamente que los detalles de las varillas mostradas en esta figura no son satisfactorios para las regiones sísmicas ya que las varillas deben doblarse hacia dentro y no hacia afuera.

Una alternativa al procedimiento descrito en el párrafo precedente es colar el concreto de la zapata sin espigas y luego empujar hacia abajo las espigas en el concreto mientras está todavía en estado plástico. Esta práctica está permitida por el código en su sección 16.7.1 y es especialmente útil para zapatas de concreto simple (este procedimiento se estudiará en la sección 12.14 de este capítulo). Es esencial que las espigas se mantengan en su posición correcta mientras el concreto se encuentra en su estado plástico. Antes de que el ingeniero autorice el uso de espigas rectas como se describe aquí, debe estar seguro de que éstas se colocarán correctamente y de que el concreto a su alrededor será compactado satisfactoriamente.

El código normalmente no permite el uso de empalmes traslapados en varillas #14 y #18 a compresión, porque las pruebas han demostrado que son necesarios los empalmes soldados u otros tipos de conexiones. No obstante, basado en los años de uso con éxito, el código (15.8.2.3) establece que las varillas #14 y #18 pueden empalmarse con traslapes a las espigas (no mayores que #11) para suministrar la fuerza de transferencia a la base de las columnas, los muros o los pedestales. Estas espigas deben extenderse en el miembro sustentado una distancia no menor que ℓ_{dc} de las varillas #14 o #18 o bien la

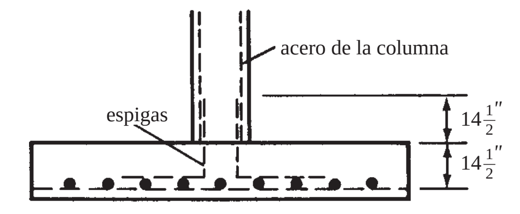


Figura 12.13

longitud de traslape a compresión de las espigas, el que sea mayor; y en la zapata una distancia no menor que ℓ_{dc} de las espigas.

Si la longitud de desarrollo calculada de las espigas es mayor que la distancia disponible entre la parte superior de la zapata y la parte superior del acero de tensión, existen tres soluciones posibles. Una o más de las siguientes alternativas pueden seleccionarse:

1. Puede usarse un mayor número de espigas más pequeñas. Los diámetros más pequeños resultarán en longitudes más pequeñas de desarrollo.
2. Puede usarse una zapata de mayor espesor.
3. Puede construirse un capitel o un pedestal encima de la zapata para proporcionar la longitud de desarrollo adicional necesaria.

Si se tienen que transferir a una zapata momentos flexionantes o fuerzas de levantamiento, de manera que las espigas queden en tensión, las longitudes de desarrollo deben satisfacer los requisitos de las varillas a tensión. Para la longitud de desarrollo por tensión dentro de la zapata, se considera eficaz un gancho en el fondo de la espiga.

Si existe momento o fuerza de levantamiento, será necesario que el proyectista cumpla con los requisitos de empalmes de la sección 12.17 del código al determinar la distancia que las espigas deben penetrar en el muro o en la columna.

Los ejemplos 12.3 y 12.4 proporcionan ejemplos breves para los cálculos de transferencia de la carga de la columna a la zapata para fuerzas verticales solamente. En las secciones 12.12 y 12.13 de este capítulo se hacen consideraciones respecto a los momentos y fuerzas laterales.

EJEMPLO 12.3

Diseñar la transferencia de carga de una columna de 16 plg × 16 plg, a una zapata de 9 pies 0 plg × 9 pies 0 plg si $D = 200$ klb, $L = 160$ klb, $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2 para la zapata y 4 000 lb/plg^2 para la columna y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2. El concreto de la zapata es de peso normal, pero la columna se construye con concreto aligerado con arena.

SOLUCIÓN Fuerza de apoyo en la base de la columna = (1.2)(200) + (1.6)(160) = 496 klb.

Fuerza permisible de apoyo en el concreto en la base de la columna

$$= \phi(0.85 f'_c A_1) = (0.65)(0.85)(4.0)(16 \times 16)$$

$$= 566 \text{ klb} > 496 \text{ klb}$$

Fuerza permisible de apoyo en el concreto de la zapata

$$= \phi(0.85 f'_c A_1)\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = (0.65)(0.85)(3.0)(16 \times 16)\sqrt{\frac{9 \times 9}{1.33 \times 1.33}}$$

$$= (0.65)(0.85)(3.0)(16 \times 16)(\text{Use } 2)^1 = 848.6 \text{ klb} > 496 \text{ klb} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

A_s mínima para espigas $= (0.005)(16 \times 16) = 1.28$ plg^2 **Use 4 varillas #6 (1.77 plg^2)**

Longitudes de desarrollo de las espigas (ACI 12.3)

Para la columna, usando $\lambda = 0.85$ para concreto aligerado con arena y $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2,

$$\ell_d = \frac{0.02 d_b f_y}{\lambda\sqrt{f'_c}} = \frac{0.02(0.75)(60\,000)}{0.85\sqrt{4\,000}} = 16.74 \text{ plg}$$

[1] $\sqrt{A_2/A_1} < 2.0$ (véase la sección 12.8 y la sección 1.14.1 del código ACI.)

Para la zapata, $\lambda = 1.0$ y $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2,

$$\ell_d = \frac{0.02 d_b f_y}{\lambda\sqrt{f'_c}} = \frac{0.02(0.75)(60\,000)}{1.0\sqrt{3\,000}} = 16.43 \text{ plg}$$

Además, el desarrollo no debe ser menor que ya sea

$$\ell_d = 0.0003 d_b f_y = 0.0003(0.75)(60\,000) = 13.50 \text{ plg}$$
$$\ell_d = 8.00 \text{ plg}$$

En resumen, las espigas deben prolongarse hacia arriba en la columna cuando menos 16.74″ y hacia abajo en la zapata cuando menos 16.43″. *Use 4 espigas #6 que penetren 17" hacia arriba en la columna y 17" hacia abajo en la zapata y que se apoyen sobre la malla de refuerzo, como se muestra en la figura 12.13.*

EJEMPLO 12.4

Diseñar la transferencia de la carga de una columna de 14 plg × 14 plg a una zapata de 13 pies 0 plg × 13 pies 0 plg con una P_u de 800 klb, $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2 en la zapata y 5 000 lb/plg^2 en la columna, ambas de peso normal y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2. La columna tiene 8 varillas del #8.

SOLUCIÓN Fuerza de apoyo en la base de la columna $= P_u = 800$ klb

$$= \phi(\text{fuerza permisible de apoyo en el concreto}) + \phi(\text{resistencia de las espigas})$$

Diseño de resistencia permisible de apoyo en el concreto en la base de la columna

$$= (0.65)(0.85)(5.0)(14 \times 14) = 541.5 \text{ klb} < 800 \text{ klb}$$ No pasa

Diseño de resistencia permisible de apoyo en el concreto de la zapata

$$= (0.65)(0.85)(3.0)(14 \times 14)\ (\text{Use } 2)^2 = 649.7 \text{ klb} < 800 \text{ klb}$$ No pasa

Por tanto, las espigas deben diseñarse para tomar el exceso de carga.

$$\text{Exceso de carga} = 800 - 541.5 = 258.5 \text{ klb}$$

$$A_s \text{ de las espigas} = \frac{258.5}{(0.9)(60)} = \underline{4.79 \text{ plg}^2} \text{ o bien } (0.005)(14)(14) = 0.98 \text{ plg}^2$$

Use 8 varillas del #7 (4.80 plg^2)

Longitud de desarrollo de las espigas del #7 en la columna

$$\ell_d = \frac{(0.02)(0.875)(60\,000)}{(1.0)\sqrt{5\,000}} = 14.85''$$
$$\ell_d = (0.0003)(60\,000)(0.875) = 15.75'' \leftarrow$$
$$\ell_d = 8''$$

Longitud de desarrollo de las espigas del #7 en la zapata (valor diferente del caso de la columna porque los valores de f'_c son distintos)

$$\ell_d = \frac{(0.02)(0.875)(60\,000)}{(1.0)\sqrt{3\,000}} = 19.42'' \leftarrow$$
$$\ell_d = (0.0003)(0.875)(60\,000) = 15.75''$$

Usar ocho espigas del #7 que se prolongan 16 plg hacia arriba en la columna y 20 plg hacia abajo en la zapata.

---

[2] $\sqrt{A_2/A_1} < 2.0$ (véase la sección 12.8 y la sección 1.14.1 del código ACI.)

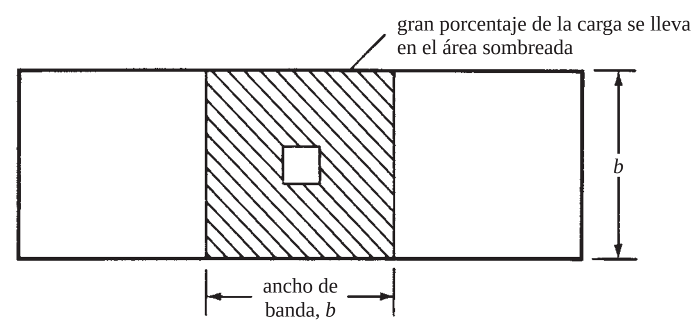


Figura 12.14

12.9 ZAPATAS RECTANGULARES AISLADAS

Como se mencionó, las zapatas aisladas pueden ser de planta rectangular si la columna tiene una forma rectangular muy pronunciada, o si el espacio disponible para la zapata obliga al proyectista a usar una forma rectangular. Si es factible una zapata cuadrada, ésta es preferible a una rectangular ya que requerirá menos material y será más fácil construirla.

El procedimiento de diseño es casi idéntico al usado para diseñar zapatas cuadradas. Después de que se ha calculado el área requerida y se han seleccionado las dimensiones laterales, los peraltes requeridos por cortante en un sentido y en dos sentidos se determinan con los métodos usuales. El cortante en un sentido suele controlar el peralte de las zapatas rectangulares, mientras que el cortante en dos sentidos suele controlar el de las zapatas cuadradas.

El siguiente paso es seleccionar el refuerzo en la dirección larga. Estas varillas longitudinales se colocan con una separación uniforme entre ellas a través de la zapata, pero no es así el caso para el refuerzo en la dirección corta. Como puede verse en la figura 12.14, el apoyo proporcionado por la zapata a la columna se concentra cerca de la mitad de la zapata, por lo que el momento en la dirección corta se concentra poco más o menos en la misma área cercana la columna.

Como resultado de este efecto de concentración, parece lógico concentrar en esta área una gran proporción del refuerzo en la dirección corta. El código (15.4.4.2) establece que cierto porcentaje mínimo del refuerzo total de la dirección corta debe colocarse en un ancho de banda igual a la longitud de la dirección corta de la zapata. La cantidad de refuerzo en esta banda se determina con la siguiente expresión, en la que β es la relación de la longitud del lado largo al ancho del lado corto de la zapata:

$$\frac{\text{Refuerzo en el ancho de la banda}}{\text{Refuerzo total en la dirección corta}} = \frac{2}{\beta + 1} = \lambda_s \qquad \text{(Ecuación 15-1, ACI)}$$

El refuerzo restante en la dirección corta debe distribuirse uniformemente sobre los extremos de la zapata, pero los autores piensan que debe cumplir por lo menos con los requisitos de contracción y temperatura del código ACI (7.12).

El ejemplo 12.5 presenta el diseño parcial de una zapata rectangular en la que se determinan los peraltes requeridos por el cortante en un sentido y en dos sentidos; después se selecciona el refuerzo.

EJEMPLO 12.5

Diseñar una zapata rectangular para una columna cuadrada interior de 18 plg de lado con una carga muerta de 185 klb y una carga viva de 150 klb. Haga la longitud del lado largo igual a dos veces la longitud del lado corto, $f_y = 60\,000$ lb/plg^2, $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2, peso normal y $q_a = 4\,000$ lb/pie^2. Suponga que la base de la zapata está a 5 pies 0 plg debajo de la rasante.

SOLUCIÓN **Supóngase una zapata de 24 plg (d = 19.5 plg)**

$$q_e = 4\,000 - \left(\frac{24}{12}\right)(150) - \left(\frac{36}{12}\right)(100) = 3\,400 \text{ lb/pie}^2$$

$$A \text{ requerida} = \frac{185 + 150}{3.4} = 98.5 \text{ pie}^2$$

Usar $7'0'' \times 14'0'' = 98.0$ pie^2

$$q_u = \frac{(1.2)(185) + (1.6)(150)}{98.0} = 4.71 \text{ klb/pie}^2$$

Verificar el peralte por cortante en un sentido (figura 12.15)

$$b = 7 \text{ pies}$$

$$V_{u1} = (7.0)(4.625)(4.71) = 152.49 \text{ klb}$$

$$d = \frac{152\,490}{(0.75)(1.0)(2\sqrt{4\,000})(84)} = 19.14'', h = d = 4.5'' = 23.64''$$

Usar 24″

Verificar el peralte por cortante en dos sentidos (figura 12.16)

$$b_o = (4)(37.5) = 150''$$

$$V_{u2} = [98.0 - (3.125)^2](4.71) = 415.58 \text{ klb}$$

$$d = \frac{415\,580}{(0.75)(1.0)(4\sqrt{4\,000})(150)} = 14.60'' < 19.5$$

OK

$$d = \frac{415\,580}{0.75\left(\frac{40 \times 19.5}{150} + 2\right)(\sqrt{4\,000})(150)} = 11.23'' < 19.5$$

OK

Si cualquiera de los dos valores de d en las dos últimas ecuaciones hubiera excedido al valor supuesto de 19.5″, habría sido necesario incrementar el valor de prueba de d y empezar nuevamente.

Diseño del acero longitudinal

$$\text{Brazo de palanca} = \frac{14}{2} - \frac{9}{12} = 6.25 \text{ pies}$$

$$M_u = (6.25)(7.0)(4.71)\left(\frac{6.25}{2}\right) = 643.9 \text{ pie-klb}$$

$$\frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{(12)(643\,900)}{(0.90)(84)(19.5)^2} = 268.8$$

$$\rho = 0.00467 (\text{de la tabla A.13 del apéndice})$$

$$A_s = (0.00467)(84)(19.5) = 7.65 \text{ plg}^2$$

Usar 10 varillas del #8 (7.85 plg^2)

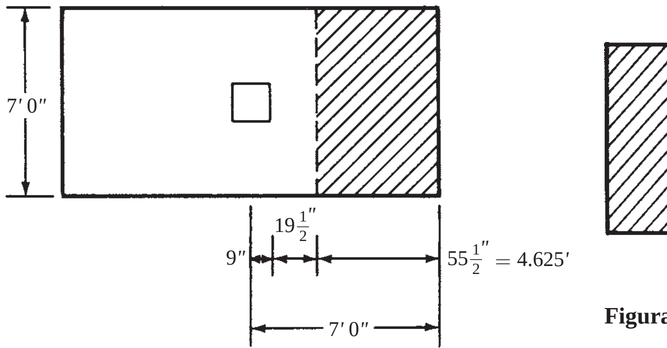


Figura 12.15

Figura 12.16

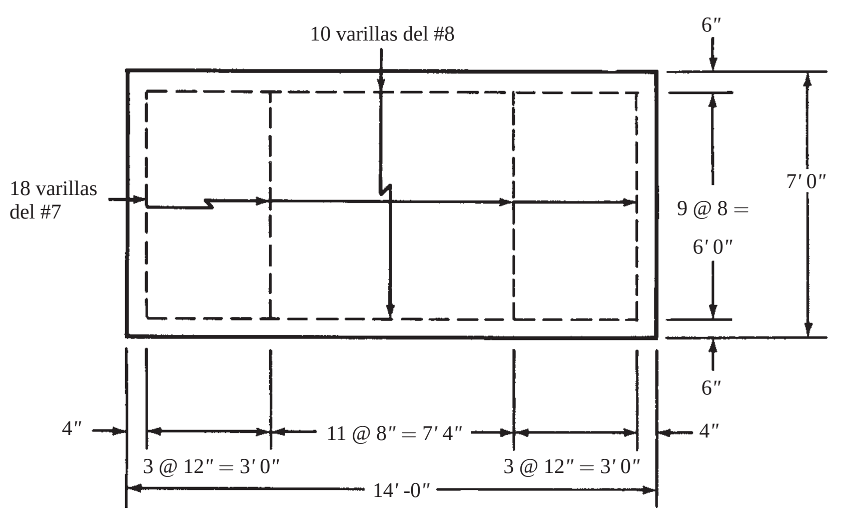


Figura 12.17 Diagrama de separación entre varillas en una zapata en dos direcciones.

Diseño del acero en la dirección corta (figura 12.17)

$$\text{Brazo de palanca} = \frac{7}{2} - \frac{9}{12} = 2.75 \text{ pies}$$

$$M_u = (2.75)(14.0)(4.71)\left(\frac{2.75}{2}\right) = 249.3 \text{ pie-klb}$$

$$\frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{(12)(249\,300)}{(0.90)(168)(19.5)^2} = 52 \text{ lb/plg}^2$$

$$\text{Usar } \rho = \text{el mayor de } \frac{200}{60\,000} = 0.0033 \leftarrow$$

$$\text{o bien } \frac{3\sqrt{4\,000}}{60\,000} = 0.00316$$

$$A_s = (0.0033)(168)(19.5) = 10.81 \text{ plg}^2$$

Usar 18 varillas del #7 (10.82 plg^2)

$$\frac{\text{Refuerzo en el ancho de la banda}}{\text{Refuerzo total en la dirección corta}} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

Usar $\frac{2}{3} \times 18 = 12$ varillas en el ancho de la banda

La revisión subsecuente de las longitudes requeridas de desarrollo es satisfactoria.

12.10 ZAPATAS COMBINADAS

Las zapatas combinadas soportan más de una columna. Un caso en que pueden usarse es cuando las columnas están tan cerca una de otra que las zapatas individuales se interferirían [figura 12.18(*a*)]. Otro uso frecuente de las zapatas combinadas es cuando una columna está muy cerca de un lindero, de manera que una zapata aislada se extendería más allá del lindero de la propiedad. En este caso, la zapata de la columna exterior puede combinarse con la de una columna interior, como se muestra en la figura 12.18(*b*).

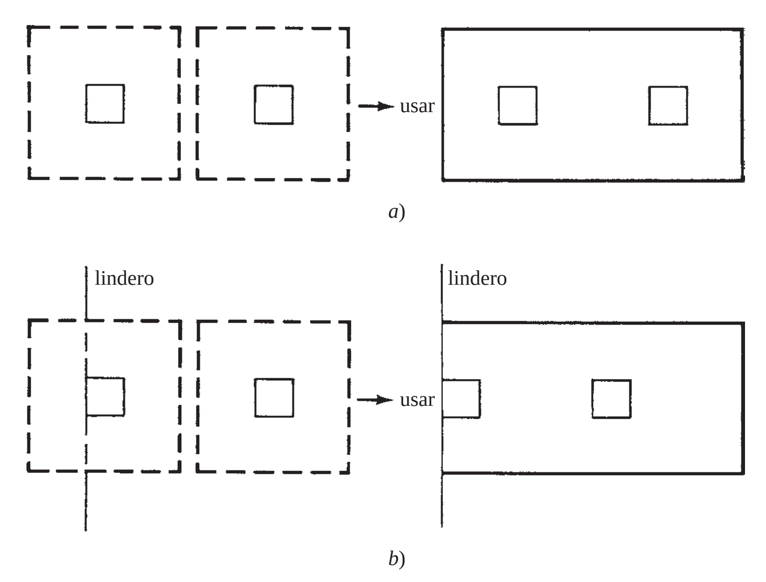


Figura 12.18 Uso de zapatas combinadas.

En algunas ocasiones, cuando una columna está cerca de un lindero y se desea combinar su zapata con la de una columna interior, la columna interior está tan alejada que no resulta económica tal solución. En tales casos pueden proporcionarse a la columna exterior contrapesos o "muertos", para tomar en cuenta la excentricidad de la carga.



Zapata combinada (dos columnas) después de haber colado el concreto de la zapata que muestra el refuerzo de la columna listo para el empalme, anexo de Rodas: Clemson University, 2008.

Puesto que es conveniente que las presiones de apoyo sean uniformes sobre toda la zapata, el centroide de ésta debe hacerse coincidir con el centroide de las cargas de la columna para impedir asentamientos diferenciales. Esto puede lograrse con zapatas combinadas que son rectangulares en planta. Si la carga de la columna interior es mayor que la de la columna exterior, la zapata puede dimensionarse de modo que su centroide quede en la posición correcta, extendiendo la proyección hacia adentro de la zapata, como se muestra en la zapata rectangular de la figura 12.18(*b*).

Otras formas de zapatas combinadas que permiten al proyectista hacer que los centroides coincidan, son las trapezoidales y las T, mostradas en las figuras 12.19(*a*) y 12.19(*b*). Las zapatas con esas formas son económicas cuando hay grandes diferencias entre las magnitudes de las cargas de las columnas o cuando los espacios disponibles no se prestan a zapatas rectangulares largas. Cuando se usan zapatas trapezoidales, las varillas longitudinales se disponen usualmente en forma de abanico con las varillas alternadas y cortadas a cierta distancia del extremo estrecho.

Probablemente se advertirá que surge un problema al establecer los centroides de las cargas y de las zapatas y tiene que decidirse si se usan cargas de servicio o cargas factorizadas. El centroide requerido de la zapata será ligeramente diferente en los dos casos. Los autores determinan las áreas y los centroides de las zapatas con las cargas de servicio (código ACI, 15.2.2), pero podrían usarse también cargas factorizadas con resultados razonables. Lo importante es ser consistente a lo largo de todo el problema.

El diseño de zapatas combinadas no ha sido estandarizado, como lo han sido los procedimientos usados para otros problemas tratados en este capítulo. Por esta razón, los proyectistas de concreto reforzado utilizan procedimientos que varían ligeramente. Uno de estos métodos se describe en los párrafos que siguen.

Primero se determina el área requerida de zapata para las cargas de servicio y las dimensiones de la zapata se escogen de manera que los centroides coincidan. Luego las diversas cargas se multiplican por los factores de carga apropiados y se dibujan los diagramas de momentos y de cortante para esas cargas a lo largo del lado mayor de la zapata. Después de trazados los diagramas de cortante y de momento, se determina el espesor por cortante en una dirección (cortante de viga) y por cortante en dos direcciones (cortante de penetración) y se escoge el refuerzo en la dirección larga.

En la dirección corta se supone que cada carga de columna se reparte sobre un ancho en la dirección larga, igual al ancho de la columna más $d/2$ a cada lado si tal longitud de zapata está disponible. Luego

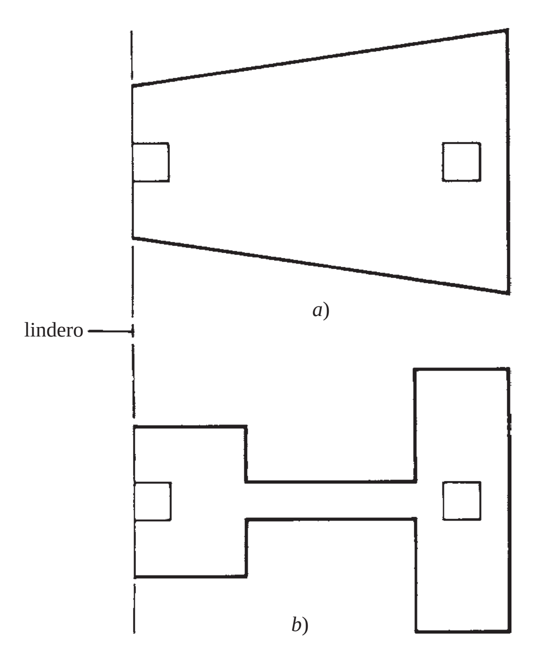


Figura 12.19 Zapatas trapezoidales y zapatas de tira o en forma de T.

se diseña el acero y se proporciona una cantidad mínima de acero por temperatura y contracción en la parte restante de la zapata.

El código ACI no especifica un ancho exacto para esas franjas transversales, por lo que los proyectistas pueden hacer sus propias hipótesis respecto a los valores razonables para ellas. El ancho escogido tendrá probablemente poca influencia en la capacidad a flexión transversal de la zapata, pero puede afectar considerablemente su resistencia al cortante en dos sentidos o por penetración. Si el refuerzo por flexión se coloca dentro del área considerada para cortante en dos direcciones, este refuerzo ligeramente esforzado reducirá el ancho de las grietas diagonales por cortante e incrementará también la trabazón del agregado a lo largo de las superficies de corte.

Aquí no se dedica espacio al diseño completo de una zapata combinada, pero se presenta el ejemplo 12.6 para mostrar aquellas partes del diseño que son diferentes de los ejemplos anteriores de este capítulo. Es pertinente un comentario sobre el diagrama de momentos. Si la longitud de la zapata no se escoge de manera que su centroide quede exactamente en el centroide de las cargas de las columnas, los diagramas de momento no cerrarán ya que las expresiones numéricas son muy sensibles. Sin embargo, se considera una buena práctica redondear las dimensiones laterales de la zapata a las 3 pulgadas más cercanas. Otro factor que impide que el diagrama de momentos cierre, es el hecho de que los factores promedio de cargas para las columnas serán distintos si las cargas de las columnas son diferentes. Podríamos mejorar un poco la situación tomando las cargas factorizadas totales de las columnas y dividiendo el resultado entre las cargas totales de trabajo para obtener un factor de carga medio. Este valor (que resulta igual a 1.375 en el ejemplo 12.6) podría entonces multiplicarse por la carga total de trabajo en cada columna y usarse para dibujar los diagramas de cortante y momento.

EJEMPLO 12.6

Diseñar una zapata rectangular combinada para las dos columnas mostradas en la figura 12.20. $q_a = 5$ klb/pie^2, $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2, peso normal y $f_y = 60$ klb/plg^2. El fondo de la zapata debe estar a 6 pies por debajo de la rasante.

SOLUCIÓN **Suponga una zapata de 27 plg (*d* = 22.5 plg)**

$$q_e = 5\,000 - \left(\frac{27}{12}\right)(150) - \left(\frac{45}{12}\right)(100) = 4\,287 \text{ klb/pie}^2$$

$$A \text{ requerida} = \frac{570}{4.287} = 132.96 \text{ pie}^2$$

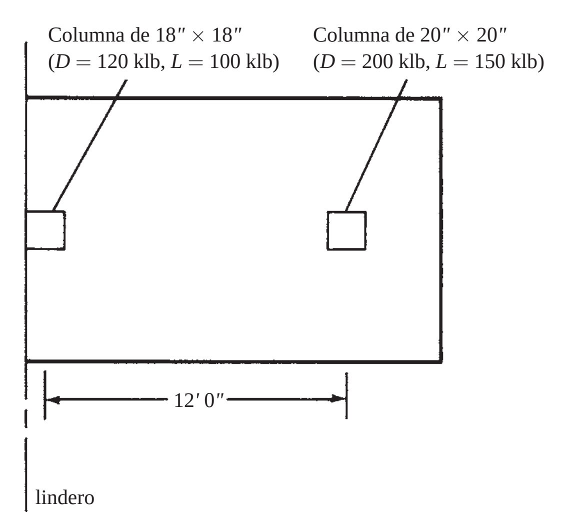


Figura 12.20

Localización del centro de gravedad de las cargas de servicio de las columnas

$$X \text{ desde el c. g. de la columna izquierda} = \frac{(350)(12)}{570} = 7.37'$$

$$\text{Distancia del lindero al c. g.} = 0.75 + 7.37 = 8.12'$$

$$\text{Longitud de la zapata} = (2 \times 8.12) = 16.24', \text{ digamos } 16'3''$$

Usar una zapata de 16′ 3″ × 8′ 3″ ($A = 134$ pies^2).

$$q_u = \frac{(1.2)(320) + (1.6)(250)}{134} = 5.85 \text{ klb/pie}^2$$

Trazado de los diagramas de fuerza cortante y de momento (figura 12.21)
peralte requerido por contante en un sentido

$$V_{u1} \text{ a una distancia } d \text{ de la cara interior de la columna derecha}$$

$$= 271.1 - \left(\frac{22.5}{12}\right)(48.26) = 180.6 \text{ klb}$$

$$d = \frac{(180\,600)}{0.75 \quad 2\sqrt{3\,000})(99)} = 22.20 < 22.5' \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Peralte requerido portara el cortante en dos sentidos (no se muestran las ecuaciones ACI 11.33 y 11.34 ya que no rigen)

$$V_{u2} \text{ en la columna derecha} = 480 - \left(\frac{42.5}{12}\right)^2(5.85) = 406.6 \text{ klb}$$

$$d = \frac{406\,600}{(0.75)\left((4)(1.0)\sqrt{3\,000}\right)(4 \times 42.5)}$$

$$= 14.56'' < 22.5'' \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$V_{u2} \text{ en la columna izquierda} = 304 - \left(\frac{29.25 \times 40.5}{144}\right)(5.85) = 255.9 \text{ klb}$$

$$d = \frac{255\,900}{0.75 \ \left((4)(1.0)\sqrt{3\,000}\right)(2 \times 29.25 + 40.5)} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$= 15.73'' < 25.5$$

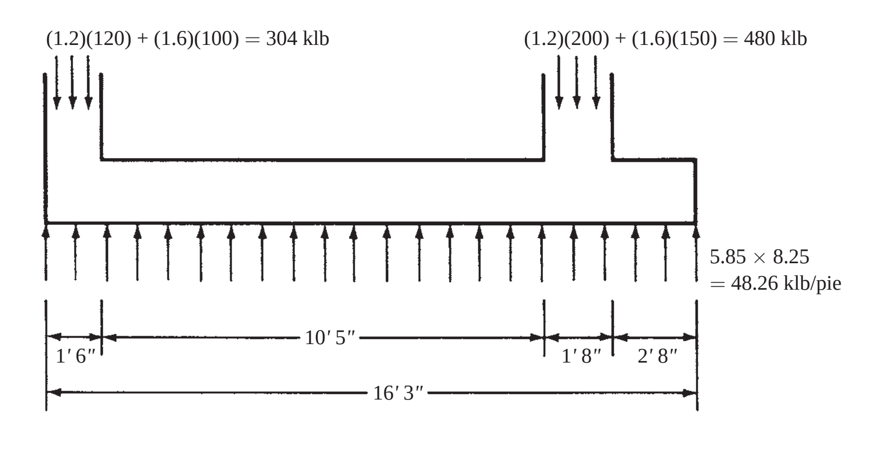
Peralte requerido para el cortante en un sentido (cortante de viga)

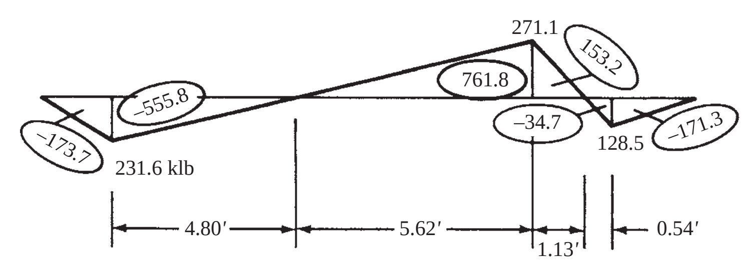
Del diagrama de cortante en la figura 12.21, la fuerza cortante más grande es 271.1 klb en la cara izquierda de la comuna derecha. A una distancia d a la izquierda de esta posición, el valor del cortante es

$$V_{u1} = 271.1 - 48.26(22.5/12) = 180.61 \text{ klb}$$

$$d = \frac{V_{u1}}{\phi 2\lambda\sqrt{f'_c}b} = \frac{180\,610}{0.75(2)(1)\sqrt{3\,000}(8.25)(12)} = 22.2 \text{ plg} < 22.5 \text{ plg} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Para esta zapata, el cortante en un sentido es más crítico que el cortante en dos sentidos (cortante de punzonado). Esto no es una sorpresa para las zapatas combinadas.





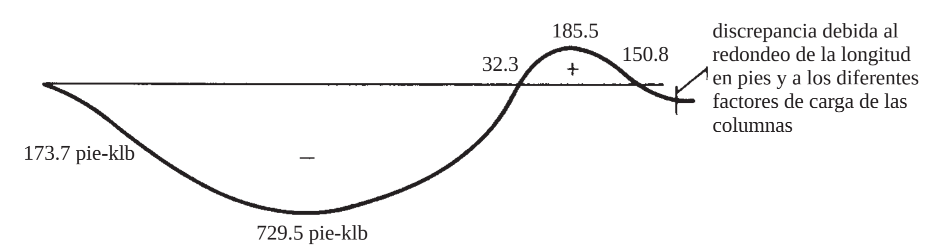


Figura 12.21

Diseño del acero longitudinal

$$-M_u = -729.5 \text{ pie-klb}$$

$$\frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{(12)(729\,500)}{(0.90)(99)(22.5)^2} = 194.1 \text{ lb/plg}^2$$

ρ de la tabla A.12 por interpolación = 0.00337

$-A_x = (0.00337)(99)(22.5) = 7.51 \text{ plg}^2$ <u>Digamos 10 #8 (7.85 plg^2)</u>

$+M_u = +171.3$ pie-klb (calculado desde el extremo derecho del diagrama de fuerza cortante, figura 12.21)

$$\frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{(12)(173\,700)}{(0.90)(99)(22.5)^2} = 46.2 \text{ lb/plg}^2$$

usar $\rho = \rho_{\text{mín}}$

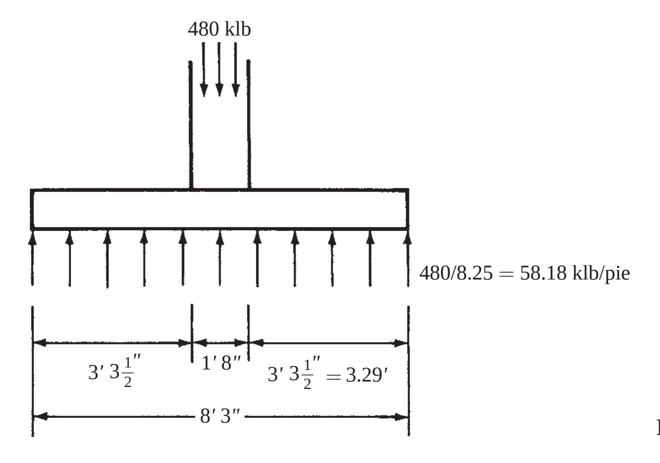


Figura 12.22

Usar el mayor de $200/f_y = 0.00333$ o bien $\dfrac{3\sqrt{3\,000}}{60\,000} = 0.00274$

$$+A_s = (0.00333)(99)(22.5) = 7.42 \text{ plg}^2$$ Usar 8 #9 (8.00 plg^2)

Diseño del acero del claro corto bajo la columna interior

$$\text{Suponemos que el acero se extiende sobre un ancho} = \text{ancho de la columna} + (2)\left(\frac{d}{2}\right)$$

$$= 20 + (2)\left(\frac{22.5}{2}\right) = 42.5''$$

Con referencia a la figura 12.22 y calculando M_u:

$$q_u = \frac{480}{8.25} = 58.18 \text{ klb/pie}$$

$$M_u = (3.29)(58.18)\left(\frac{3.29}{2}\right) = 314.9 \text{ pie-klb}$$

$$\frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{(12)(314\,900)}{(0.90)(42.5)(22.5)^2} = 195.1 \text{ lb/plg}^2$$

$p = 0.00339$ de la tabla A.12 del apéndice

$$A_s = (0.00339)(42.5)(22.5) = 3.24 \text{ plg}^2$$ Usar 6 #7 (3.61 plg^2)

Las longitudes de desarrollo son satisfactorias.

Se usa un procedimiento similar bajo la columna exterior donde el acero se reparte en un ancho igual a 18 plg más $d/2$ y no 18 plg más $2(d/2)$, porque no se dispone de suficiente espacio sobre el lado del lindero de la columna.

12.11 DISEÑO DE ZAPATAS CON ASENTAMIENTOS IGUALES

Si tres hombres caminan cargando un tronco en sus hombros (una situación estáticamente indeterminada) y uno de ellos decide bajar su hombro 1 pulgada, esto tendrá un fuerte efecto en la carga que tendrán que soportar los otros dos hombres. De la misma manera, si las zapatas de un edificio sufren asentamientos de diferente magnitud, las fuerzas cortantes y los momentos de la estructura cambiarán considera-

blemente. Además, habrá efectos perjudiciales en el ajuste de las puertas, ventanas y subdivisiones. Sin embargo, si los asentamientos de las zapatas son todos de la misma longitud, estos efectos adversos no se presentarán. Así, la meta del proyectista es lograr asentamientos de igual magnitud.

En las zapatas consideradas en las secciones anteriores se escogían sus áreas tomando la carga muerta más las cargas vivas totales y dividiendo la suma entre la presión permisible del suelo. Podría pensarse que si tal procedimiento se siguiese en todas las zapatas de una estructura, el resultado sería asentamientos uniformes en todas partes; *sin embargo, los ingenieros en geotecnia han demostrado claramente que esta manera de proceder puede conducir a resultados erróneos.*

Una mejor manera de tratar este problema es intentar diseñar las zapatas de manera tal que las *cargas usuales* en cada zapata generen aproximadamente las mismas presiones. Las cargas usuales consisten en las cargas muertas más el porcentaje promedio de las cargas vivas normalmente presentes. El porcentaje usual de las cargas vivas presentes varía de edificio a edificio. En una iglesia podría ser casi igual a cero, en un edificio de oficinas de 25 a 30% y tal vez de 75% o más en algunas bodegas o bibliotecas. Además, el porcentaje en una parte de un edificio puede ser enteramente diferente del porcentaje en otra parte del mismo (oficinas, bodegas, etcétera).

Una manera de tratar el problema es diseñando la zapata con la mayor relación de carga viva a carga muerta, calculando la presión del suelo bajo esa zapata, usando la carga muerta más el porcentaje medio estimado de carga viva y luego determinando las áreas requeridas para las otras zapatas, de manera que las presiones del suelo sean todas iguales. Debe estar claro que la carga muerta más 100% de la carga viva no debe generar bajo ninguna de las zapatas, una presión mayor que la presión permisible del suelo.

Un estudiante de mecánica de suelos se dará cuenta de que el método para determinar las presiones usuales, no es en sí mismo un mal procedimiento de diseño, pero no garantiza asentamientos iguales. Este método garantiza, cuando más, una menor magnitud de los asentamientos diferenciales. Se debe recordar que las zapatas de gran área tienden a sufrir un mayor asentamiento que las de menor área, aun cuando sus presiones unitarias en el suelo sean las mismas ya que las zapatas grandes ejercen compresiones en una mayor y más profunda masa de tierra. Hay otros factores que pueden ocasionar asentamientos diferenciales. Pueden tenerse diferentes tipos de suelo en distintas partes del edificio; parte del área puede estar en zona de relleno y otra parte en corte; puede existir intercambio entre las zapatas, etcétera.

El ejemplo 12.7 ilustra el procedimiento usual de carga para un grupo de cinco zapatas aisladas.

EJEMPLO 12.7

Determinar las áreas requeridas de zapata para las cargas dadas en la tabla 12.2, de manera que las presiones usuales del suelo sean iguales. Suponga que el porcentaje de carga viva es de 30% para todas las zapatas; $q_e = 4$ klb/pie^2.

SOLUCIÓN La relación máxima de carga viva a carga muerta se presenta en la zapata D

$$\text{Área requerida para la zapata } D = \frac{100 + 150}{4} = 62.5 \text{ pies}^2$$

Tabla 12.2 Zapatas

Zapata	Carga muerta (klb)	Carga viva (klb)
A	150	200
B	120	100
C	140	150
D	100	150
E	160	200

$$\text{Presión usual del suelo bajo la zapata } D = \frac{100 + (0.30)(150)}{62.5} = 2.32 \text{ klb/pie}^2$$

Después de calcular las áreas requeridas para las otras zapatas y determinar sus presiones de suelo bajo las cargas totales de servicio, mostramos los resultados en la tabla 12.3. Observe que en la última columna de la tabla 12.3 la zapata *D* es la única zapata que estará sometida a su esfuerzo de apoyo permisible.

Tabla 12.3 Áreas y presiones de suelo

Zapata	Carga usual = $D + 0.30L$ (klb)	Área requerida = carga usual/2.32 (pie^2)	Presión total del suelo (klb/pie^2)
A	210	90.5	3.87
B	150	64.7	3.40
C	185	79.7	3.64
D	145	62.5	4.00
E	220	94.8	3.80

12.12 ZAPATAS SOMETIDAS A CARGAS AXIALES Y MOMENTOS

Los muros y las columnas con frecuencia transmiten tanto momentos como cargas verticales a sus zapatas. Estos momentos pueden ser debidos a cargas por gravedad o a cargas laterales. Tal situación se representa con la carga vertical *P* y el momento flexionante *M* mostrados en la figura 12.23.

La transferencia de momento de las columnas a las zapatas depende de cómo se construya la conexión columna-zapata. Muchos proyectistas tratan la conexión entre columnas y zapatas como una conexión con pasador. Otros la tratan como si fuera fija y aun otros como algo intermedio. Si realmente es un pasador, no hay transferencia de momento a la zapata y esta sección del texto no es aplicable. Si, por otro lado, se trata como fija o parcialmente fija, esta sección es aplicable.

Si una junta columna–zapata debe comportarse como un pasador o una bisagra, tendría que construirse de acuerdo con ello. El refuerzo en la columna podría terminar en la base de la columna en vez de continuar en la zapata. Deben suministrarse espigas, pero éstas no serian adecuadas para suministrar una conexión de momento.

Para suministrar continuidad en la interfase columna–zapata, el acero de refuerzo tendría que continuar hasta la zapata. Normalmente esto se logra ahogando varillas con ganchos en la zapata y haciendo que se prolonguen al aire donde se ubicarán las columnas. La longitud que se prolonguen al aire debe ser

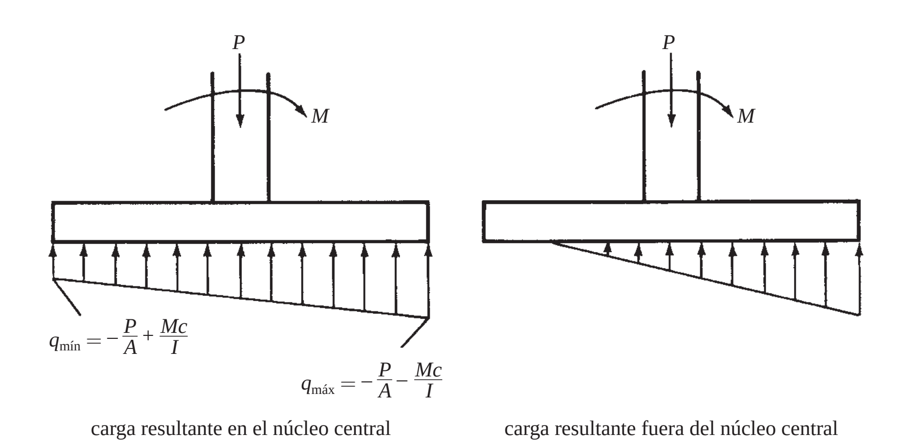


Figura 12.23

cuando menos la longitud de empalme; algunas veces ésta puede ser una longitud importante. Entonces estas varillas se pueden empalmar manual o mecánicamente con las varillas de la columna, suministrando continuidad de la fuerza de tensión en el acero de refuerzo.

Si hay una transferencia de momento de la columna a la zapata, la fuerza resultante no coincidirá con el centroide de la zapata. Por supuesto, si el momento es constante en magnitud y dirección, será posible colocar el centro de la zapata bajo la carga resultante y evitar así la excentricidad, pero fuerzas laterales como las de viento y de sismos pueden llegar desde cualquier dirección, por lo que se requieren zapatas simétricas.

El efecto del momento es producir una presión del suelo que varía linealmente y que puede determinarse en cualquier punto con la expresión

$$q = -\frac{P}{A} \pm \frac{Mc}{I}$$

En este análisis usaremos el término *núcleo central*. Si la fuerza resultante en la base de la zapata se sitúa dentro del núcleo central, el valor de $-P/A$ es mayor que $+Mc/I$ en todos los puntos y toda la base de la zapata está en compresión, como se muestra en la figura 12.23(*a*). Si la fuerza resultante afecta la base de la zapata fuera del núcleo central, el valor de $+Mc/I$ será en algunos puntos mayor que $-P/A$ y habrá alzamiento o tensión. La interfase suelo-zapata no puede resistir tensiones y la variación de la presión será como se muestra en la figura 12.23(*b*). La posición del núcleo central se puede determinar remplazando Mc/I por Pec/I, igualando a P/A y despejando e.

Si la excentricidad es mayor que este valor, el método descrito para calcular presiones en el suelo $[(-P/A) \pm (Mc/I)]$ no es correcto. Para calcular la presión en esta situación hay que tener en cuenta que el centroide de la presión hacia arriba debe coincidir, por equilibrio, con el centroide de la componente vertical de la carga hacia abajo. En la figura 12.24 se supone que la distancia desde el borde derecho de la zapata a este punto es a. Como el centroide de un triángulo está ubicado a un tercio de su base, la presión del suelo se extenderá sobre la distancia $3a$, como se muestra. Para una zapata rectangular con dimensiones $\ell \times b$, la presión total hacia arriba del suelo se iguala a la carga hacia abajo y de la expresión resultante se despeja $q_{máx}$ como sigue:

$$\left(\frac{1}{2}\right)(3ab)(q_{\text{máx}}) = P$$

$$q_{\text{máx}} = \frac{2P}{3ab}$$

El ejemplo 12.8 muestra que el área requerida para una zapata sometida a una carga vertical y a un momento lateral se puede determinar por ensayo y error. El procedimiento consiste en suponer un tamaño, calcular la presión máxima del suelo, compararla con la presión permisible, suponer otro tamaño, etcétera.

Una vez determinada el área, el resto del diseño se efectúa igual que para otras zapatas. No obstante que las fuerzas cortantes y los momentos no son uniformes, la teoría del diseño no cambia. Se calculan las cargas factorizadas, se determinan las presiones de apoyo y se evalúan las fuerzas cortantes y los

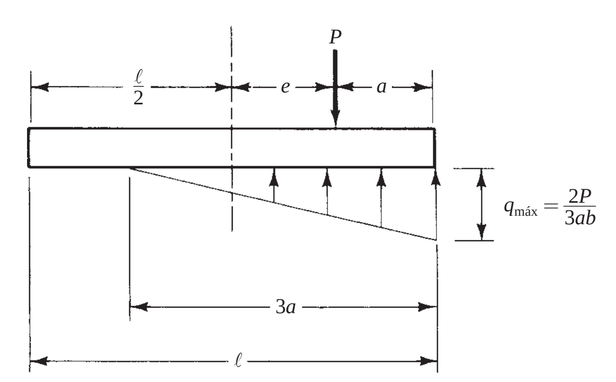


Figura 12.24

momentos. En el diseño por resistencia, la zapata debe dimensionarse para los efectos de estas cargas como se requiere en la sección 9.2 del ACI.

EJEMPLO 12.8

Determinar el ancho que necesita la zapata de un muro para que soporte las cargas: $D = 18$ klb/pie y $L = 12$ klb/pie. Además, debe transferirse un momento de 39 pie-klb de la columna a la zapata. Supóngase que la zapata es de 18 plg de espesor, que su base está a 4 pies debajo de la rasante final y que $q_a = 4$ klb/pie^2.

SOLUCIÓN **Primer intento**

Despreciando el momento $q_e = 4\,000 - \left(\frac{18}{12}\right)(150) - \left(\frac{30}{12}\right)(100) = 3\,525 \text{ lb/pie}^2$

$$\text{Ancho requerido} = \frac{18+12}{3.525} = 8.51' \qquad \underline{\underline{\text{Intente con } 9'0''}}$$

$$A = (9)(1) = 9 \text{ pies}^2$$

$$I = \left(\frac{1}{12}\right)(1)(9)^3 = 60.75 \text{ pies}^4$$

$$q_{\text{máx}} = -\frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = -\frac{30}{9} - \frac{(39)(4.5)}{60.75}$$

$$= -6.22 \text{ klb/pie}^2 > 3.525 \text{ klb/pie}^2 \qquad \underline{\underline{\text{No sirve}}}$$

$$q_{\text{mín}} = -\frac{P}{A} + \frac{Mc}{\text{I}} = -\frac{30}{9} + \frac{(39)(4.5)}{60.75} = -0.44 \text{ klb/pie}^2$$

Segundo intento

Supóngase una zapata de 14 pies de ancho (después de que una zapata de 13 pies de ancho resultó ser insuficiente)

$$A = (14)(1) = 14 \text{ pies}^2$$

$$I = \left(\frac{1}{12}\right)(1)(14)^3 = 228.7 \text{ pies}^4$$

$$q_{\text{máx}} = -\frac{30}{14} - \frac{(39)(7)}{228.7} = -3.34 \text{ klb/pie}^2 < 3.525 \text{ klb/pie}^2$$

$$q_{\text{mín}} = -\frac{30}{14} + \frac{(39)(7)}{228.7} = -0.95 \text{ klb/pie}^2 \qquad \underline{\underline{\text{Usar una zapata de } 14'0''}}$$

Observe que en ambos intentos, el signo de $q_{\text{mín}}$ es negativo, lo que significa que la interfase suelo-zapata está a compresión. Si el valor hubiera sido positivo, las ecuaciones usadas para calcular los esfuerzos no habrían sido válidas. En vez de ello, el proyectista habría tenido que usar la ecuación

$$q_{\text{máx}} = 2P/3ab$$

Las zapatas deben diseñarse para resistir todas las combinaciones aplicables de cargas de la sección 9.2 del ACI. El proyectista con experiencia frecuentemente puede estimar cuál será la más crítica, diseñar la zapata de acuerdo con ello y revisar otras para ver que la zapata pueda resistirlas. La experiencia y los programas de computadora ayudan enormemente en este proceso.

12.13 TRANSMISIÓN DE FUERZAS HORIZONTALES

Cuando es necesario transmitir las fuerzas horizontales de los muros o las columnas a las zapatas, debe usarse el método de la fricción cortante analizado en la sección 8.12 de este texto u otro medio apropiado (sección 15.8.1.4 del ACI). A veces se usan espolones de cortante (véase la figura 13.1) entre los muros o las columnas y las zapatas. No obstante, esta práctica es de dudoso valor, porque para que el espolón trabaje debe ocurrir un deslizamiento apreciable. Puede considerarse que el espolón proporciona un factor de seguridad mecánico adicional, pero no debe asignársele ninguna porción de la fuerza lateral de diseño.

El siguiente ejemplo ilustra la consideración de la transmisión de las fuerzas laterales mediante el concepto de fricción cortante.

EJEMPLO 12.9

Una columna de 14 plg × 14 plg está soportada por una zapata de 13 pies 0 plg × 13 pies 0 plg ($f'_c = 3\,000$ lb/plg^2 (peso normal) y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2 para ambas partes). Para transmitir una fuerza vertical de compresión se seleccionaron 6 espigas del #6 (2.65 plg^2) que penetran 18 plg en la columna y 18 plg en la zapata. Diseñe para una fuerza horizontal factorizada V_u de 65 klb actuando en la base de la columna. Supóngase que la superficie del concreto de la zapata no se ha puesto áspera intencionalmente antes de sobreponer la columna. Así, $\mu = 0.6\lambda = (0.6)(1.0)$ para concreto de peso normal = 0.6. (Véase la sección 11.6.4 del código ACI.)

SOLUCIÓN **Determinación del refuerzo mínimo por fricción cortante requerido por la sección 11.7.4 del ACI**

$$V_n = \frac{V_u}{\phi} = \frac{65}{0.75} = 86.7 \text{ klb}$$

$$V_n = A_{vf} f_y \mu \qquad \text{(Ecuación 11-25, ACI)}$$

$$A_{vf} = \frac{86.7}{(60)(0.6)} = 2.41 \text{ plg}^2 < 2.65 \text{ plg}^2 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Las 6 espigas #6 (2.65 plg^2) presentes pueden usarse también como refuerzo de fricción cortante. Si su área no hubiese sido suficiente, se podría haber incrementado y/o el valor de μ se podría haber aumentado también, incrementando intencionalmente la rugosidad de la superficie del concreto, tal como se describe en la sección 11.6.4.3 del código.

Verificación de las longitudes de anclaje por tensión de las espigas

El refuerzo de fricción por cortante actúa a tensión y por tanto debe tener soporte de anclaje a tensión en ambos lados del plano de corte. También debe acoplarse con el refuerzo principal en la zapata para evitar la aparición de grietas que se presentan entre el refuerzo por cortante y el cuerpo del concreto.

$$\text{Suponiendo } \frac{c + K_{tr}}{d_b} = 2.5$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{60\,000}{(1.0)\sqrt{3\,000}}\right)\frac{(1.0)(1.0)(0.8)}{2.5}\left(\frac{2.41}{2.65}\right) = 23.91 \text{ diámetros}$$

$$\ell_d = (23.91)(0.75) = 17.93 \text{ plg} \qquad \underline{\underline{\text{Digamos 18 plg}}}$$

Cálculo de la resistencia máxima permitida por el código (11.6.5)

$$V_u \leq \phi 0.2 f'_c A_c, \text{ pero no} > \phi(800 A_c)$$

$$\leq (0.75)(0.2)(3)(14 \times 14) = 88.2 \text{ klb} > 65 \text{ klb} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\text{pero no} > (0.75)(800)(14 \times 14) = 117\,600 \text{ lb} = 117.6 \text{ klb}$$

12.14 ZAPATAS DE CONCRETO SIMPLE

En ocasiones se usan zapatas de concreto simple para soportar cargas ligeras, si el suelo de soporte es de buena calidad. Con frecuencia los anchos y espesores de tales zapatas se determinan mediante reglas empíricas, tales como "el peralte de una zapata simple debe ser igual a no menos que su proyección más allá de los bordes del muro". Sin embargo, en esta sección se diseñará una zapata de concreto simple de acuerdo con los requisitos del ACI.

El capítulo 22 del código ACI se dedica al diseño de concreto estructural simple. El concreto estructural simple se define como el concreto que esta totalmente sin refuerzo o que contiene menos que las

cantidades requeridas de refuerzo mínimo que antes se especificaron aquí para miembros de concreto reforzado. La resistencia mínima a compresión permitida para tal concreto es de 2 500 lb/plg^2,* de acuerdo con las secciones 22.2.3 y 1.1.1 del ACI.

El concreto estructural simple sólo se puede usar para: 1) miembros continuamente soportados por el suelo o por otros miembros estructurales que son capaces de proporcionar soporte continuo; 2) muros y pedestales y 3) miembros estructurales con acción de arco donde se tiene sólo compresión en todos los casos de carga (ACI 22.2.1).

El código (22.7.3 y 22.7.4) establece que cuando las zapatas de concreto simple están soportadas por el suelo, no deben tener un espesor en los bordes menores de 8 plg y tampoco deben usarse sobre pilotes. Las secciones críticas por cortante y momento de las zapatas de concreto simple son las mismas que para las zapatas de concreto reforzado.

En la sección 22.5 del código ACI se especifican las resistencias nominales por flexión y cortante para el concreto estructural simple. Las proporciones de los miembros de concreto simple son casi siempre regidas por las resistencias a tensión y no por las resistencias a cortante.

En las ecuaciones que siguen $\phi = 0.60$ (9.3.5 del ACI) para todos los casos, S es el módulo de sección elástica de los miembros sin agrietar y β_c es la relación del lado largo al lado corto de la columna o área cargada. Al calcular las resistencias ya sea por flexión o por cortante, para concreto colado sobre el suelo, *el espesor total h se tomará 2 plg menor que el espesor real* (sección 22.4.7 del ACI). Este concreto se desprecia para tomar en cuenta los desniveles en la excavación para la zapata y la pérdida parcial de agua de mezclado en el suelo y otra contaminación.

Resistencia por flexión:

$$M_n = 5\lambda\sqrt{f'_c}S \qquad \text{(Ecuación 22-2, ACI)}$$

$$\phi M_n \geq M_u \qquad \text{(Ecuación 22-1, ACI)}$$

Resistencia por cortante para la acción de viga o en una dirección:

$$V_n = \frac{4}{3}\lambda\sqrt{f'_c}bh \qquad \text{(Ecuación 22-9, ACI)}$$

$$\phi V_n \geq V_u \qquad \text{(Ecuación 22-8, ACI)}$$

Resistencia por cortante para la acción de punzonado o en dos direcciones:

$$V_n = \left[\frac{4}{3} + \frac{8}{3\beta_c}\right]\lambda\sqrt{f'_c}b_oh \qquad \text{(Ecuación 22-10, ACI)}$$

$$\leq 2.66\lambda\sqrt{f'_c}b_oh$$

En unidades SI:

$$M_n = \frac{5}{12}\lambda\sqrt{f'_c}S \qquad \text{(Ecuación 22-2 M, ACI)}$$

$$V_n = \frac{1}{9}\lambda\sqrt{f'_c}bh \qquad \text{(Ecuación 22-9 M, ACI)}$$

$$V_n = \frac{1}{9}\left(1 + \frac{2}{\beta_c}\right)\lambda\sqrt{f'_c}b_oh \leq \frac{2}{9}\lambda\sqrt{f'_c}b_oh \qquad \text{(Ecuación 22-10 M, ACI)}$$

*En unidades SI es de 17 KPa.

Es obvio que una zapata de concreto simple requiere considerablemente más concreto que una reforzada. Por otra parte, se elimina el costo del refuerzo y su colocación. Además, el uso de zapatas de concreto simple permite ahorrar tiempo de construcción ya que no se requiere preparar y colocar el refuerzo antes del colado del concreto. Por tanto, las zapatas de concreto simple pueden ser en ocasiones más económicas que lo que podría esperarse.

Aun cuando las zapatas de concreto simple estén diseñadas de acuerdo con los requisitos del ACI, deben por lo menos reforzarse en la dirección longitudinal para mantener dentro de ciertos límites las grietas debidas a la temperatura y a la contracción y permitir que la zapata salve cualquier zona blanda del suelo subyacente. No obstante, el ejemplo 12.10 presenta el diseño de una zapata de concreto simple de acuerdo con las normas del ACI.

EJEMPLO 12.10

Diseñar una zapata de concreto simple para un muro de concreto reforzado de 12 plg que soporta una carga muerta de 12 klb/pie, incluido el peso del muro y una carga viva de 6 klb/pie. La base de la zapata estará a 5 pies abajo del nivel del piso terminado, $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2 y $q_a = 4\,000$ lb/pie^2.

SOLUCIÓN **Supóngase una zapata de 24 plg (véase la figura 12.25)**

$$q_e = 4\,000 - \left(\frac{24}{12}\right)(145) - \left(\frac{36}{12}\right)(100) = 3\,410 \text{ lb/pie}^2$$

$$\text{Ancho requerido} = \frac{18}{3.41} = 5.28 \text{ pies} \qquad \underline{\underline{\text{Digamos } 5'6''}}$$

Presión de apoyo para el diseño por resistencia

$$q_u = \frac{(1.2)(12) + (1.6)(6)}{5.5} = 4.36 \text{ klb/pie}^2$$

Revisión de la resistencia a la flexión, despreciando las 2 plg inferiores de la zapata

$$M_u \text{ para un ancho de zapata de 12 plg}$$

$$= (4.36)(2.25)\left(\frac{2.25}{2}\right) = 11.04 \text{ pie-klb}$$

$$S = \frac{bd^2}{6} = \frac{(12)(22)^2}{6} = 968 \text{ plg}^3$$

$$\phi M_n = \phi 5\sqrt{f'_c}S = (0.60)(5)(\sqrt{3\,000})(968)$$

$$= 159\,058 \text{ plg-lb} = 13.25 \text{ pie-klb}$$

$$> 11.04 \text{ pie-klb} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

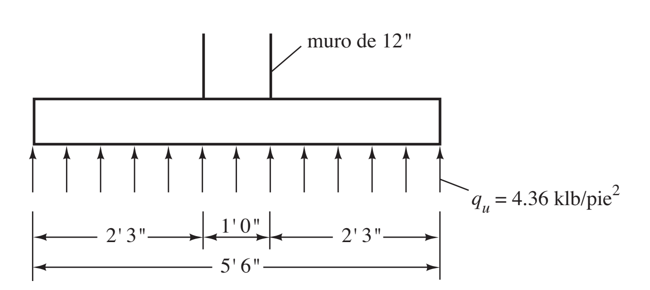


Figura 12.25

Revisión de la resistencia a cortante a una distancia de 22 plg de la cara del muro

$$V_u \text{ para 12 plg de ancho de la zapata}$$
$$= \left(2.25 - \frac{22}{12}\right)(4.36) = 1.82 \text{ klb}$$
$$V_u = \phi\left(\frac{4}{3}\right)(1.0)\sqrt{f'_c}bh = (0.60)\left(\frac{4}{3}\right)(1.0)(\sqrt{3\,000})(12)(22)$$
$$= 11\,568 \text{ lb} = 11.57 \text{ klb} > 1.82 \text{ klb} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

<u>Usar zapata de 24″</u>

Nota: en este caso funcionará una zapata de 23 plg de espesor y una zapata de 22 plg de espesor casi funcionará (dentro de 1% de capacidad de momento). Los autores prefieren usar el espesor de 24 plg por simplicidad en este caso.

12.15 EJEMPLO CON UNIDADES SI

EJEMPLO 12.11

Diseñar una zapata de concreto reforzado para soportar un muro de concreto reforzado de 300 mm de ancho con carga muerta $D = 300$ kN/m^2 y carga viva $L = 200$ kN/m^2. El fondo de la zapata deberá estar 1 m abajo del nivel terminado del terreno, el peso del suelo es de 16 kN/m^3, el peso del concreto es de 24 kN/m^3, la presión permisible del suelo q_u es de 190 MPa/m^2, $f_y = 420$ MPa y $f'_c = 28$ MPa.

SOLUCIÓN **Supóngase una zapata de 450 mm de peralte (*d* = 360 mm)**

$$q_e = 190 - \left(\frac{450}{1\,000}\right)(24) - \left(\frac{550}{1\,000}\right)(16) = 170.4 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{ancho requerido} = \frac{300 + 200}{170.4} = 2.93 \text{ m} \qquad \underline{\underline{\text{Digamos 3.00 m}}}$$

Presión de apoyo para el diseño por resistencia

$$q_u = \frac{(1.2)(300) + (1.6)(200)}{3.00} = 226.7 \text{ kN/m}^2$$

Peralte requerido por cortante a una distancia *d* de la cara del muro (véase la figura 12.26)

$$V_u = \left(\frac{3.00}{2} - \frac{150}{1\,000} - \frac{360}{1\,000}\right)(226.7) = 224.4 \text{ kN}$$

$$d = \frac{6V_u}{(0.75)\lambda(\sqrt{f'_c})(b_w)} = \frac{(6)(224.4)(10)^3}{(0.75)(1.0)(\sqrt{28})(1\,000)} = 339 \text{ mm} < 360 \text{ mm} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

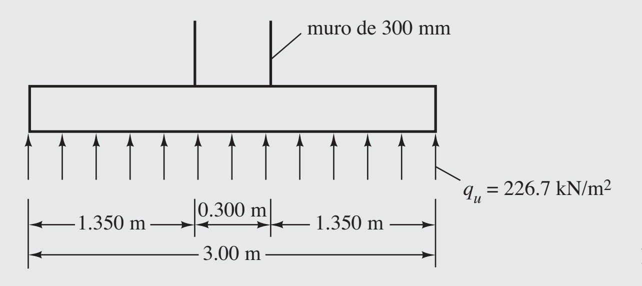


Figura 12.26

Área de acero (d = 360 mm), tomando momentos en la cara del muro

$$\text{Longitud en voladizo} = \frac{3.00}{2} - \frac{150}{1\,000} = 1.35 \text{ m}$$

$$M_u = (1.35)(226.7)\left(\frac{1.35}{2}\right) = 206.58 \text{ kN/m}$$

$$\frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{206.58 \times 10^6}{(0.9)(1\,000)(360)^2} = 1.771$$

$$\rho = 0.00439 \text{ de la tabla B.9 del apéndice}$$

$$A_s = (0.00439)(1\,000)(360) = 1\,580 \text{ mm}^2/\text{m}$$

Use varillas #22 @ 225 mm entre centros (1 720 mm^2)

Longitud de desarrollo

De la tabla 7.1 en el capítulo 7

$$\psi_t = \psi_e = \psi_s = \lambda = 1.0$$

$$\text{Suponemos } c_b = \text{recubrimiento} = 90 \text{ mm} \leftarrow$$

$$c = \text{media separación entre centros de varillas} = 112.5 \text{ mm}$$

$$\text{Haciendo } K_{tr} = 0$$

$$\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = \frac{90 + 0}{22.2} = 4.05 > 2.50 \qquad \therefore \text{ Usar } 2.5$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{9 f_y \psi_1 \psi_2 \psi_3}{10\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}\right)}$$

$$= \frac{(9)(420)(1.0)(1.0)(1.0)}{\left(10(1.0)\sqrt{28}\right)(2.5)} = 28.57 \text{ diámetros}$$

$$\frac{\ell_d}{d_b}\frac{A_{s;\,\text{req}}}{A_{s;\,\text{prop}}} = (28.57)\left(\frac{1\,580}{1\,720}\right) = 26.24 \text{ diámetros}$$

$$\ell_d = (26.24)(22.2) = 583 \text{ mm} < 1\,350 \text{ mm} - 100 \text{ mm} = 1\,250 \text{ mm disponibles} \qquad \text{OK}$$

Usar una zapata de 450 mm, 3 m de ancho con varillas #22 a 225 mm

12.16 EJEMPLOS CON COMPUTADORA

EJEMPLO 12.12

Repetir el ejemplo 12.1 usando las hojas de cálculo de Excel suministradas para el capítulo 12.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo del capítulo 12 y la hoja de cálculo *Wall Footing* (zapatas para muro). Ingrese los valores solamente en las celdas sombreadas en amarillo, comenzando en el lado izquierdo de la hoja de trabajo. Al ingresar "*intento para h*" (*trial h*), estime un valor razonable. En este caso, $h = 12$ plg es el primer intento. Basándose en esta hipótesis, se calculan d, q_e y $\ell_{\text{mín}}$. Observe el ancho de zapata $\ell_{\text{mín}}$.(9.86 pies) e ingrese un valor que sea más práctico y ligeramente mayor para el ancho real en la siguiente celda para ℓ (10.0 pies). Ahora observe los valores de d_{cortante} (d_{cortante}) y h_{cortante} (h_{cortante}) unas cuantas celdas abajo. La respuesta teórica correcta para h_{cortante} está situada entre el *intento para h* y h_{cortante}. Así es que se encuentra entre *12 plg* y *21.96 plg*. Divida la diferencia y regrese a *intento para h* con un valor de *intento para h* = 16 plg. El ancho de la zapata puede permanecer en 10 pies y h_{cortante} es ahora de 20.34 plg. Nuevamente divida la diferencia, e ingrese *intento para h* = 19 plg. Ahora $h_{\text{cortante}} = 19.12$ plg. Pueden evitarse la prueba y error usando la modalidad de buscar el *Goal seek* (objetivo). En el primer ciclo, después de intentar $h = 12$ plg, regrese a la celda llamada intento de $h - h_{\text{cortante}}$. Teóricamente este valor debería ser cero. Resalte esta celda, vaya a *Tools* (herramientas) en la barra del menú y seleccione *Goal seek* del menú abatible. En "*To value*" ("para el valor") ingrese 0, y en "*By changing cell*" ("cambiando de celda") ingrese C14. Haga clic en OK

y la ventanilla de estado dice que hay una solución. Seleccione OK y observe que las celdas C14 y C22 contienen ahora ambas el valor de 19.09 plg. Esto puede ser más rápido que el método de prueba y error, pero no hay necesidad de la precisión de la respuesta provista. Cada uno de los dos métodos conduce a un peralte de 20 plg para la zapata.

Ahora vaya al lado derecho de la hoja de trabajo e ingrese la selección de $h = 20$ plg. Se calcula el área requerida del acero de refuerzo y se exhibe una lista de selecciones posibles de tamaños de las varillas y separación teórica. Escoja el que prefiera, asegurándose de redondear la separación a un valor práctico. Si se seleccionan varillas del #7, la separación teórica de 10.55 plg se redondea a 10 plg (la misma respuesta que el ejemplo 12.1).

En seguida se muestra una imagen de la pantalla del software para el primer ciclo con un intento de $h = 12$ plg.

Diseño de zapata para muro

P_D =	20	klb/pie
P_L =	15	klb/pie
P_u =	48	klb/pie
t =	12	plg
recubrimiento =	3	plg
f'_c =	3 000	lb/plg^2
γ_c =	145	lb/pie^3
γ_s =	100	lb/pie^3
f_y =	60 000	lb/plg^2
λ =	1.00	
q_a =	4.00	lb/pie^2
$d_{drasante}$ =	4.00	pie
intento de h =	12.00	plg
d =	8.50	plg
q_e =	3.55	lb/pie^2
$\ell_{mín}$ =	9.86	pie
ℓ =	10	pie
q_u =	4.8	lb/pie^2
V_u =	18.20	klb/pie
$d_{cortante}$ =	18.46	plg
$h_{cortante}$ =	21.96	plg
intento de $h - h_{cortante}$ =	9.96	plg

seleccione h =	20	plg
d =	16.50	plg
M_u =	48.6	pie-klb
R_n =	198.3471	lb/plg^2
ρ =	0.00345	
$A_{s\ flexión}$ =	0.682	plg^2/pie
$A_{s\ t\&s}$ =	0.432	plg^2/pie
$A_{s\ mín}$ =	0.660	plg
A_s =	0.682	plg^2/pie

	$s_{teórica}$	
#3	1.93	plg
#4	3.52	plg
#5	5.45	plg
#6	7.74	plg
#7	10.55	plg
#8	13.90	plg
#9	17.59	plg

Seleccione un tamaño de varilla y una separación de la tabla de arriba.

EJEMPLO 12.13

Repetir el ejemplo 12.2 usando las hojas de cálculo de Excel suministradas para el capítulo 12.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo del capítulo 12 y la hoja de trabajo *Square Footing* (zapata cuadrada). Ingrese valores solamente en las celdas sombreadas en amarillo, comenzando en el lado izquierdo de la hoja de trabajo. Al ingresar "intento de h", estime un valor razonable. En el ejemplo 2 se usó un valor inicial de $h = 24$. Ésta resultó ser la respuesta correcta, lo que generalmente no es el caso. Escojamos un valor de $h = 18$ plg para ilustrar el uso de la capacidad de la hoja de cálculo para converger en la respuesta correcta. Observe que $\ell_{mín}$ es 9.02 pies y se seleccionó un valor de $\ell = 9.00$ pies. Esta selección ligeramente no conservadora es consistente con lo que se hizo en el ejemplo 12.2. Ahora observe el lado superior derecho de la hoja de trabajo bajo el cortante en dos direcciones. Un valor de $h_2 = 28.17$ plg significa que el intento de h de 18 plg no es suficiente. Una mirada rápida al cortante en un sentido muestra $h_1 = 21.32$ plg. Como h_2 es mayor, el cortante en dos sentidos es más crítico. El valor correcto de h está entre 18 plg y 28.17 plg. Regrese al intento de h y divida la diferencia ingresando 23 plg. Una mirada rápida a los valores requeridos de h_2 y h_1 muestra que esta selección es aceptable para el cortante en un sentido, pero no para el de dos sentidos, que necesita $h_2 = 24.14$ plg. Ahora ingrese un intento de h de 24 plg y tanto h_1 como h_2 están excedidos, indicando $h = 24$ plg es suficiente para el cortante. Usted también puede hacer esto usando *Goal seek* (búsqueda de objetivo) como se describió en el ejemplo 12.12.

Vaya a la parte inferior de la hoja de trabajo e ingrese 24 plg debajo de seleccionar h. Se calcula el valor requerido de A_s en ambas direcciones y se exhibe una tabla de posibles selecciones. Una de las selecciones es nueve varillas del #8, la misma que se seleccionó en el ejemplo 12.2.

En seguida se muestra una imagen de la pantalla del software para el último ciclo con un intento de $h = 12$ plg.

Diseño de una zapata cuadrada para una columna

P_D =	200	klb
P_L =	160	klb
P_u =	496	klb
a =	16	plg
b =	16	plg
recubrimiento =	3	plg
f'_c =	3 000	lb/plg²
γ_c =	145	lb/pie³
γ_s =	100	lb/pie³
f_y =	60 000	lb/plg²
λ =	1.00	
q_a =	5.00	klb/pie²
$d_{drasante}$ =	5.00	pie
intento de h =	24.00	plg
d =	19.50	plg
q_e =	4.40	klb/pie²
ℓ_{min} =	9.05	klb/pie²
ℓ =	9	pie
q_u =	6.12	klb/pie²

Cortante en dos direcciones

V_{u2} =	442.4	klb
b_o =	142	plg
α_s =	40.00	
β_c =	1	
$d_{2\ cortante}$ =	18.96	plg
$d_{2\ cortante}$ =	12.6405	plg
$d_{2\ cortante}$ =	10.12	plg
d_2 =	18.96	plg
h_2 =	23.46	plg
intento de $h - h_{2\ cortante}$ =	0.54	

Cortante en un sentido

V_{u1} =	121.70	plg²
$d_{1\ cortante}$ =	13.72	plg
$h_{1\ cortante}$ =	18.22	plg
intento de $h - h_{1\ cortante}$ =	5.78	plg

seleccionar h =	24	plg
d =	19.50	plg

M_u =	404.914	pie-klb
R_n =	131.464	lb/plg²
ρ =	0.00225	
$A_{s\ flexión}$ =	4.74	plg²
$A_{s\ t\&s}$ =	4.67	plg²
$A_{s\ mín}$ =	7.02	plg²
A_s =	7.02	plg²

	Teórica	*Núm. de varillas*	*Separación, plg*
#4	35.10	36	3.03
#5	22.65	23	4.67
#6	15.95	16	6.56
#7	11.70	12	8.85
#8	8.89	9	11.51
#9	7.02	8	14.36
#10	5.53	6	17.92

Seleccione un tamaño de varilla y número de varillas de la tabla de arriba, redondeando al siguiente entero.

PROBLEMAS

En los problemas 12.1 a 12.30, suponga que el concreto reforzado pesa 150 lb/pie³, el concreto simple 145 lb/pie³ y el suelo 100 lb/pie³.

Zapatas de muro

En los problemas 12.1 a 12.5, diseñe zapatas para muros con los valores dados. Los muros son de concreto reforzado.

Problema	Espesor del muro (plg)	D (klb/pie)	L (klb/pie)	f'_c (klb/plg²)	f_y (klb/plg²)	q_a (klb/pie²)	Distancia del fondo de la zapata al piso terminado (pies)
12.1	14	15	12	4	60	3	3
12.2	14	21	20	4	60	4	4
12.3	15	15	18	5	60	5	5
12.4	15	24	30	4	60	4	3
12.5	12	10	8	4	60	5	3

(*Respuesta al problema 12.1:* zapata de 15 plg con 10 pies 3 plg de ancho y acero principal #7 @ 9 plg)
(*Respuesta al problema 12.3:* zapata de 15 plg con 7 pies 6 plg de ancho y acero principal #5 @ 6 plg)
(*Respuesta al problema 12.5:* zapata de 10 plg con 4 pies 6 plg de ancho y acero principal #5 @ 11 plg)

Repita el problema 12.1 si se emplea un muro de mampostería.

Zapatas de columna

En los problemas 12.7 al 12.12, diseñe zapatas cuadradas para columnas aisladas con los valores dados. Todas las columnas son columnas interiores.

Problema	Dimensiones de la columna (plg)	D (klb)	L (klb)	f'_c (klb/plg^2)	f_y (klb/plg^2)	q_a (klb/pie^2)	Distancia del fondo de la zapata al nivel del piso terminado (pie)
12.7	12 × 12	100	160	4	60	4	4
12.7	12 × 12	100	80	3	60	5	5
12.7	15 × 15	160	150	4	60	4	4
12.7	15 × 15	150	120	3	60	4	4
12.7	16 × 16	110	100	3	60	5	5
12.12	Redonda, diámetro de 18″	240	140	4	60	5	6

(*Respuesta al problema 12.7:* zapata de 21 plg, 9 pies 0 plg × 9 pies 0 plg con 8 varillas del #8 en ambas direcciones.)
(*Respuesta al problema 12.9:* zapata de 22 plg, 9 pies 6 plg × 9 pies 6 plg con 12 varillas del #7 en ambas direcciones.)
(*Respuesta al problema 12.11:* zapata de 18 plg, 7 pies 0 plg × 7 pies 0 plg con 7 varillas del #7 en ambas direcciones.)

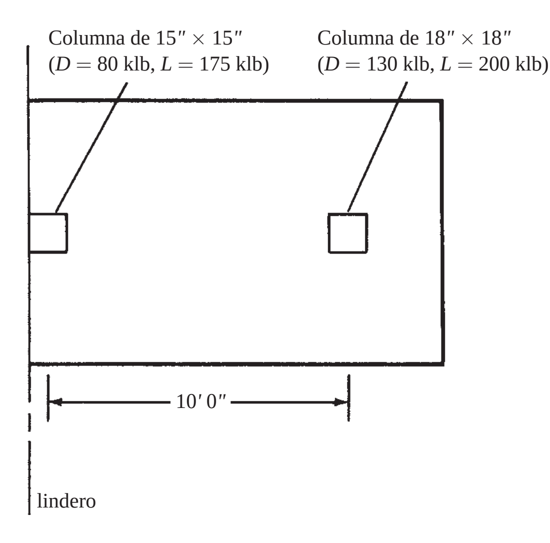
12.13 Diseñe la transferencia de la carga de una columna de 16″ × 16″ con 6 varillas #8 (D = 200 klb, L = 350 klb) a una zapata de 8 pies 0 plg × 8 pies 0 plg. f'_c = 4 klb/plg^2 y 5 klb/plg^2 para la columna. f_y = 60 klb/plg^2. (*Resp.* 4 #6, 13 plg en la zapata, 12.5 plg en la columna.)

12.14 Repita el problema 12.7 para una zapata rectangular con un lado de la zapata limitado a 7 pies.

12.15 Diseñe una zapata con un lado limitado a 7 pies para lo siguiente: columna de borde de 12 plg × 12 plg, D = 130 klb, L = 155 klb, f'_c = 3 000 lb/plg^2, f_y = 60 000 lb/plg^2, q_a = 4 klb/pie^2 y una distancia de la parte superior del relleno al fondo de la zapata = 4 pies. (*Resp.* zapata de 7 pies 0 plg × 11 pies 8 plg, peralte 24 plg, 7 varillas #8 en la dirección larga.)

12.16 Diseñe una zapata limitada a un ancho máximo de 7 pies 0 plg para lo siguiente: columna interior 15 plg × 15 plg, D = 180 klb, L = 160 klb, f'_c = 4 000 lb/plg^2, f_y = 60 000 lb/plg^2, q_a = 4 klb/pie^2 y una distancia de la parte superior del relleno al fondo de la zapata = 5 pies.

12.17 Diseñe una zapata rectangular combinada para las dos columnas mostradas en la figura acompañante. El fondo de la zapata está a 5 pies abajo del nivel del piso terminado, f'_c = 3.5 klb/plg^2, f_y = 50 klb/plg^2 y q_a = 5 klb/pie^2. (*Resp.* 10 pies 6 plg × 12 pies 9 plg, 26 plg de peralte, con 11 varillas #9 en la dirección larga.)



12.18 Determine las áreas requeridas de zapatas para las cargas dadas en la tabla acompañante, de manera que las presiones usuales del suelo sean iguales. Suponga q_e = 5 klb/pie^2 y un porcentaje usual de carga viva de 30% en todas las zapatas.

Zapata	Carga muerta	Carga viva
A	120 klb	200 klb
B	130 klb	170 klb
C	120 klb	200 klb
D	150 klb	200 klb
E	140 klb	180 klb
F	140 klb	200 klb

Zapatas con momentos

En los problemas 12.19 y 12.20, determine el ancho requerido para las zapatas de muro. Suponga que las zapatas tienen espesores totales de 24 plg.

Problema	Espesor del muro de concreto reforzado	D	L	f'_c	f_y	q_a	Momento	Espesor de la zapata, h (plg)	Distancia del fondo de la zapata al piso terminado
12.19	12″	14 klb/pie	18 klb/pie	4 klb/plg^2	60 klb/plg^2	4 klb/pie^2	32 pie/klb	18	4′
12.20	14″	16 klb/pie	24 klb/pie	3 klb/plg^2	60 klb/plg^2	4 klb/pie^2	50 pie/klb	24	5′

(*Respuesta al problema 12.19:* 15 pies 0 plg.)

12.21 Repita el problema 12.13 si una fuerza lateral $V_u = 100$ klb actúa en la base de la columna. Use el concepto de fricción cortante. Suponga que al concreto de la zapata no se le ha aumentado intencionalmente la rugosidad antes de colar la columna y que se usa concreto de peso normal. ($\mu = 0.6\lambda$.) (*Resp*. 6 espigas #8, penetrando 27 plg en la zapata y 24 plg en la columna.)

12.22 Repita el problema 12.21 usando concreto con rugosidad intencionalmente aumentada ($\mu = 1.0\lambda$).

Zapatas de concreto simple

En los problemas 12.22 y 12.23, diseñe zapatas de concreto simple para muros de espesor uniforme.

Problema	Espesor del muro de concreto reforzado	D	L	f'_c	q_a	Distancia del fondo de la zapata al piso terminado
12.23	12″	16 klb/pie	14 klb/pie	4 klb/plg^2	5 klb/pie^2	4′
12.24	14″	12 klb/pie	10 klb/pie	3 klb/plg^2	4 klb/pie^2	5′

(*Respuesta al problema 12.23:* zapata de 32 plg de peralte con 7 pies 0 plg de ancho.)

En los problemas 12.25 y 12.26, diseñe zapatas cuadradas de concreto simple y espesor uniforme para columnas.

Problema	Dimensiones de la columna de concreto reforzado	D	L	f'_c	q_a	Distancia del fondo de la zapata al nivel de piso terminado
12.25	12″ × 12″	70 klb	60 klb	3 klb/plg^2	4 klb/pie^2	5′
12.26	14″ × 14″	90 klb	75 klb	3.5 klb/plg^2	4 klb/pie^2	5′

(*Respuesta al problema 12.25:* zapata de 6 pies 3 plg × 6 pies 3 plg y 28 plg de peralte.)

Problemas con computadora

Para los problemas 12.27 a 12.30, use la hoja de cálculo provista para el capítulo 12.

12.27 Repita el problema 12.2. (*Resp*. Ancho de 11 pies 9 plg y peralte de 21 plg con varillas #7 a 8 plg.)

12.28 Repita el problema 12.8.

12.29 Repita el problema 12.10. (*Resp*. 9 pies 0 plg × 9 pies 0 plg, peralte de 21 plg con 10 varillas #7 en cada dirección.)

12.30 Repita el problema 12.16

Problemas con unidades del SI

En los problemas 12.31 y 12.32, diseñe zapatas de muro para los valores dados. Los muros son de concreto reforzado. Peso del concreto = 24 kN/m^3, peso del suelo = 16 kN/m^3.

Problema	Espesor del muro	D	L	f'_c	f_y	q_a	Distancia del fondo de la zapata al nivel del piso terminado
12.31	300 mm	150 kN/m	200 kN/m	21 MPa	420 MPa	170 kN/m^2	1.500 m
12.32	400 mm	180 kN/m	250 kN/m	28 MPa	420 MPa	210 kN/m^2	1.200 m

(*Respuesta al problema 12.31:* zapata de 370 mm, ancho = 2.5 m, con acero principal #19 @ 225 mm.)

En los problemas 12.33 a 12.35, diseñe zapatas cuadradas para columnas aisladas para los valores dados. Peso del concreto = 24 kN/m^3, peso del suelo = 16 kN/m^3 y todas las columnas son interiores.

Problema	Dimensiones de columna	D	L	f'_c	f_y	q_a	Distancia del fondo de la zapata al nivel del piso terminado
12.33	350 mm × 350 mm	400 kN	500 kN	21 MPa	420 MPa	170 kN/m^2	1.200 m
12.34	400 mm × 400 mm	650 kN	800 kN	28 MPa	420 MPa	170 kN/m^2	1.200 m
12.35	450 mm × 450 mm	750 kN	1 000 kN	28 MPa	420 MPa	210 kN/m^2	1.200 m

(*Respuesta al problema 12.33:* zapata de 480 mm con 11 varillas #19 en ambas direcciones.)
(*Respuesta al problema 12.35:* zapata de 600 mm con 10 varillas #25 en ambas direcciones.)

12.36 Diseñe una zapata de concreto simple para un muro de concreto reforzado de 300 mm de espesor que soporta una carga muerta de 10 – kN/m (incluye su peso propio) y una carga viva de 120 – kN/m. f'_c = 21 MPa y q_a = 170 kN/m^2. La base de la zapata debe estar a 1.250 m debajo del nivel del terreno. Peso del concreto = 24 kN/m^3 y peso del suelo = 16 kN/m^3.

12.37 Diseñe una zapata cuadrada de concreto simple para soportar una columna de concreto reforzado de 300 mm × 300 mm que a su vez soporta una carga muerta de 130 – kN y una carga viva de 200 – kN. f'_c = 28 MPa y q_a = 210 kN/m^2. La base de la zapata debe estar a 1 500 m abajo del nivel del terreno. Peso del concreto = 24 kN/m^3 y peso del suelo = 16 kN/m^3. (*Resp*. 1 400 mm de ancho y 520 mm de espesor.)

13

Muros de retención

13.1 INTRODUCCIÓN

Un muro de retención es una estructura construida con el propósito de contener, retener o proporcionar aislamiento lateral para el suelo o para otro material suelto. El material suelto retenido empuja contra el muro, tendiendo a volcarlo o desplazarlo. Los muros de retención se usan en muchos casos donde existen cambios abruptos en la pendiente del terreno. Tal vez los ejemplos más obvios para el lector sean los cortes y terraplenes que se presentan a lo largo de carreteras o vías férreas. Con frecuencia se usan muros de retención en estos lugares para reducir las cantidades de relleno y corte, así como para reducir el ancho del derecho de vía requerido si se permitiera que los suelos tomaran sus pendientes naturales. Los muros de retención se usan en muchos otros casos, como en los estribos de puentes, los muros de sótanos y los alcantarillados.

En la sección siguiente se analizarán varios tipos de muros de retención, pero cualquiera que sea el tipo utilizado, existirán tres fuerzas que deben ponerse en equilibrio: 1) las cargas de gravedad del muro de concreto y del suelo encima de la zapata (el llamado *peso desarrollado*); 2) la presión lateral del suelo y 3) la capacidad de soporte del suelo. Además de esto, los esfuerzos dentro de la estructura deben estar dentro de los valores permisibles y las cargas deben ser soportadas de manera que no ocurran asentamientos indebidos. Un muro de retención debe diseñarse de manera que los elementos de concreto que constituyen al muro cumplan con el código usándose, en su mayoría, los principios ya estudiados en este texto. Además, debe asegurarse la estabilidad total del muro. El muro puede desplazarse o voltearse debido a una inestabilidad global sin que fallen los elementos de concreto.

13.2 TIPOS DE MUROS DE RETENCIÓN

Los muros de retención se clasifican generalmente en muros de tipo de gravedad y del tipo voladizo, con variaciones en ambos. Algunos de ellos se describen en los siguientes párrafos, haciendo referencia a la figura 13.1.

El *muro de retención tipo gravedad*, figura 13.1(*a*), se usa para muros de hasta aproximadamente 10 a 12 pies de altura. Usualmente se construye con concreto simple y depende completamente de su propio peso para la estabilidad contra el deslizamiento y el volteo. Comúnmente es tan masivo que no se refuerza con acero. Los esfuerzos de tensión calculados con el método de esfuerzos de trabajo se mantienen generalmente inferiores a $1.6\sqrt{f'_c}$. Los muros de retención del tipo de gravedad también se pueden construir de piedra o de mampostería.

Los *muros de retención tipo semigravedad*, figura 13.1(*b*), están situados entre los tipos de gravedad y de voladizo (estos últimos se describirán en el siguiente párrafo). Dependen de su propio peso más el peso de algo de suelo detrás de la pared para proporcionar estabilidad. Los muros de retención tipo semigravedad se usan aproximadamente para el mismo intervalo de alturas que los muros tipo gravedad y usualmente tienen algún refuerzo ligero.

El *muro de retención tipo voladizo* o alguna de sus variantes es el tipo más común de muro de retención. Tales muros se usan generalmente con alturas de entre 10 a 25 pies. En el análisis de los muros de retención, al muro vertical se le llama *vástago*. A la parte exterior de la zapata que oprime al suelo

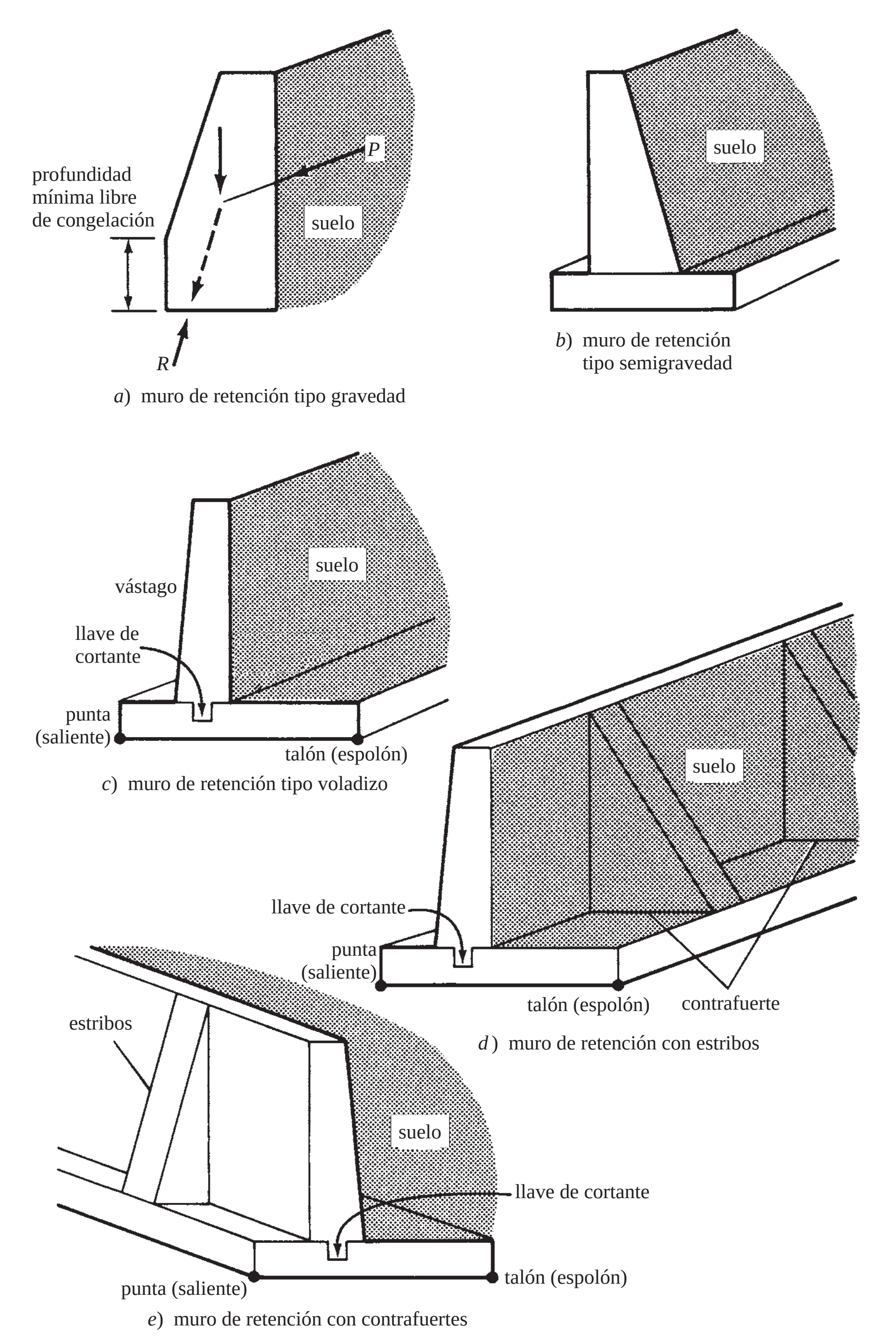


Figura 13.1 Muros de retención.

más intensamente se le llama *punta* y a la parte que tiende a ser levantada se le llama *talón*. En la figura 13.1(*c*) se indican esas partes en un muro de retención en voladizo. El concreto y su refuerzo se disponen de manera tal que parte del material detrás de la pared se usa junto con el peso del concreto para producir

el momento resistente necesario contra el volteo. A este momento resistente generalmente se le llama *momento corrector*.

Cuando es necesario construir muros de retención de mayores alturas, de aproximadamente 20 a 25 pies, los momentos flexionantes en la unión del vástago con la zapata llegan a ser tan grandes que el proyectista, por razones económicas, tiene que considerar otros tipos de muros para manejar los momentos. Esto puede hacerlo introduciendo muros transversales verticales en el frente o en la parte posterior del vástago. Si los refuerzos transversales quedan detrás de la pared (o sea, dentro del suelo) y no son visibles, los muros de retención se llaman *muros con estribos*. Si los refuerzos transversales quedan visibles (es decir, sobre el lado de la punta), los muros se llaman *muros con contrafuertes*. Estos muros se ilustran en las partes (*d*) y (*e*) de la figura 13.1. Los vástagos para estos muros son miembros continuos sostenidos a intervalos por los estribos o contrafuertes. Éstos generalmente se colocan entre sí a distancias aproximadamente iguales (o un poco mayores) a la mitad de la altura del muro de retención.

El tipo con estribos se usa más comúnmente porque resulta más atractivo ya que los refuerzos transversales no son visibles. Los contrafuertes no sólo son visibles sobre el lado de la punta, sino que su proyección sobre la parte exterior o el lado de la punta del muro ocupa espacio valioso. Sin embargo, los contrafuertes son algo más eficientes que los estribos, porque el concreto de que están hechos trabaja a compresión frente a los momentos de volteo, mientras que en los estribos el concreto está sujeto a tensión y por tanto deben ligarse al muro por medio de anclaje de refuerzo. Ocasionalmente, los muros muy altos se diseñan tanto con estribos como con contrafuertes.

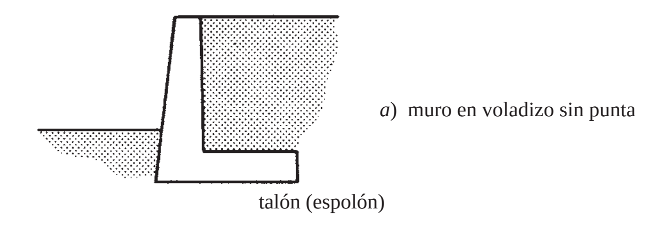
La figura 13.2 presenta algunas otras variantes de muros de retención. Cuando un muro de retención se coloca en un lindero o próximo a un edificio existente, puede ser necesario usar un muro sin punta, como el mostrado en la parte (*a*) de la figura, o sin talón, como en (*b*). Otro tipo de muro de retención que se encuentra con frecuencia es el estribo de puente, mostrado en la parte (*c*) de la figura. Los estribos pueden tener aleros en los lados para retener el suelo en la zona de acceso al puente. El estribo, además de otras cargas, debe soportar las reacciones del extremo del puente.

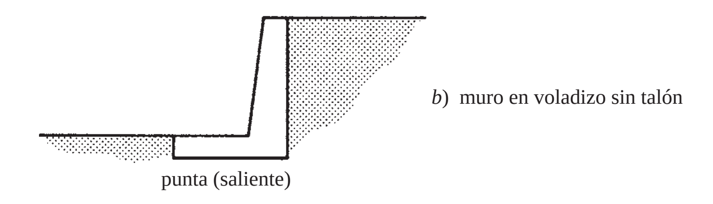
El uso de muros de retención prefabricados se ha incrementado mucho en los últimos años. Los muros se construyen con algún tipo de piezas prefabricadas y las zapatas usualmente se cuelan en la obra. Los resultados son muy atractivos y las piezas son miembros de concreto de alta calidad hecho bajo condiciones “controladas en planta”. Se requiere menor preparación del lugar y el montaje es mucho más rápido que cuando se cuela en el campo. Las piezas prefabricadas pueden desarmarse posteriormente y volverse a usar. Otros tipos de muros de retención prefabricados consisten en tablestacados o muros empotrados en el suelo antes de la excavación. También son muy promisorios los *gaviones* o cestos de alambre con piedras aplicados junto con terraplenes reforzados con geotextiles.

13.3 DRENAJE

Uno de los aspectos más importantes al diseñar y construir muros de retención exitosos, es la prevención de la acumulación de agua detrás de las paredes. Si se permite que el agua se deposite ahí, el resultado puede ser que se tengan grandes presiones laterales del líquido contra el muro y en climas fríos condiciones peores de grandes presiones por la formación de hielo.

El mejor relleno para un muro de retención es un suelo sin cohesión y bien drenado. Además, ésta es la condición supuesta normalmente por el proyectista. Junto con el relleno de material granular, se hacen agujeros en las paredes (lloraderos) de 4 plg o más de diámetro (los tamaños mayores se usan para facilitar la limpieza) aproximadamente de 5 a 10 pies de centro a centro, horizontal y verticalmente, como se muestra en la figura 13.3(*a*). Si el relleno consiste en arena gruesa, es conveniente poner unas cuantas paladas de grava alrededor de los lloraderos para impedir que la arena tape los agujeros.





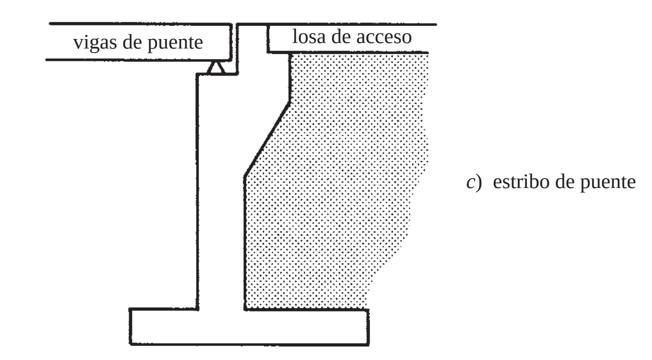
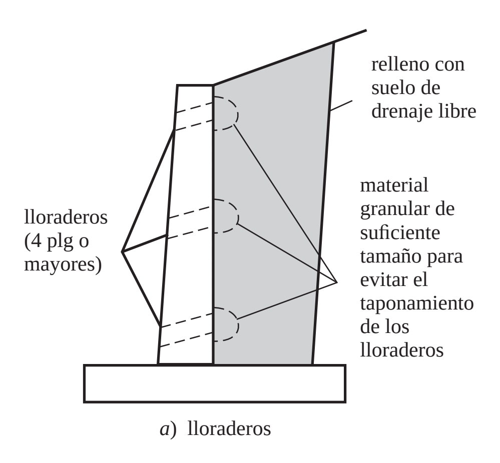


Figura 13.2 Otros tipos de muros de retención.



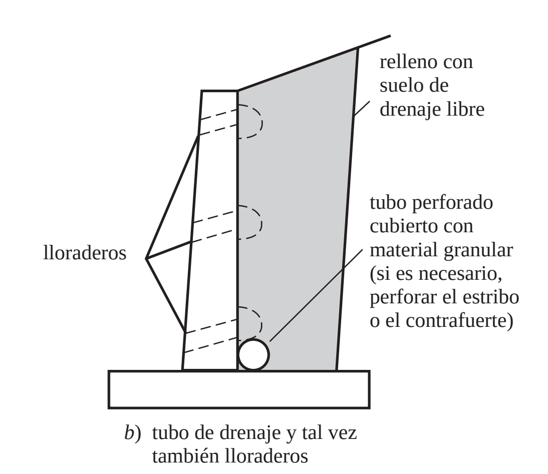
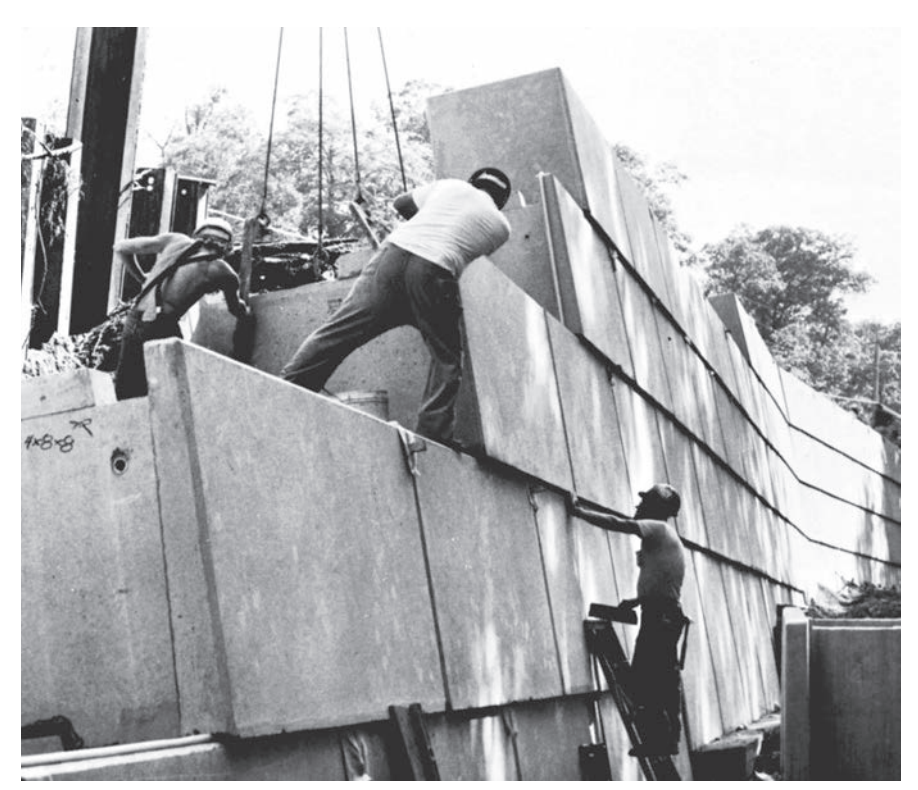


Figura 13.3 Drenaje de un muro de retención.

Los lloraderos tienen la desventaja de que el agua que sale por ellos tiene muy mal aspecto y también puede causar un ablandamiento del suelo en la zona de mayor presión (bajo la punta de la zapata). Un mejor método consiste en usar un tubo perforado de 6 a 8 plg en una cama de grava a lo largo de la base del muro, como se muestra en la figura 13.3(*b*). Por desgracia, tanto los lloraderos como los tubos perforados pueden obstruirse, generándose así una mayor presión del agua. Las mantas fabricadas para drenaje o las membranas porosas que se colocan entre el muro y el suelo permiten que la humedad drene libremente a los sistemas de drenaje, como en la figura 13.3(*b*).

Los métodos de drenaje descritos en los párrafos anteriores son también muy eficaces para reducir la acción de las heladas en los lugares de clima frío. La acción de las heladas puede causar grandes movimientos en las paredes, no sólo en términos de pulgadas sino aun en términos de uno o dos pies y al cabo de cierto tiempo pueden conducir a fallas de las estructuras. Sin embargo, la acción de las heladas se puede reducir considerablemente si se colocan materiales gruesos, apropiadamente drenados, detrás de la pared. El espesor del material de relleno perpendicular a una pared, debe ser por lo menos igual a la profundidad de la penetración de la helada en el terreno en esa zona.

La mejor condición es mantener el agua alejada por completo del relleno. Normalmente esto es prácticamente imposible, pero a veces la superficie del relleno puede pavimentarse con asfalto o algún otro material, o tal vez puede proporcionarse un dren superficial que saque el agua, o quizá pueda ser posible desviar el agua antes de que llegue al relleno.



Muro de retención para el ferrocarril Long Island, Huntington, Nueva York. Construido con módulos interconectados de concreto reforzado precolados. (Cortesía de Doublewal Corporation.)

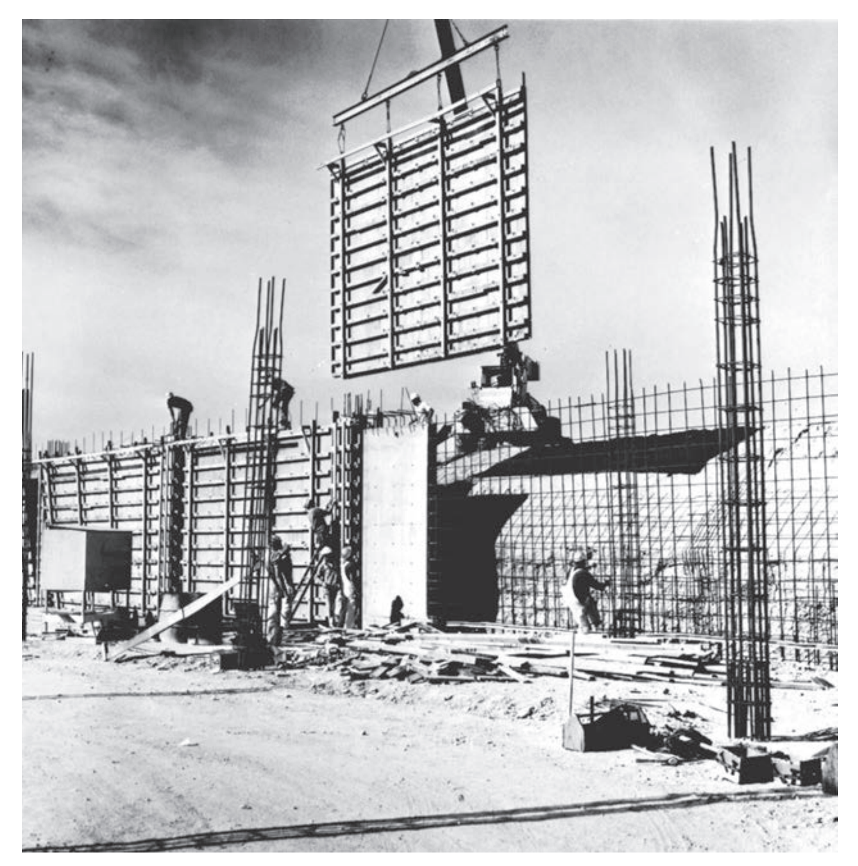
13.4 FALLAS DE MUROS DE RETENCIÓN

El número de fallas totales o parciales de los muros de retención es alarmante. La verdad es que si no se usaran grandes factores de seguridad, la situación sería aún más severa. Una razón para el gran número de fallas es el hecho de que los diseños con frecuencia se basan en métodos adecuados sólo para ciertas situaciones especiales. Por ejemplo, si un muro que tiene detrás arcilla saturada (condición no conveniente) se diseña con un método adecuado para material granular seco, se tendrán problemas con el desempeño futuro de tal muro.

13.5 PRESIONES LATERALES SOBRE MUROS DE RETENCIÓN

Las presiones reales que se presentan detrás de los muros de retención son muy difíciles de estimar, debido al gran número de variantes implicadas. Entre éstas se cuentan: los tipos de materiales de relleno, su compactación y grado de humedad; los tipos de materiales debajo de las zapatas, la presencia o ausencia de sobrecarga en el relleno y otras más. Como resultado, la estimación detallada de las fuerzas laterales aplicadas a los muros de retención es claramente un problema teórico de la mecánica de suelos. Por esta razón, el análisis que sigue se limita a un pequeño grupo de casos posibles.

Si un muro de retención se construye contra una cara sólida de roca, no habrá presión sobre el muro por parte de la roca. Pero si el muro se construye para retener una masa de agua, actúan sobre él presiones hidrostáticas. En cualquier punto, la presión (p) es igual a wh, donde w es el peso unitario del agua y h la distancia vertical de la superficie libre del agua al punto considerado.



Paneles preformados. (Cortesía de Burke Concrete Accesories, Inc.)

Si el muro se construye para retener un suelo, el comportamiento de este último generalmente será intermedio entre el comportamiento de la roca y el del agua (*pero como veremos después*, *la presión causada por algunos suelos es mucho mayor que la causada por el agua*). La presión ejercida contra el muro aumenta con la profundidad, aunque no tan rápido como en el caso del agua. Esta presión a cualquier profundidad puede estimarse con la siguiente expresión:

$$p = Cwh$$

En esta ecuación, w es el peso unitario del suelo, h es la distancia de la superficie al punto considerado y C es una constante que depende de las características del relleno. Desafortunadamente, el valor de C puede variar mucho, puede tener valores tan bajos como 0.3 o 0.4 en los suelos granulares sueltos y valores tan altos como 0.9 o 1.0 o más en algunos suelos arcillosos. La figura 13.4 muestra gráficas usadas a veces para estimar las presiones verticales y horizontales aplicadas por rellenos de hasta 20 pies de altura. En la figura se consideran varios tipos diferentes de relleno.

Los pesos unitarios de los suelos varían poco más o menos como sigue: 90 a 100 lb/pie^3 para arcillas suaves, 100 a 120 lb/pie^3 para arcillas duras, 110 a 120 lb/pie^3 para arenas y 120 a 130 lb/pie^3 para mezclas de arena con grava.

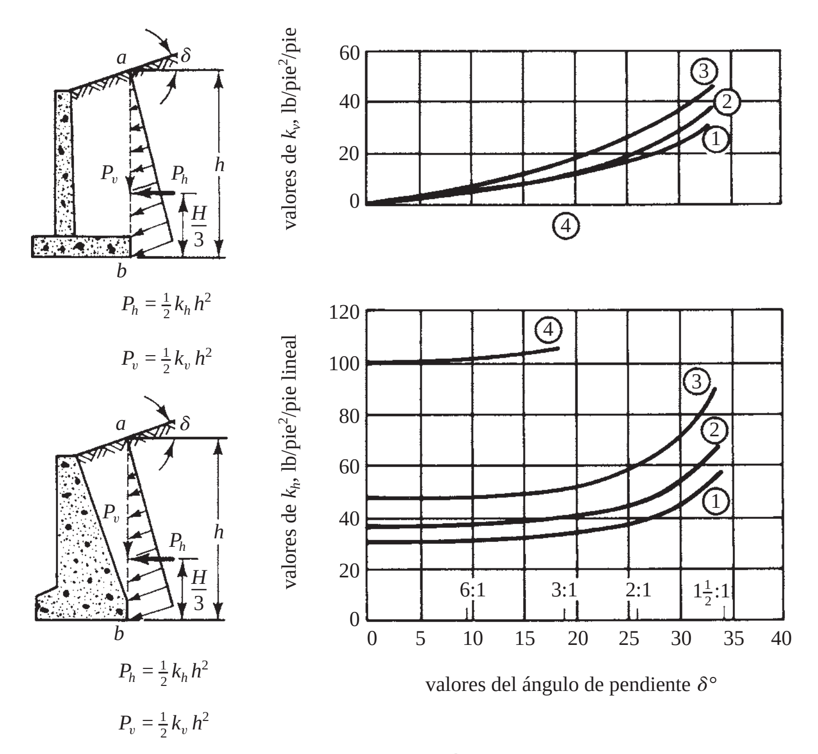


Figura 13.4 Diagrama para evaluar la presión del relleno contra los muros de retención que soportan rellenos con superficie plana. Su uso está limitado a muros de no más de 20 pies de altura. 1) Relleno de suelo granular grueso sin contenido de partículas finas, muy permeable, como grava o arena limpia. 2) Relleno de suelo granular grueso de baja permeabilidad debido a la mezcla de partículas del tamaño del limo. 3) Relleno de arena limosa fina, materiales granulares con claro contenido de arcilla y suelo residual con piedras. 4) Relleno de arcilla suave o muy suave, limo orgánico o arcilla limosa.[1]

[1]Peck, R. B., Hanson, W. E. y Thornburn, T. H., 1974, *Foundation Engineering*, 2a. ed. (Nueva York: John Wiley & Sons), pág. 425.

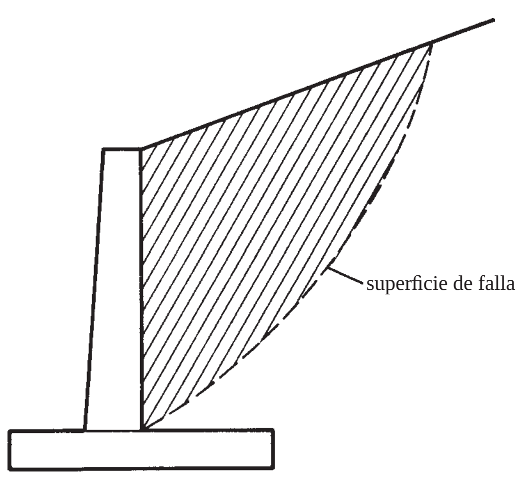


Figura 13.5

Si se estudia cuidadosamente la segunda gráfica de la figura 13.4, puede verse cuán grandes pueden llegar a ser las presiones laterales, particularmente en el caso de las arcillas y los limos. Por ejemplo, si se considera una franja vertical de 1 pie de ancho de un muro de retención de 15 pies de altura, con un relleno de suelo número (4) y una δ supuesta de 10° (pendiente 6 : 1), la presión horizontal total estimada sobre la franja es

$$P_h = \frac{1}{2}k_h h^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(102)(15)^2 = 11\,475 \text{ lb}$$

Si estuviera un lago de 15 pies de profundidad detrás del mismo muro, la presión horizontal total sobre la franja sería

$$P_h = \left(\frac{1}{2}\right)(15)(15)(62.4) = 7\,020 \text{ lb}$$
$$(\text{sólo } 61\% \text{ de la presión estimada para el suelo})$$

Para este análisis preliminar se muestra en la figura 13.5 un muro de retención que soporta un relleno de suelo inclinado. Parte del suelo detrás el muro (indicado por el área sombreada) tiende a deslizarse a lo largo de una superficie curva (representada por la línea punteada) y a empujar contra el muro. La tendencia a deslizarse de este suelo es resistida por la fricción (llamada *fricción interna*) a lo largo del suelo subyacente y por la fricción a lo largo de la cara vertical del muro.

La fricción interna es mayor en un suelo cohesivo que en uno sin cohesión, pero cuanto más húmedo esté el suelo, menor será su cohesión y más parejo el plano de falla. Entre más parejo sea el plano de falla, mayor es el volumen de suelo que tiende a deslizarse y a empujar contra el muro. Nuevamente puede verse que un buen drenaje es de la mayor importancia. Usualmente, el proyectista supone que el relleno detrás de la pared es granular y sin cohesión.

Debido a la presión lateral, un muro de retención común cederá o se flexionará un poco por estar construido de materiales elásticos. Además, a menos que el muro descanse sobre una capa de roca, se inclinará una pequeña distancia, separándose del suelo debido a la naturaleza compresible del suelo que lo soporta. Por estas razones, los muros de retención se construyen frecuentemente con un ligero talud o inclinación hacia el relleno, de manera que las deformaciones descritas no sean visibles.

Bajo las presiones laterales descritas, un muro de retención se moverá una pequeña distancia y se desarrollará una *presión activa del suelo*, como se muestra en la figura 13.6. Entre los muchos factores que influyen en la presión aplicada a un muro dado se cuentan: los tipos de material de relleno empleado, el drenaje existente, el nivel del agua freática, las condiciones climáticas, tales como la sequedad, humedad o el congelamiento del suelo, la presencia de camiones u otro equipo sobre el relleno, etcétera.

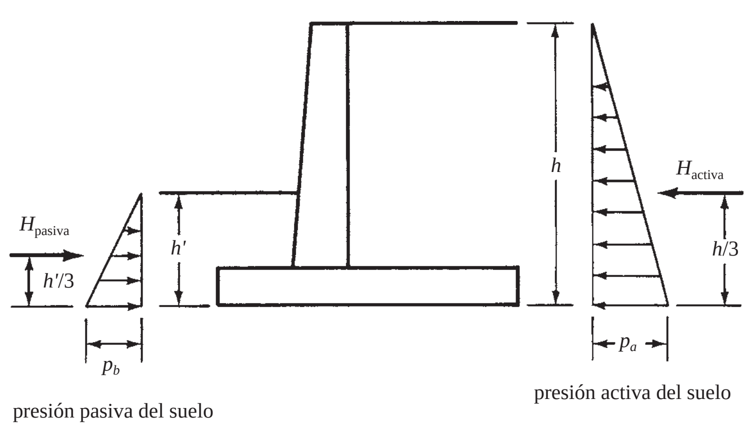


Figura 13.6

Para fines de diseño generalmente es satisfactorio suponer que la presión activa varía linealmente con la profundidad del relleno. En otras palabras, es como si detrás del muro hubiese un líquido (sólo en lo que respecta a la presión lateral) con un peso que puede variar de considerablemente menor que el peso del agua a uno considerablemente mayor. La gráfica de la figura 13.4 muestra esta gran variación en las presiones laterales posibles. Las presiones laterales supuestas suelen denominarse *presiones equivalentes de líquido. Se suponen comúnmente valores de 30 a 50 lb/pie^3, pero para materiales arcillosos y limosos pueden ser demasiado bajos.*

Si la pared se mueve alejándose del relleno y presionando contra el suelo en la punta, se dará una presión pasiva del suelo. En la figura 13.6 se ilustra la presión pasiva, la cual también se supone que varía linealmente con la profundidad. El considerar o no la presión pasiva en los cálculos de diseño depende del juicio del proyectista. Para que se desarrolle una presión pasiva efectiva en la punta, el concreto en esta zona debe colarse contra el suelo no perturbado y sin el uso de cimbra vertical. Incluso si se sigue este procedimiento, el proyectista puede reducir la altura del suelo no perturbado (h' en la figura 13.6) usada en los cálculos, para tomar en cuenta alguna posible perturbación del suelo durante las operaciones de construcción.

Siempre que los rellenos sean granulares, sin cohesión y secos, la hipótesis de una presión equivalente a la de un líquido es bastante satisfactoria. Las fórmulas basadas en la hipótesis de un relleno de grava o arena seca no son satisfactorias para las arcillas suaves o las arenas saturadas. En realidad, las arcillas no deben usarse como rellenos debido a que sus características de cortante cambian fácilmente y pueden tender a deslizarse contra la pared, incrementando las presiones con el paso del tiempo.

Si se supone una variación lineal de la presión, la presión activa a cualquier profundidad puede determinarse con la expresión

$$p_a = k_a w h$$

o bien, para presión pasiva

$$p_p = k_p w h'$$

En estas expresiones, k_a y k_p son los coeficientes aproximados de las presiones activas y pasivas, respectivamente. Estos coeficientes se pueden calcular con ayuda de ecuaciones teóricas, como las de Rankine o Coulomb.[2] Para un material granular, 0.3 y 3.3 son valores típicos de k_a y k_p. La ecuación de Rankine (publicada en 1857) desprecia la fricción del suelo contra la pared, mientras que la fórmula

[2]Terzaghi, K. y Peck, R. B., 1948. *Soil Mechanics and Engineering Practice* (New York: John Wiley & sons), págs. 138-166.

de Coulomb (publicada en 1776) sí la toma en consideración. Estas ecuaciones fueron desarrolladas para suelos sin cohesión. Para suelos cohesivos con contenido de arcilla y/o limo, es necesario usar valores empíricos determinados por medio de mediciones de campo (como las dadas en la figura 13.4).

Se ha estimado que el costo de construcción de los muros de retención varía directamente con el cuadrado de sus alturas. Así, conforme los muros de retención se vuelven cada vez más altos, la exactitud de los cálculos de las presiones laterales resulta cada vez más importante en la obtención de diseños económicos. Como la ecuación de Coulomb toma en cuenta la fricción sobre la pared, se considera que es más precisa y se usa a menudo para muros de más de 20 pies de altura. La ecuación de Rankine se usa comúnmente para muros de retención comunes de 20 pies de altura o menores. Es interesante notar que los dos métodos dan resultados idénticos cuando se desprecia la fricción del suelo sobre la pared.

Las expresiones de Rankine para los coeficientes de las presiones activa y pasiva se dan al final de este párrafo, haciendo referencia a la figura 13.7. En estas expresiones, δ es el ángulo que el relleno forma con la horizontal, mientras que ϕ es el ángulo de fricción interna del suelo. Para los rellenos bien drenados de arena o grava, dicho ángulo suele tomarse como el ángulo de reposo de la pendiente. Una pendiente comúnmente usada es 1 verticalmente a $1\frac{1}{2}$ horizontalmente (33°40′).

$$k_a = \cos\delta\left(\frac{\cos\delta - \sqrt{\cos^2\delta - \cos^2\phi}}{\cos\delta + \sqrt{\cos^2\delta - \cos^2\phi}}\right)$$

$$k_p = \cos\delta\left(\frac{\cos\delta + \sqrt{\cos^2\delta - \cos^2\phi}}{\cos\delta - \sqrt{\cos^2\delta - \cos^2\phi}}\right)$$

Si el relleno es horizontal, es decir, δ es igual a cero, las expresiones son entonces

$$k_a = \frac{1 - \operatorname{sen}\phi}{1 + \operatorname{sen}\phi}$$

$$k_p = \frac{1 + \operatorname{sen}\phi}{1 - \operatorname{sen}\phi}$$

Un problema con el uso de estas expresiones es la determinación de ϕ. Puede ser tan pequeña como 0 o 10° para las arcillas suaves y tan alta como 30 o 40° para algunos materiales granulares. En consecuencia, los valores de k_a pueden variar entre 0.30 para algunos materiales granulares y 1.0 para algunas arcillas húmedas.

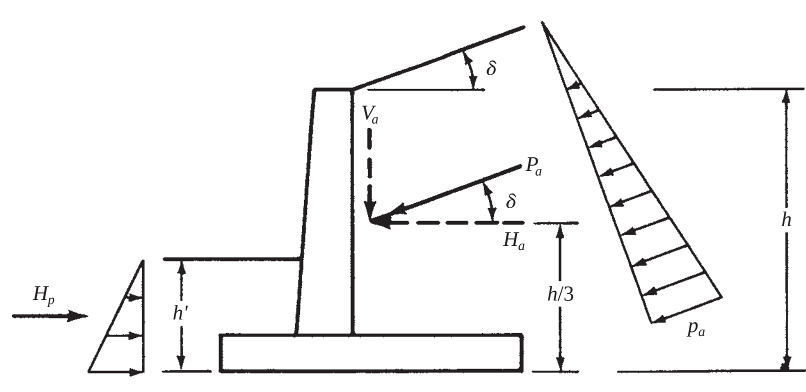


Figura 13.7

Una vez determinados los valores de k_a y k_p, las presiones horizontales totales, H_a y H_p, pueden calcularse como si fueran iguales a las áreas de los diagramas de presiones triangulares respectivas. Por ejemplo, haciendo referencia a la figura 13.7, el valor de la presión activa es

$$H_a = \left(\tfrac{1}{2}\right)(p_a)(h) = \left(\tfrac{1}{2}\right)(k_a wh)(h)$$

$$H_a = \frac{k_a wh^2}{2}$$

y, similarmente,

$$H_p = \frac{k_p wh'^2}{2}$$

Además de estas presiones laterales aplicadas al muro de retención, se considera necesario en muchas partes del país añadir el efecto de las heladas en la parte superior del vástago, en forma de una presión de aproximadamente 600 o 700 lb/pie lineal en zonas donde se dan condiciones atmosféricas extremas.

13.6 PRESIONES DE SUELO SOBRE ZAPATAS

Debido a las fuerzas laterales, la resultante R de las fuerzas horizontal y vertical, interseca al suelo bajo la zapata como si fuera una carga excéntrica, causando una mayor presión en la punta. Esta presión en la punta debe ser menor que el valor q_a permisible del suelo. Es conveniente que la fuerza resultante se sitúe dentro del tercio medio de la base de la zapata, o sea, dentro de su núcleo central.

Si la fuerza resultante interseca al suelo dentro del tercio medio de la zapata, la presión de suelo en cualquier punto puede calcularse con la siguiente fórmula, de la misma manera que se determinan los esfuerzos en una columna cargada excéntricamente.

$$q = -\frac{R_v}{A} \pm \frac{R_v ec}{I}$$



Muro de retención para el Cuerpo de Ingenieros del Ejército de Estados Unidos, Colchester, Connecticut. Construido con módulos interconectados prefabricados de concreto reforzado. (Cortesía de Doublewal Corporation.)

En esta expresión, R_v es la componente vertical de R o la carga vertical total, e es la excentricidad de la carga medida desde el centro de la zapata, A es el área de una franja de suelo de 1 pie de ancho y de longitud igual al ancho de la base de la zapata; I es el momento de inercia de la misma área respecto a su centroide. Esta expresión es correcta sólo si R_v está situada dentro del núcleo central.

Esta expresión se puede reducir a la siguiente expresión, en la que L es el ancho de la zapata desde la punta al talón.

$$q = -\frac{R_v}{L} \pm \frac{R_v e(L/2)}{L^3/12} = -\frac{R_v}{L}\left(1 \pm \frac{6e}{L}\right)$$

Si la fuerza resultante está situada fuera del tercio central de la zapata, las expresiones anteriores dejan de ser aplicables, porque se tiene entonces un esfuerzo de tensión sobre una parte de la zapata que el suelo no puede suministrar. En tales casos las presiones del suelo se pueden determinar como se vio en la sección 12.12 y en la figura 12.24 del capítulo anterior. No debe permitirse que ocurra tal situación en un muro de retención y aquí no se considerará más.

Los valores de presión de suelo calculados de esta manera son sólo estimaciones aproximadas de los valores reales y por tanto no se les debe dar demasiado valor. Las presiones verdaderas son influidas considerablemente por otros factores aparte de los de la altura del muro de retención. Entre éstos se encuentran las condiciones de drenaje, temperatura, asentamientos, presión de poro, etcétera.

13.7 DISEÑO DE MUROS DE RETENCIÓN DE SEMIGRAVEDAD

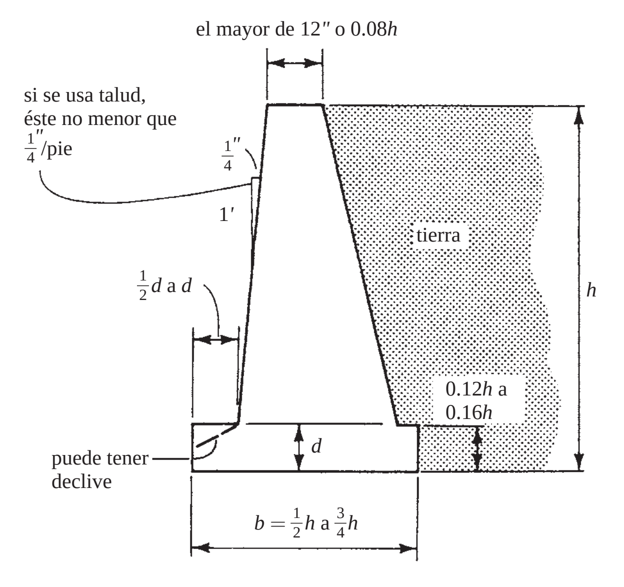
Como se mencionó anteriormente, los muros de retención de semigravedad se diseñan para resistir presiones del suelo por medio de su propio peso más parcialmente el del suelo desarrollado. Como se construyen normalmente con concreto simple, piedra, o tal vez algún otro tipo de mampostería, su diseño se basa en la hipótesis de que sólo puede permitirse en la estructura muy poca tensión o ninguna en absoluto. Si la resultante de la presión del suelo y el peso del muro (incluido cualquier peso desarrollado por el suelo) está situada dentro del tercio medio de la base del muro, los esfuerzos de tensión en el muro serán probablemente despreciables.

Se supone un tamaño para el muro, se calculan factores de seguridad contra deslizamiento y volteo, se determina el punto en que la fuerza resultante interseca la base y se calculan las presiones del suelo. Normalmente se considera que los factores de seguridad contra deslizamiento deben ser por lo menos de 1.5 para rellenos sin cohesión y de 2.0 para rellenos cohesivos. Normalmente se especifican factores de seguridad de 2.0 para el volteo. Un muro apropiado se obtiene probablemente después de dos o tres ensayos. El ejemplo 13.1 ilustra los cálculos necesarios para cada ensayo.

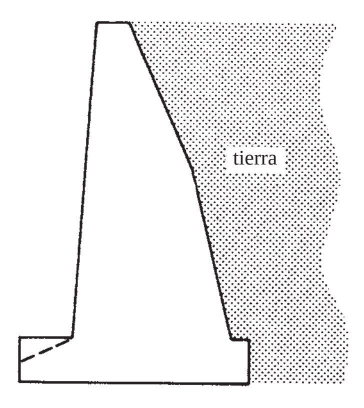
La figura 13.8(*a*) muestra un conjunto de dimensiones aproximadas que se usan a menudo para determinar los muros de semigravedad. Las dimensiones pueden suponerse cercanas a los valores dados y se calculan los factores de seguridad contra volteo y deslizamiento. Si los valores no son adecuados, las dimensiones se ajustan y los factores de seguridad se recalculan, etc. Los muros de semigravedad normalmente son de forma trapecial, como se muestra en la figura 13.8(*a*), pero algunas veces la parte posterior no es lineal, como se ilustra en la figura 13.8(*b*).

EJEMPLO 13.1

En la figura 13.9 se muestra un muro de retención de semigravedad de concreto simple (peso = 145 lb/pie^3). Se supone que el banco de tierra soportada pesa 110 lb/pie^3, que tiene ϕ de 30° y un coeficiente de fricción contra el deslizamiento sobre el suelo de 0.5. Determinar los factores de seguridad contra el volteo y deslizamiento; determinar la presión de apoyo bajo la punta de la zapata. Utilizar la expresión de Rankine para calcular las presiones horizontales.



a) algunas dimensiones aproximadas para muros de semigravedad



b) muro de semigravedad con parte posterior no pareja

SOLUCIÓN **Cálculo de los coeficientes de la presión del suelo**

$$k_a = \frac{1 - \text{sen}\ \phi}{1 + \text{sen}\ \phi} = \frac{1 - 0.5}{1 + 0.5} = 0.333$$

$$k_p = \frac{1 + \text{sen}\ \phi}{1 - \text{sen}\ \phi} = \frac{1 + 0.5}{1 - 0.5} = 3.00$$

Valor de H_a

$$H_a = \frac{k_a w h^2}{2} = \frac{(0.333)(110)(12)^2}{2} = 2\ 637 \text{ lb}$$

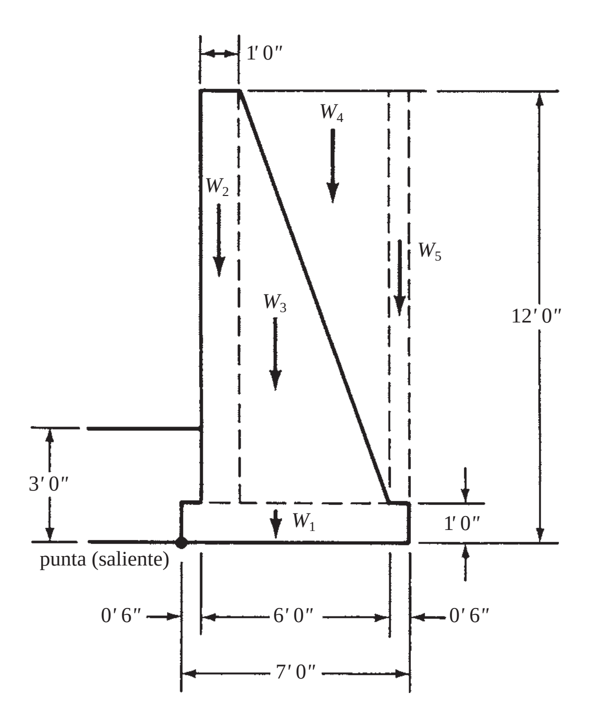


Figura 13.9

Momento de volteo (O. T. M.)

$$\text{O. T. M.} = (2\,637)\left(\tfrac{12}{3}\right) = 10\,548 \text{ pie-lb}$$

Momentos resistentes (tomados respecto a la punta)

Fuerza		Brazo de momento		Momento
$W_1 = (7)(1)(145)$	=	1 015 lb × 3.5′	=	3 552 pie-lb
$W_2 = (1)(11)(145)$	=	1 595 lb × 1.0′	=	1 595 pie-lb
$W_3 = \left(\frac{1}{2}\right)(5)(11)(145)$	=	3 988 lb × 3.17′	=	12 642 pie-lb
$W_4 = \left(\frac{1}{2}\right)(5)(11)(110)$	=	3 025 lb × 4.83′	=	14 611 pie-lb
$W_5 = (0.5)(11)(110)$	=	605 lb × 6.75′	=	4 084 pie-lb
R_v	=	10 228 lb $\quad M$	=	36 484 pie-lb

Factor de seguridad contra el volteo (que se analizará en la sección 13.10)

$$\text{Factor de seguridad} = \frac{36\,484}{10\,548} = 3.46 > 2.00 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Factor de seguridad contra deslizamiento (que también se analiza en la sección 13.10)
Suponiendo que el suelo por encima de la punta de la zapata se ha erosionado y que la presión pasiva se debe sólo al suelo, que tiene una profundidad igual al espesor de la zapata, tenemos entonces:

$$H_p = \frac{k_p w h'^2}{2} = \frac{(3.0)(110)(1)^2}{2} = 165 \text{ lb}$$

$$\text{Factor de seguridad contra deslizamiento} = \frac{(0.5)(10\,228) + 165}{2\,637} = 2.00 > 1.50 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Distancia de la resultante a la punta

$$\text{Distancia} = \frac{36\,484 - 10\,548}{10\,228} = 2.54' > 2.33' \qquad \therefore \text{Dentro del tercio medio}$$

Presión del suelo bajo el talón y la punta

$$A = (1)(7.0) = 7.0\,\text{pies}^2$$

$$I = \left(\frac{1}{12}\right)(1)(7)^3 = 28.58\,\text{pies}^4$$

$$f_{\text{punta}} = -\frac{R_v}{A} - \frac{R_v ec}{I} = -\frac{10\,228}{7.0} - \frac{(10\,228)(3.50 - 2.54)(3.50)}{28.58}$$

$$= -1\,461 - 1\,202 = -2\,663\ \text{lb/pie}^2$$

$$f_{\text{talón}} = -\frac{R_v}{A} + \frac{R_v ec}{I} = -1\,461 + 1\,202 = -259\ \text{lb/pie}^2$$

13.8 EFECTOS DE SOBRECARGA

Si hay tierra u otras cargas sobre la superficie del relleno, como se muestra en la figura 13.10, la presión horizontal aplicada al muro será mayor. Si la sobrecarga es uniforme sobre el área deslizante detrás del muro, la presión resultante se supone igual a la presión que sería causada por una altura incrementada del relleno que tuviese el mismo peso total que la sobrecarga. Generalmente, es fácil tratar esta situación en un muro sin sobrecarga añadiendo una presión uniforme a la presión triangular del suelo, como se muestra en la figura.

Si la sobrecarga no cubre completamente el área detrás del muro, existen algunas teorías algo complejas sobre suelos que consideran las presiones horizontales resultantes. En consecuencia, el proyectista por lo común emplea una regla empírica para tratar este caso, procedimiento que funciona

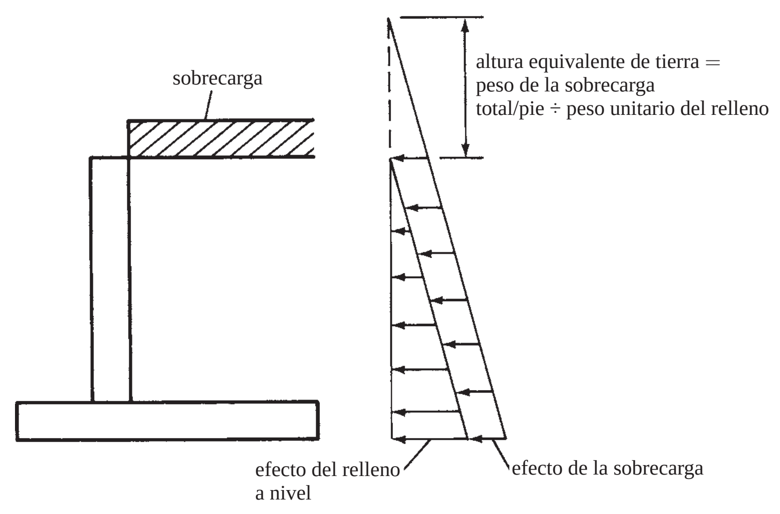


Figura 13.10

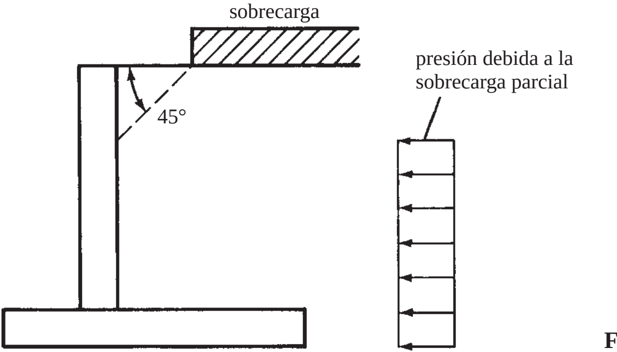


Figura 13.11

razonablemente bien. Como se muestra en la figura 13.11, se puede suponer que la sobrecarga no afecta a la presión más arriba de la intersección de una línea a 45° que va del borde de la sobrecarga al muro. La presión lateral se incrementa, como en el caso de una sobrecarga plena, abajo del punto de intersección. Esto se muestra en el lado derecho de la figura.

13.9 ESTIMACIÓN DEL TAMAÑO DE MUROS DE RETENCIÓN EN VOLADIZO

El análisis estático de los muros de retención y la consideración de su estabilidad respecto al volteo y al deslizamiento, se basan en la condiciones de carga de servicio. En otras palabras, la longitud de la zapata y la posición del vástago sobre la zapata, se basan enteramente en el relleno real del suelo, en la presión lateral estimada, en el coeficiente de fricción por deslizamiento del suelo, etcétera.

Por otra parte, el diseño detallado del vástago, la zapata y su refuerzo, se determinan con el método de diseño por resistencia. Para llevar a cabo estos cálculos, es necesario multiplicar las cargas de servicio y las presiones por los factores de carga apropiados. A partir de estas cargas factorizadas, se determinan las presiones de apoyo, los momentos y las fuerzas cortantes requeridas en el diseño.

La parte inicial del diseño consiste entonces en estimar la dimensión aproximada del muro de retención. Aunque éste es en realidad un procedimiento de ensayo y error, los valores obtenidos no son muy sensibles a los valores ligeramente incorrectos y generalmente uno o dos tanteos son suficientes.

Hay diversas reglas empíricas con las que pueden obtenerse excelentes dimensiones iniciales. Además, varios manuales dan los tamaños finales de muros de retención que se han diseñado para ciertos casos específicos. Esta información le permitirá al proyectista estimar razonablemente bien las proporciones del diseño de un muro. El *Manual de Diseño CRSI* es una de esas útiles referencias.[3] En los siguientes párrafos se indican métodos para estimar las dimensiones sin el uso de un manual. Tales procedimientos aproximados son muy satisfactorios mientras las condiciones no se aparten mucho de lo que es común.

Altura de la pared

La elevación necesaria de la parte superior del muro resulta obvia a partir de las condiciones del problema. La elevación en la base de la zapata se debe seleccionar de manera que quede por debajo de la zona

[3]Concrete Reinforcing Steel Institute, 2002, *CRSI Design Handbook*, 9a. ed. (Chicago), págs. 14-1 a 14-46.

de congelamiento del suelo en cada región geográfica; ésta es aproximadamente de 3 a 6 pies abajo del nivel del terreno en la parte norte de Estados Unidos. A partir de estas elevaciones puede determinarse la altura total del muro.

Espesor del vástago

Los vástagos son teóricamente de mayor espesor en su base porque ahí las fuerzas cortantes y los momentos adquieren sus valores máximos. Las paredes tienen ordinariamente espesores totales de entre 7 y 12% de la altura del muro de retención. Las fuerzas cortantes y momentos en la vástago disminuyen del fondo hacia la parte superior; en consecuencia, los espesores y el refuerzo pueden reducirse proporcionalmente. Los vástagos normalmente son ahusados, como se muestra en la figura 13.12. El espesor mínimo en la parte superior del vástago es de 8 plg, preferiblemente de 12 plg. Como se verá en la sección 13.10, es necesario tener una malla de refuerzo en la cara interior de la vástago y otra en la cara exterior. Para que haya lugar para las dos mallas de refuerzo, para el espacio entre ellas y el recubrimiento, se requiere un espesor total mínimo de 8 pulgadas.

El uso del espesor mínimo posible para muros que están reforzados principalmente en una dirección (aquí son las varillas verticales), no conduce necesariamente a menores costos. La razón es que el acero de refuerzo es la parte principal del costo total. Si se hacen los muros tan delgados como sea posible, se ahorrará algo de concreto, pero se incrementará considerablemente la cantidad de refuerzo necesario. En los muros que son bastante altos y que están fuertemente cargados, un espesor mayor del concreto puede resultar más económico.

Si en el vástago ρ se limita a un valor máximo de aproximadamente $\left(0.18 f_c'/f_y\right)$, el espesor de la pared requerido por momento probablemente dará la suficiente resistencia por cortante sin tener que usar estribos. Además, probablemente será de un espesor suficiente como para limitar las deflexiones laterales a valores razonables.

Para alturas hasta cerca de 12 pies, los vástagos de los muros de retención en voladizo se construyen normalmente de espesor constante, porque el costo adicional de la cimbra inclinada no es compensado por el ahorro de concreto. Para muros de más de 12 pies de altura, el ahorro en concreto es lo suficientemente grande como para justificar el ahusamiento.

En realidad, la cara inclinada del muro puede ser la anterior o la posterior, pero si es la cara exterior la que se construye inclinada, ésta tenderá a contrarrestar en alguna medida la deflexión e inclinación del muro debido a las presiones laterales. Un talud de $\frac{1}{4}$ plg por pie de altura es con frecuencia recomendado para compensar la deflexión o la inclinación delantera del muro.

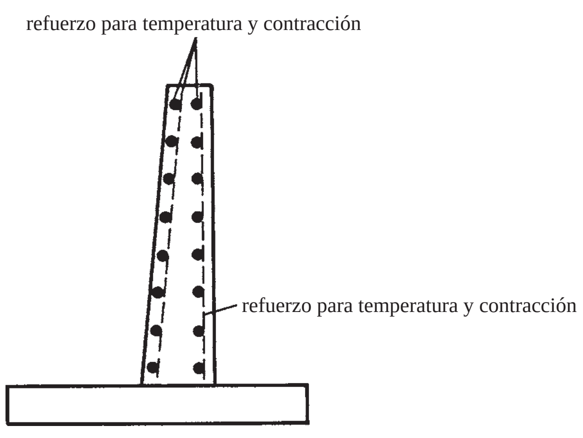


Figura 13.12

Espesor de la base

El espesor final de la base se determinará en función del cortante y el momento. Como una estimación aproximada, puede considerarse que el espesor total estará situado probablemente entre 7% y 10% de la altura total del muro. Se usan espesores mínimos de entre 10 plg y 12 plg.

Longitud de la base

Para estimaciones preliminares, la longitud de la base puede considerarse entre 40% y 60% de la altura total de la pared. Sin embargo, puede hacerse una estimación algo mejor usando el método descrito por el profesor Ferguson en su texto de concreto reforzado.[4] Para este análisis nos referiremos a la figura 13.13. En esta figura se supone que W es igual al peso de todo el material dentro del área *abcd*. Esta área contiene concreto y suelo, pero el autor supone aquí que es puro suelo. Esto implica que se tendrá un factor de seguridad un poco mayor contra el volteo que el supuesto. Cuando existe sobrecarga, ésta se incluye como una altura adicional de suelo, como se muestra en la figura.

Si la suma de momentos respecto al punto a debido a W y a las fuerzas laterales H_1 y H_2 es igual a cero, la fuerza resultante R pasará por el punto a. Esta ecuación de momentos puede escribirse, igualarse a cero y de ahí despejar a x. Si la distancia de la punta de la zapata al punto a es igual a la mitad de la distancia x indicada en la figura y la fuerza resultante R pasa por el punto a, el diagrama de presiones sobre la zapata será triangular. Además, si se toman los momentos respecto a la punta de todas las cargas y fuerzas para las condiciones descritas, el factor de seguridad contra volteo será aproximadamente igual a 2.

En la figura 13.14 se muestra un resumen de los primeros ensayos de prueba para obtener el tamaño de los muros de retención. Estos tamaños se basan en las dimensiones de muros construidos con éxito en el pasado. Tales tamaños eran con frecuencia dimensiones conservadoras.

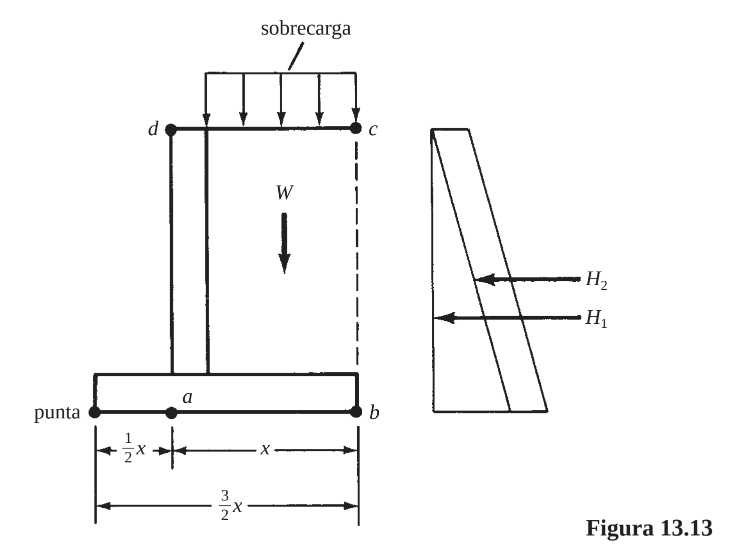


Figura 13.13

[4]Ferguson, P.M., 1979, *Reinforced Concrete Fundamentals*, 4a. ed. (New York: John Wiley & Sons), pág. 256.

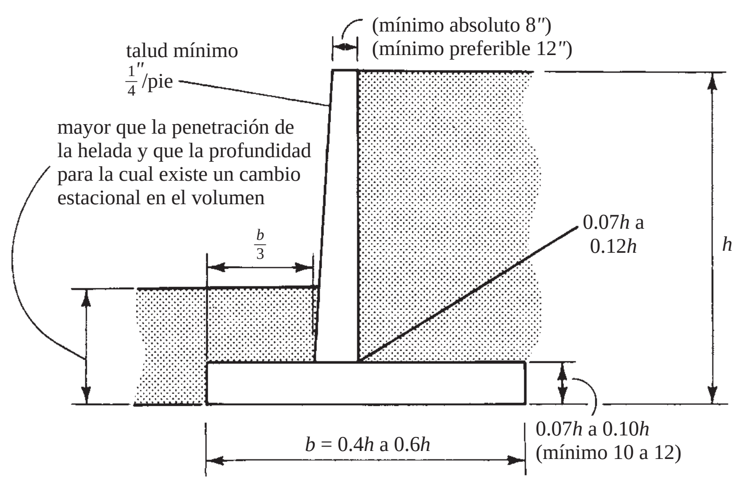


Figura 13.14

EJEMPLO 13.2

Usando las reglas aproximadas expuestas en esta sección, estimar los tamaños de las partes del muro de retención mostrado en la figura 13.15. El suelo pesa 100 lb/pie^3 y está presente una sobrecarga de 300 lb/pie^2. Supóngase k_a = 0.32. (Para muchos suelos prácticos como arcillas o limos, k_a será dos o más veces mayor).

SOLUCIÓN **Espesor del vástago**

Suponga un espesor de 12 plg en la parte superior.

$$\text{Supóngase un espesor en la base} = 0.07h = (0.07)(21) = 1.47' \qquad \underline{\underline{\text{Digamos } 1'6''}}$$

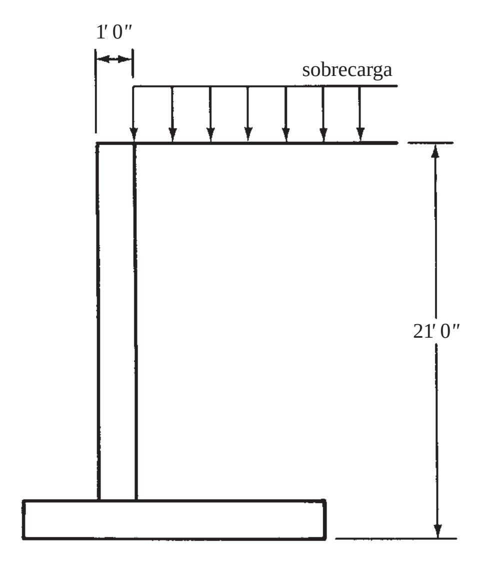


Figura 13.15

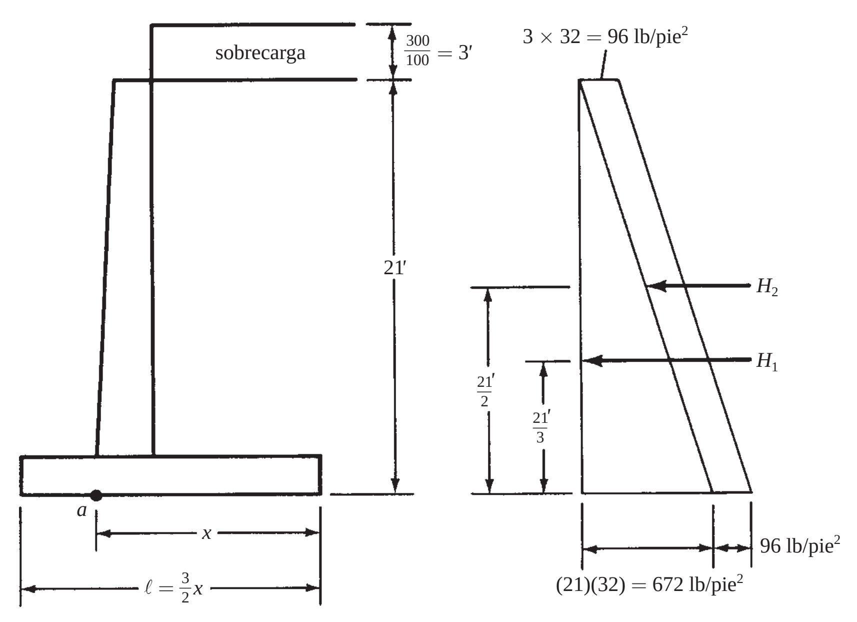


Figura 13.16

Espesor de la base

Supóngase t para la base = 7 a 10% de la altura total del muro

$$t = (0.07)(21) = 1.47' \qquad \text{Digamos } 1'6''$$

$$\text{Altura del vástago} = 21'0'' \text{ menos } 1'6'' = 19'6''$$

Longitud de la base y posición del vástago

Calcúlense las fuerzas horizontales sin factores de carga, como se muestra en la figura 13.16.

$$\rho_a = k_a wh = (0.32)(100)(21) = 672 \text{ lb}$$

$$H_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(21)(672) = 7\,056 \text{ lb}$$

$$H_2 = (21)(96) = 2\,016 \text{ lb}$$

$$W = (x)(24)(100) = 2\,400x$$

$\Sigma M_a = 0$

$$-(7\,056)(7.00) - (2\,016)(10.5) + (2\,400x)\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$x = 7.67'$$

$$b = \left(\frac{3}{2}\right)(7.67) = 11.505' \qquad \text{Digamos } 11'6''$$

En la figura 13.22 se muestran las dimensiones finales ensayadas.

13.10 PROCEDIMIENTO DE DISEÑO PARA MUROS DE RETENCIÓN EN VOLADIZO

Esta sección se presenta para describir con cierto detalle el procedimiento usado para diseñar un muro de retención en voladizo. Al final de esta sección se presenta el diseño completo de este tipo de muro. Una vez establecido el tamaño aproximado del muro, pueden diseñarse detalladamente el vástago, la punta y el talón. Cada una de esas partes se diseña individualmente como un voladizo saliendo de una masa central, como se muestra en la figura 13.17.

Vástago

Los valores de la fuerza cortante y el momento en la base del vástago, debidos a las presiones laterales del suelo, se calculan y se usan para determinar tanto el espesor del vástago como el refuerzo necesario. Puesto que las presiones laterales se consideran como cargas vivas, se usa un factor de carga de 1.6.

Se verá que el momento flexionante requiere el uso de varillas de refuerzo vertical en el lado del suelo del vástago. Además, debe proporcionarse refuerzo por temperatura y contracción. En la sección 14.3 del código ACI se estipula un valor mínimo para el refuerzo horizontal igual a 0.0025 del área *bt* de la pared, así como una cantidad mínima de refuerzo vertical (0.0015). Estos valores pueden reducirse a 0.0020 y 0.012 si el refuerzo es de $\frac{5}{8}$ plg o menor diámetro y si consiste en varillas o en malla soldada (no mayores que *W*31 o *D*31) con f_y igual o mayor que 60 000 lb/plg^2.

Los mayores cambios de temperatura ocurren en la cara frontal o expuesta del vástago. Por esta razón, la mayor parte del refuerzo horizontal (tal vez dos terceras partes) debe colocarse sobre esa cara con

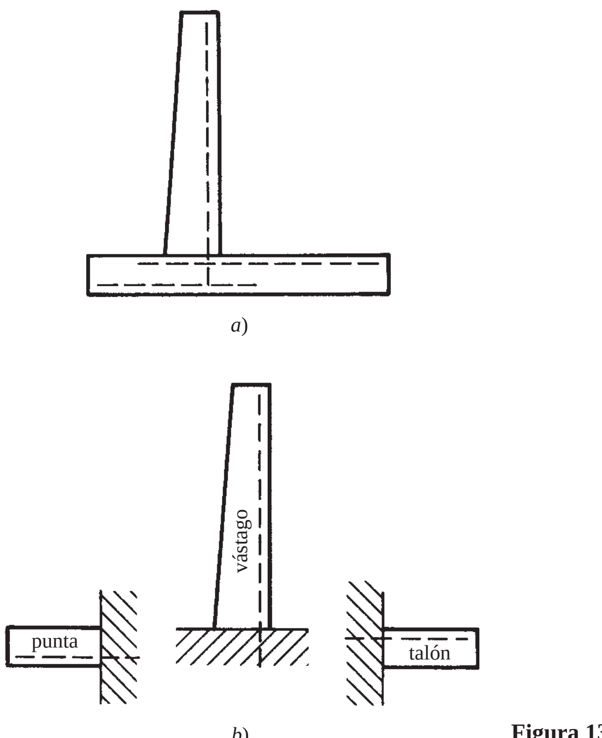


Figura 13.17

justo la cantidad suficiente de acero vertical para soportar las varillas horizontales. El concreto para un muro de retención debe colarse en longitudes bastante cortas, no mayores que 20 o 30 pies, para reducir los esfuerzos por contracción.

Factor de seguridad contra el volteo

Los momentos de las fuerzas no factorizadas de volteo y resistentes se toman respecto a la punta de la zapata. Tradicionalmente, se ha pensado que el factor de seguridad contra el volteo debe ser por lo menos igual a 2. Al efectuar estos cálculos, usualmente no se toma en cuenta el relleno sobre la punta porque en un momento dado éste puede estar erosionado. Desde luego, hay casos en que existe una losa (por ejemplo, el pavimento de una carretera sobre el relleno de la punta) que mantiene en su lugar al relleno en cuestión. En tales casos puede ser razonable incluir las cargas sobre la punta.

Factor de seguridad contra el deslizamiento

La consideración del deslizamiento en los muros de retención es un tema muy importante ya que un gran porcentaje de fallas en los muros se debe a esta causa. Para calcular el factor de seguridad contra el deslizamiento, la resistencia estimada al deslizamiento (igual al coeficiente de fricción del concreto sobre el suelo, multiplicado por la fuerza vertical resultante, μR_v) se divide entre la fuerza horizontal total. La presión pasiva contra el muro generalmente se desprecia y se usan las cargas sin factorizar.

Los valores usuales de diseño para μ, que es el coeficiente de fricción entre el concreto de la zapata y el suelo sustentante, son los siguientes: 0.45 a 0.55 para suelos de grano grueso, siendo el menor valor aplicable si el suelo contiene algo de limo y 0.6 si la zapata está apoyada sobre roca sana con una superficie rugosa. Se usarán probablemente valores entre 0.3 y 0.35 si el material de soporte es básicamente limoso.

Se piensa comúnmente que el factor de seguridad contra el deslizamiento debe ser por lo menos igual a 1.5. En el diseño inicial de los muros de retención, el factor de seguridad calculado contra el deslizamiento frecuentemente es mucho menor que este valor. Para corregir la situación, la práctica más común es ensanchar la zapata del lado del talón. Otra práctica es usar un espolón o llave, como se muestra en la figura 13.18, con su cara frontal colada directamente sobre el suelo sin alterar. (Muchos proyectistas consideran que la construcción de los espolones altera tanto el suelo, que no vale la pena construirlos.)

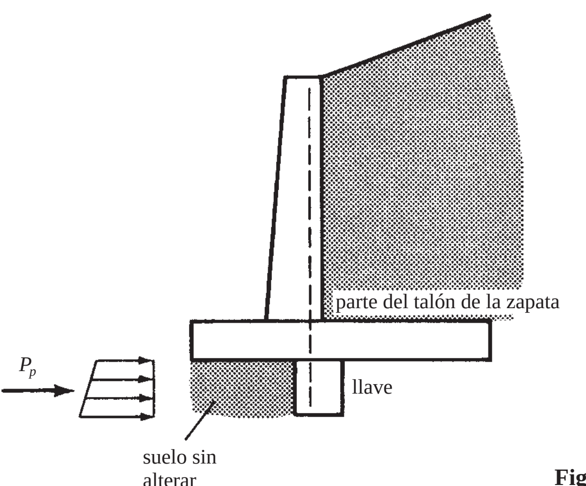
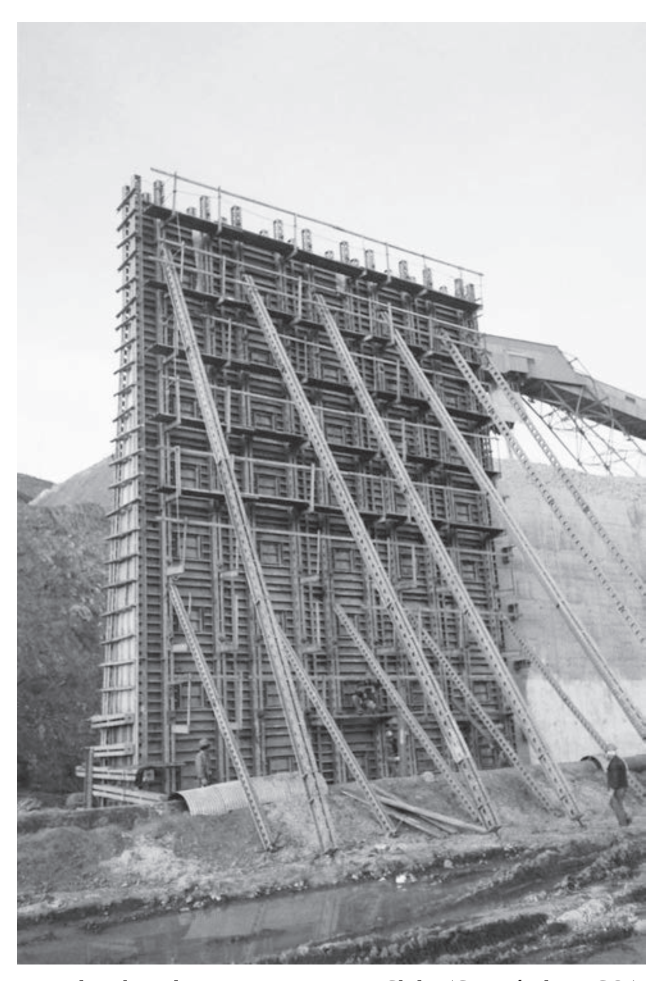


Figura 13.18



Mina de cobre El Teniente, Rancagua, Chile. (Cortesía de EFCO.)

Se considera que los espolones son especialmente necesarios en suelos arcillosos húmedos. El propósito de un espolón es desarrollar una presión pasiva al frente y en la base de la zapata, denotada por P_p en la figura. La teoría al respecto, así como el diseño de los espolones, es un problema por resolver para los ingenieros especializados en geotecnia. En consecuencia, muchos proyectistas seleccionan las dimensiones de los espolones con base en reglas empíricas. Una práctica común es darles una altura entre dos tercios y el total del peralte de la zapata. Comúnmente se construyen con sección transversal cuadrada y sin ningún refuerzo, excepto tal vez el de las espigas que se mencionan en el siguiente párrafo.

Frecuentemente los espolones se construyen debajo del vástago, de manera que algunas espigas o parte del refuerzo vertical puedan prolongarse dentro de ellos. Si se usa este procedimiento, la cara frontal del espolón debe estar por lo menos a 5 plg o 6 plg delante de la cara posterior del vástago para dejar espacio para las espigas. Desde el punto de vista de la mecánica de suelos, los espolones pueden ser algo más efectivos si se colocan un poco más cerca del talón.

Si el espolón penetra en suelo muy firme o aun en roca, se tendrá una mayor resistencia al deslizamiento; esta resistencia es entonces igual a la fuerza necesaria para cortar el espolón de la zapata, es decir, una fuerza de fricción calculada como se describe en las secciones 8.12 y 12.13 de esta obra.

Diseño del talón

La presión lateral del suelo tiende a hacer girar el muro de retención alrededor de su punta. Esta acción tiende a levantar el talón contra el terreno. El relleno empuja hacia abajo sobre el voladizo del talón, generando tensión en su parte superior. La mayor fuerza aplicada al talón de un muro de retención es el peso hacia abajo del relleno detrás del muro. Aunque es cierto que hay alguna presión hacia arriba del suelo, muchos proyectistas no la toman en cuenta, debido a su pequeña magnitud. Las cargas hacia abajo tienden a empujar el talón de la zapata hacia abajo también y la reacción hacia arriba necesaria para mantenerlo unido al vástago es proporcionada por su refuerzo vertical de tensión, que se prolonga dentro de la zapata.

Como la reacción en la dirección de la fuerza cortante no introduce compresión en la parte del talón de la zapata que está en la región del vástago, no se permite determinar V_u a una distancia d de la cara del vástago, tal como se indica en la sección 11.1.3.1 del código ACI. El valor de V_u se determina más bien en la cara del vástago, debido a las cargas hacia abajo. Esta fuerza cortante es a menudo de tal magnitud que rige en la determinación del espesor, pero el momento en la cara del vástago también debe revisarse. Como aquí la carga consiste en suelo y concreto, se usa un factor de 1.2 para efectuar los cálculos.

Obsérvese que las varillas en el talón deben estar en la parte superior de la zapata. En consecuencia, la longitud de anclaje requerida para esas "varillas superiores" puede llegar a ser bastante grande.

El porcentaje de acero de flexión requerido para el talón será a menudo menor que la $\rho_{\text{mín}}$ de $200/f_y$ y de $3\sqrt{f'_c}/f_y$. A pesar de que el artículo (10.5.4) del código ACI exime a las losas de peralte uniforme de estos valores de $\rho_{\text{mín}}$, el autor recomienda usarlos porque el muro de retención es una estructura "tipo viga".

Diseño de la punta

Se supone que la punta es una viga volada desde la cara del vástago. Las cargas que debe soportar incluyen el peso de la losa en voladizo y la presión hacia arriba del suelo bajo ella. Usualmente el relleno arriba de la punta se desprecia (como si hubiese sido erosionado). Es obvio que tal relleno incrementaría la presión del suelo hacia arriba bajo la zapata, porque al actuar hacia abajo y cancelar la presión hacia arriba, no produce cambios apreciables en las fuerzas cortantes y los momentos en la punta.

Se ve en la figura 13.19 que la presión del suelo hacia arriba es la mayor fuerza aplicada a la punta. Como esta presión es causada principalmente por la fuerza lateral H, se usa un factor de carga de 1.6 en los cálculos (la sección 4.1 de esta obra muestra que todas las combinaciones de carga incluyendo las cargas del suelo tienen un factor de carga de 1.6 asociado con H). El momento máximo para diseño se

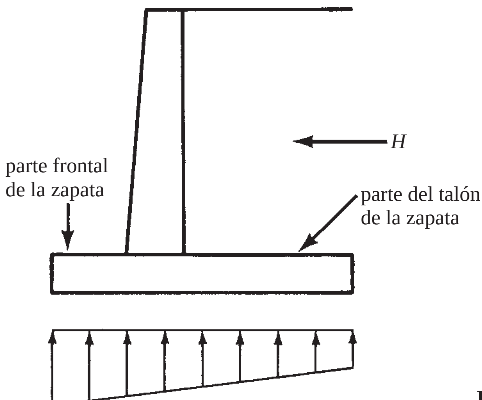


Figura 13.19

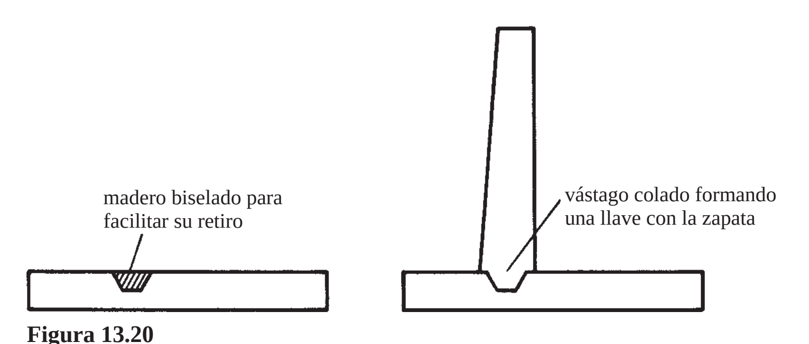


Figura 13.20

toma en la cara del vástago, aunque se supone que la fuerza cortante máxima para diseño ocurre a una distancia *d* de la cara del vástago, porque la reacción en la dirección de la fuerza cortante no introduce compresión en la punta de la zapata. El proyectista común diseña el espesor de la punta del mismo tamaño que el espesor del talón, pero esto no tiene que hacerse así necesariamente.

Es una práctica usual en la construcción de muros de retención proporcionar una llave de amarre por cortante entre la base del vástago y la zapata. Esta práctica, aunque no es errónea, es de dudoso valor. La llave se forma normalmente colocando un madero biselado de 2″ × 4″ o de 2″ × 6″ en la parte superior de la zapata, como se muestra en la figura 13.20. Cuando el concreto fragua, el madero se retira y al colarse el vástago se forma la llave. Se ha vuelto más común simplemente raspar la superficie de la zapata sobre la que se colará el vástago. Esta práctica parece ser tan satisfactoria como el uso de una llave.

En el ejemplo 13.3, se seleccionan varillas del #8 a 6 plg entre centros para el acero vertical en la base del vástago. Estas varillas pueden empotrarse en la zapata con fines de anclaje o pueden usarse espigas iguales al acero del vástago para la transferencia. Este último procedimiento es bastante común porque es difícil mantener el acero del vástago en posición mientras se cuela el concreto de la base.

La longitud de anclaje requerida para las varillas #8 dentro de la zapata o para las espigas #8, es de 33 plg, cuando $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2 y $f'_c = 3\ 000$ lb/plg^2. Esta longitud no puede obtenerse verticalmente en la zapata de 1 pie 6 plg, a menos que las varillas o las espigas se doblen como en la figura 13.21(*a*) o

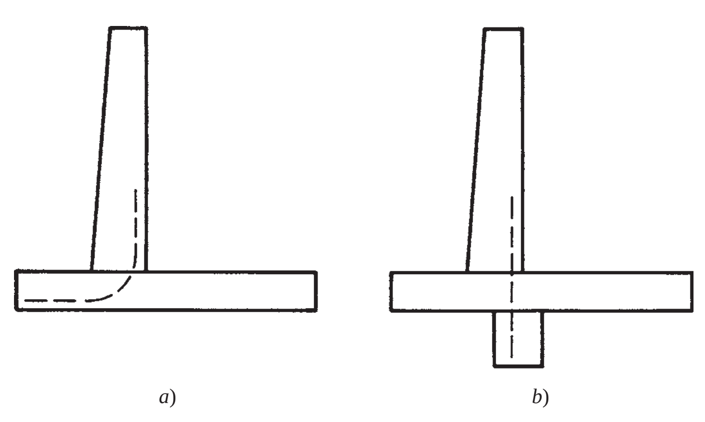


Figura 13.20

se prolonguen a través de la zapata hacia un espolón en la base, como se muestra en la figura 13.21(*b*). En realidad, la longitud de anclaje requerida puede reducirse si se usa un número mayor de espigas más pequeñas. Para espigas #6, ℓ_d es de 20 plg.

Si en vez de espigas las varillas verticales de la pared se empotran en la zapata, éstas no deben prolongarse hasta el vástago más de 8 o 10 pies antes de empalmarlas, porque entonces son difíciles de manejar en la construcción y pueden fácilmente desalinearse, o aun romperse. De hecho, como puede verse en la figura 13.21(*a*), tal disposición del acero de la pared puede en ocasiones resultar muy económico.

El momento flexionante en el vástago disminuye rápidamente arriba de la base; en consecuencia, la cantidad del refuerzo puede reducirse en forma proporcional. Debe recordarse que esas varillas pueden cortarse sólo de acuerdo con los requisitos para longitud de anclaje del código ACI.

El ejemplo 13.3 ilustra el diseño detallado de un muro de retención en voladizo. Se proporcionan en la solución varias observaciones y comentarios importantes que deben leerse cuidadosamente.

EJEMPLO 13.3

Terminar el diseño del muro de retención en voladizo cuyas dimensiones se estimaron en el ejemplo 13.2 y se muestran en la figura 13.22, si $f'_c = 3\,000$ lb/plg², $f_y = 60\,000$ lb/plg², $q_a = 4\,000$ lb/pie² y el coeficiente de fricción por deslizamiento es igual a 0.50 para concreto sobre suelo. Use una ρ aproximadamente igual a $0.18f'_c/f_y$ para mantener un control razonable de la deflexión.

SOLUCIÓN Los factores de seguridad contra el volteo, el deslizamiento y las presiones del suelo bajo el talón y la punta, se calculan usando las cargas reales sin factorizar.

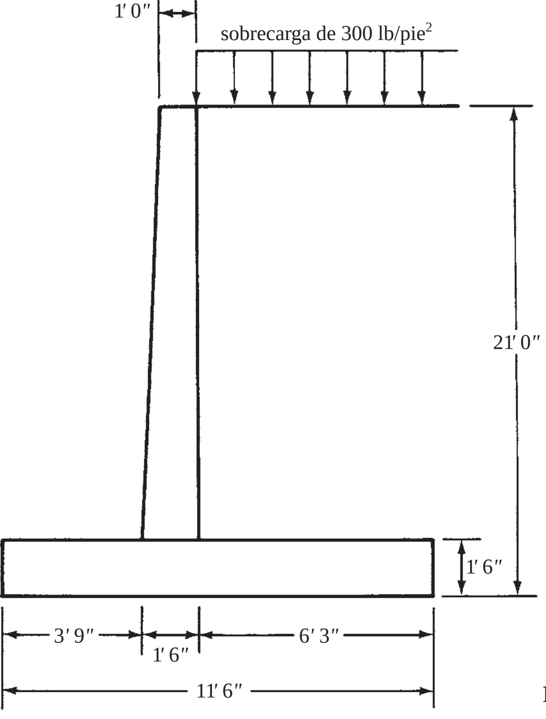


Figura 13.22

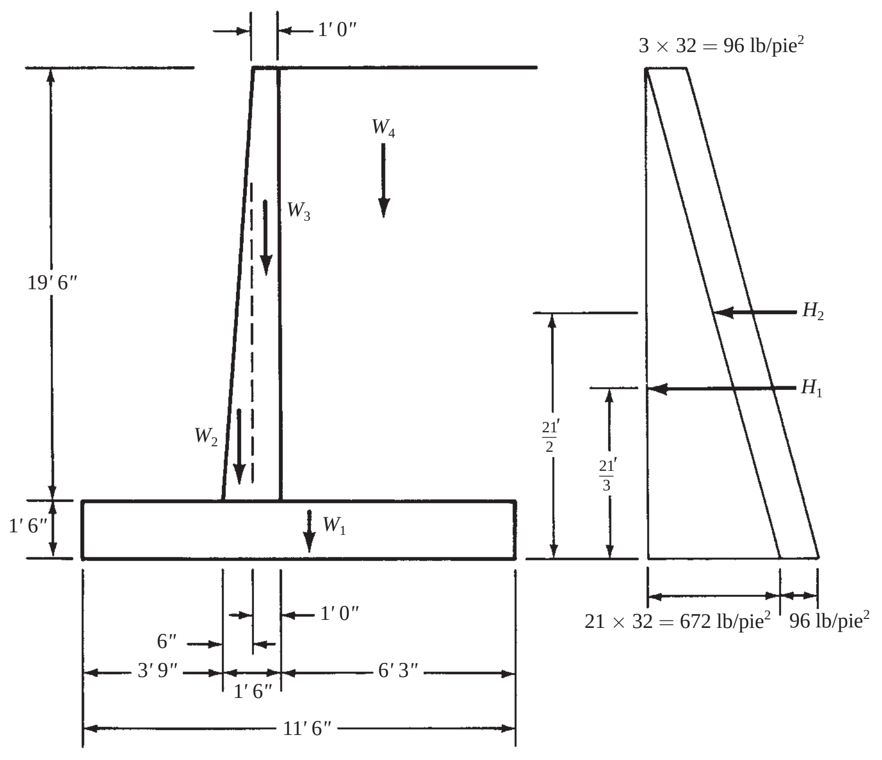


Figura 13.23

Factor de seguridad contra volteo (con referencia a la figura 13.23)

Momento de volteo		
Fuerza	Brazo del momento	Momento
$H_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(21)(672)$	$=$ 7 056 lb × 7.00′	= 49 392 pie-lb
$H_2 = (21)(96)$	$=$ 2 016 lb × 10.50′	= 21 168 pie-lb
Total		70 560 pie-lb

Momento resistente				
Fuerza		Brazo del momento		Momento
$W_1 = (1.5)(11.5)(150)$	$=$	2 588 lb × 5.75′	$=$	14 881 pie-lb
$W_2 \quad \left(\frac{1}{2}\right)(19.5)\left(\frac{6}{12}\right)(150)$	$=$	731 lb × 4.08′	$=$	2 982 pie-lb
$W_3 = (19.5)\left(\frac{12}{12}\right)(150)$	$=$	2 925 lb × 4.75′	$=$	13 894 pie-lb
$W_4 = (22.5)(6.25)(100)$	$=$	14 062 lb × 8.37′	$=$	117 699 pie-lb*
R_v	$=$	20 306 lb $\quad M$	$=$	149 456 pie-lb

*Incluye la sobrecarga.

$$\text{Factor de seguridad contra volteo} = \frac{149\,456}{70\,560} = 2.12 > 2.00 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Factor de seguridad contra deslizamiento

Aquí se desprecia la presión pasiva contra el muro. Normalmente se considera que el factor de seguridad debe ser por lo menos igual a 1.5. Si no es satisfactorio, una zapata un poco más ancha del lado del talón se encargará fácilmente de la situación. Además de o en lugar de esta solución, puede usarse un espolón, tal vez de 1 pie 6 plg × 1 pie 6 plg (tamaño seleccionado para suministrar suficiente longitud de desarrollo para las dovelas seleccionadas posteriormente en este diseño). Aquí no se dedica espacio para mejorar este factor de seguridad.

$$\text{Fuerza que causa el deslizamiento} = H_1 + H_2 = 9\,072 \text{ lb}$$

$$\text{Fuerza resistente} = \mu R_v = (0.50)(20\,306) = 10\,153 \text{ lb}$$

$$\text{Factor de seguridad} = \frac{10\,153}{9\,072} = 1.12 < 1.50 \qquad \underline{\underline{\text{No sirve}}}$$

Presiones del suelo en la zapata

$$R_v = 20\,306 \text{ lb localizada a una distancia } \bar{x} \text{ de la punta de la zapata}$$

$$\bar{x} = \frac{149\,456 - 70\,560}{20\,306} = \frac{78\,896}{20\,306} = 3.89' \qquad \underline{\underline{\text{Justo dentro del tercio medio}}}$$

$$\text{Presión del suelo} = -\frac{R_v}{A} \pm \frac{Mc}{I}$$

$$A = (1)(11.5) = 11.5 \text{ pie}^2$$

$$I = \left(\frac{1}{12}\right)(1)(11.5)^3 = 126.74 \text{ pie}^4$$

$$f_{\text{punta}} = -\frac{20\,306}{11.5} - \frac{(20\,306)(5.75 - 3.89)(5.75)}{126.74}$$

$$= -1\,766 - 1\,714 = -3\,480 \text{ lb/pie}^2$$

$$f_{\text{talón}} = -1\,766 + 1\,714 = -52 \text{ lb/pie}^2$$

Diseño del vástago

Las fuerzas laterales aplicadas al vástago se calculan usando un factor de carga de 1.6 como se muestra en la figura 13.24.

Diseño del vástago por momento

$$M_u = (H_1)(6.50) + (H_2)(9.75) = (9\,734)(6.50) + (2\,995)(9.75)$$

$$M_u = 92\,472 \text{ pie-lb}$$

Use

$$\rho = \text{aproximadamente } \frac{0.18 f'_c}{f_y} = \frac{(0.18)(3\,000)}{60\,000} = 0.009$$

$$\frac{M_u}{\phi b d^2} \text{ (de la tabla A.12)} = 482.6 \text{ lb/plg}^2$$

$$bd^2 = \frac{(12)(92\,472)}{(0.9)(482.6)} = 2\,555$$

$$d = \sqrt{\frac{2\,555}{12}} = 14.59''$$

$$h = 14.59 + 2'' + \frac{1''}{2} = 17.09'' \qquad \underline{\underline{\text{Digamos } 18'' \ (d = 15.50'')}}$$

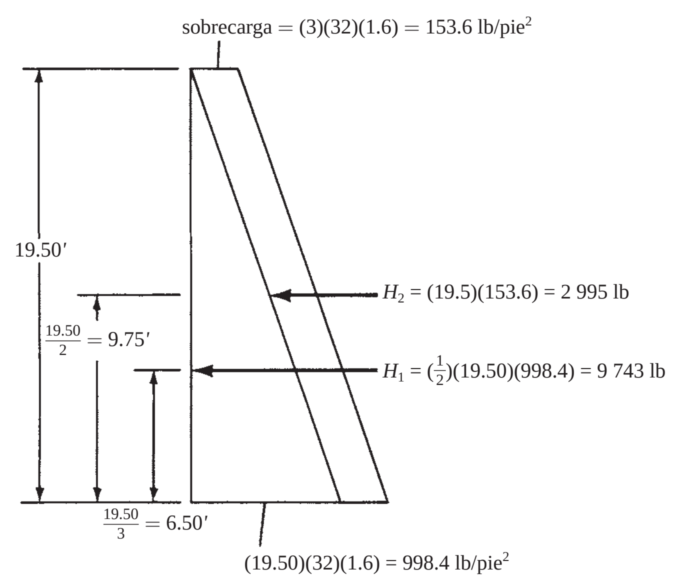


Figura 13.24

$$\frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{(12)(92\,472)}{(0.90)(12)(15.5)^2} = 427.7$$

$$\rho = 0.00786 \text{ (de la tabla A.12 del apéndice)}$$

$$A_s = (0.00786)(12)(15.5) = 1.46 \text{ plg}^2$$

Use #8 @ 6″ (1.57 plg²)

$$\text{Mínima } \rho \text{ vertical según la sección 14.3 del ACI} = 0.0015 < \frac{1.57}{(12)(15.5)} = 0.0084 \qquad \text{OK}$$

$$\text{Mínima } A_s \text{ horizontal} = (0.0025)(12)(\text{promedio del vástago } t)$$

$$= (0.0025)(12)\left(\frac{12+18}{2}\right) = 0.450 \text{ plg}^2$$

(digamos un tercio en la cara interior y dos tercios en la cara exterior)

Use #4 a $7\frac{1}{2}''$ en la cara exterior y #4 a 15″ en la cara interior

Revisión del esfuerzo cortante en el vástago

En realidad, puede usarse V_u a una distancia d de la parte superior de la zapata, pero por simplicidad.

$$V_u = H_1 + H_2 = 9\,734 + 2\,995 = 12\,729 \text{ lb}$$

$$\phi V_c = \phi 2\lambda\sqrt{f'_c}bd = (0.75)(2)(1.0)(\sqrt{3\,000})(12)(15.5)$$

$$= 15\,281 \text{ lb} > 12\,729 \text{ lb} \qquad \text{OK}$$

Diseño del talón

La presión del suelo hacia arriba se desprecia conservadoramente y se usa un factor de carga de 1.2 para calcular el cortante y el momento, porque el suelo y el concreto constituyen la carga.

$$V_u = (22.5)(6.25)(100)(1.2) + (1.5)(6.25)(150)(1.2) = 18\ 563 \text{ lb}$$

$$\phi V_c = (0.75)(2)(1.0)(\sqrt{3\ 000})(12)(14.5) = 14\ 295 < 18\ 563 \qquad \underline{\underline{\text{No es satisfactorio}}}$$

Ensaye un peralte de 24 plg (*d* = 20.5 plg)

Si se desprecia el ligero cambio de V_u con el peralte diferente

$$\phi V_c = (0.75)(2)(1.0)(\sqrt{3\ 000})(12)(20.5)$$
$$= 20\ 211 > 18\ 563 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$M_u \text{ en la cara de la pared} = (18\ 563)\left(\frac{6.25}{2}\right) = 58\ 009 \text{ pie-lb}$$

$$\frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{(12)(58\ 009)}{(0.9)(12)(20.5)^2} = 153$$

$$\rho = \rho_{\text{mín}} \qquad \text{Use } \rho = 0.00333$$

Usando 0.00333,

$$A_x = (0.00333)(12)(20.5) = 0.82 \text{ plg}^2/\text{pie} \qquad \underline{\underline{\text{Use \#8 @ 11}''}}$$

La ℓ_d requerida se calcula con la ecuación 12-1 del ACI para varillas superiores del #8 con $c = 2.50$ plg y $K_{tr} = 0$ es 43 plg < 72 plg disponibles. $\underline{\underline{\text{OK}}}$

En la figura 13.25 se muestra el refuerzo del talón.

Nota: el acero por temperatura y contracción se considera normalmente innecesario en el talón y en la punta. Sin embargo, el autor ha colocado varillas #4 separadas a 18 plg en la dirección larga, como se muestra en las figuras 13.25 y 13.27, para servir como espaciadoras para el acero de flexión y para formar mallas con el refuerzo.

Diseño de la punta

Para cargas de servicio, las presiones del suelo antes determinadas se multiplican por un factor de carga de 1.6 porque son causadas principalmente por fuerzas laterales, como se muestra en la figura 13.26.

$$V_u = 10\ 440 + 7\ 086 = 17\ 526 \text{ lb}$$

(La fuerza cortante puede calcularse a una distancia *d* de la cara del vástago porque la reacción en la dirección del corte introduce compresión en la punta de la losa, pero esta ventaja se desprecia porque 17 526 lb es menor que el cortante de 19 125 lb en el talón, que fue satisfactoria.)

$$M_u \text{ en la cara del vástago} = (7\ 086)\left(\frac{3.75}{3}\right) + (10\ 440)\left(\frac{2}{3} \times 3.75\right) = 34\ 958 \text{ pie-lb}$$

$$\frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{(12)(34\ 958)}{(0.9)(12)(20.5)^2} = 92$$

$$\rho = \text{menor que } \rho_{\text{mín}}$$

Por tanto, use

$$\frac{200}{60\ 000} = 0.00333$$

$$A_s = (0.00333)(12)(20.5) = 0.82 \text{ plg}^2/\text{pie} \qquad \underline{\underline{\text{Use \#8 a cada 11}''}}$$

La ℓ_d requerida se calcula con la ecuación 12-1 del ACI para varillas inferiores del #8 con $c = 2.50$ plg y $K_{tr} = 0$ igual a 33 plg < 42 plg disponibles $\underline{\underline{\text{OK}}}$

En la figura 13.27 se muestra el refuerzo de la punta.

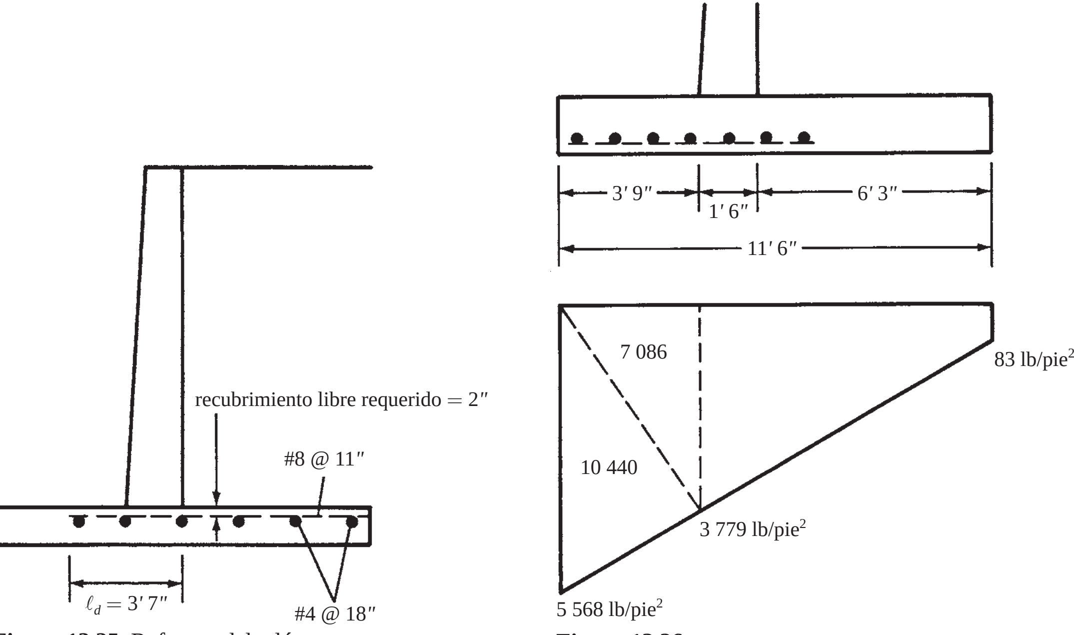


Figura 13.25 Refuerzo del talón.

Figura 13.26

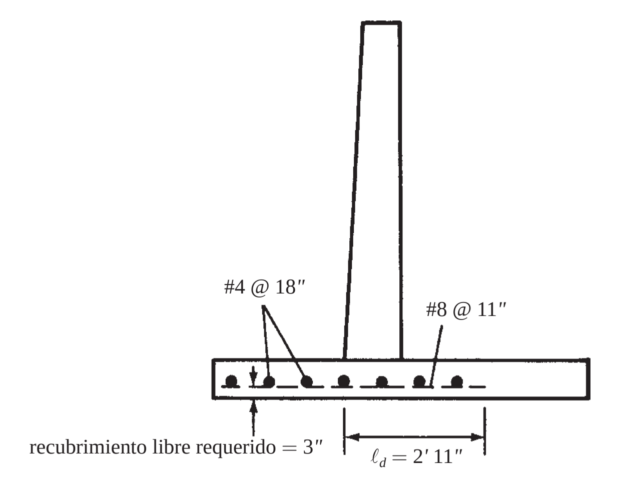


Figura 13.27 Refuerzo de la punta.

Selección de espigas y longitudes del refuerzo vertical del vástago

La selección detallada de las longitudes de las varillas verticales en el vástago se omite aquí para ahorrar espacio y sólo se presentan unos cuantos comentarios generales. Primero, la tabla 13.1 muestra los momentos flexionantes reducidos en el vástago y también las correspondientes reducciones en el refuerzo requerido.

Después de considerar los posibles arreglos del acero en la figura 13.21 y las áreas requeridas de acero en diferentes alturas en la tabla 13.1, el autor decidió usar espigas para la transmisión de la carga a la base de la pared.

Usar espigas #8 a cada 6 plg penetrando 33 plg en zapata y llave

Tabla 13.1

Distancia desde la parte superior del vástago	M_u (pie-lb)	d efectiva del vástago (plg)	ρ	A_s requerida (plg^2/pie)	Varillas necesarias
5′	2 987	11.04	Use $\rho_{mín} = 0.00333$	0.44	#8 @ 18″
10′	16 213	12.58	Use $\rho_{mín} = 0.00333$	0.50	#8 @ 18″
15′	46 080	14.12	0.00452	0.77	#8 @ 12″
19.5′	92 472	15.50	0.00786	1.46	#8 @ 6″

Si estas espigas se empalman al refuerzo vertical del vástago, con no más de la mitad de las varillas empalmadas dentro de la longitud requerida de traslape, los empalmes serán de la clase B (12.15 del código ACI) y sus longitudes de traslape deberán ser iguales al menos a 1.3 $\ell_d = (1.3)(33) = 43$ plg. Por tanto, se usarán dos longitudes de espigas: la mitad de ellas, con 3 pies 7 plg en el vástago y la otra mitad con 7 pies 2 plg poniendo las varillas #7 sobre ellas, la mitad llegando hasta la parte superior del muro y la otra mitad hasta la mitad de la altura. En realidad, puede hacerse un diseño más refinado que implica cortar más varillas. Para tal diseño, es muy útil un diagrama que compare el área de acero teóricamente requerido a varias alturas del vástago con el acero realmente proporcionado. Recuerde que las varillas cortadas deben prolongarse por lo menos una distancia *d* o 12 diámetros más allá de su punto teórico de corte y deben cumplir también los requisitos necesarios de la longitud de anclaje (12.10.3 del código ACI).

13.11 GRIETAS Y JUNTAS EN LOS MUROS

Las grietas horizontales objetables son raras en los muros de retención porque sus caras de compresión son las visibles. Cuando aquéllas se presentan, usualmente se debe a un diseño estructural que no es satisfactorio y no a una contracción. En el capítulo 6 de este libro se presentó el procedimiento del ACI (sección 10.6) para limitar el tamaño de las grietas en las zonas de tensión de las vigas y las losas en una dirección. Estos requisitos pueden aplicarse al acero vertical del muro de retención. Sin embargo, generalmente son innecesarios porque el acero vertical está sobre el lado de la tierra del muro.

Por otra parte, las grietas verticales en muros son bastante comunes, a menos que se usen suficientes juntas de construcción. Las grietas verticales están relacionadas con el alivio de los esfuerzos de tensión debido a la contracción, provocando que las fuerzas de tensión resultantes excedan la capacidad del acero longitudinal.

Pueden usarse juntas de construcción tanto en sentido horizontal como vertical entre colados sucesivos de concreto. Se puede limpiar la superficie del concreto endurecido dándole una textura rugosa, o bien se pueden usar llaves de amarre, como se muestra en la figura 13.28(*a*) para formar juntas horizontales de construcción.

Si el concreto está impedido de moverse libremente al contraerse, acaso por estar unido a partes más rígidas de la estructura, se agrietará en las zonas débiles. Las juntas de contracción son zonas débiles construidas así para que las fallas por contracción ocurran en los lugares preparados. Cuando los esfuerzos de tensión por contracción son muy grandes, separan esas juntas de contracción y forman grietas nítidas, en vez de las grietas retorcidas que de otra manera se podrían presentar. Además de servir para los problemas de contracción, estas juntas sirven para los asentamientos diferenciales. Deben estar separadas a intervalos del orden de 25 pies entre centros (la AASHTO no las permite a más de 30 pies). Generalmente, las juntas se construyen con bandas de caucho que se dejan en el sitio o bien con piezas de madera que posteriormente se retiran y se calafatea la junta.

Las juntas de expansión son juntas verticales que separan completamente las diferentes partes de un muro. Se colocan aproximadamente entre 50 y 100 pies entre centros (según la AASHTO la separación máxima no debe ser mayor de 90 pies). Generalmente, las varillas de refuerzo atraviesan todas las juntas

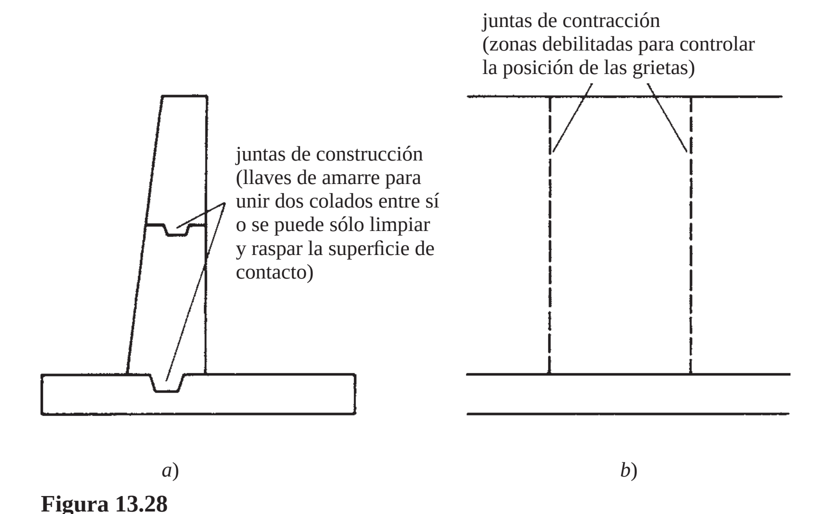


Figura 13.28

para mantener el alineamiento horizontal y vertical. Cuando las varillas atraviesan una junta, uno de sus extremos a un lado de la junta se engrasa o se envaina en una cubierta para que pueda darse la expansión deseada.

Es difícil estimar la cantidad de contracción o expansión de un muro dado porque éste debe deslizarse sobre el suelo subyacente y la resistencia por fricción resultante puede ser de tal magnitud que el movimiento se reduzca considerablemente o incluso sea impedido. Un valor aproximado para el ancho de una junta de expansión puede determinarse con la siguiente expresión, en la cual ΔL es el cambio de longitud, L es la distancia entre juntas, ΔT es el cambio estimado de temperatura y 0.000005 por unidad de longitud y por grado Fahrenheit es el coeficiente estimado de contracción del muro.

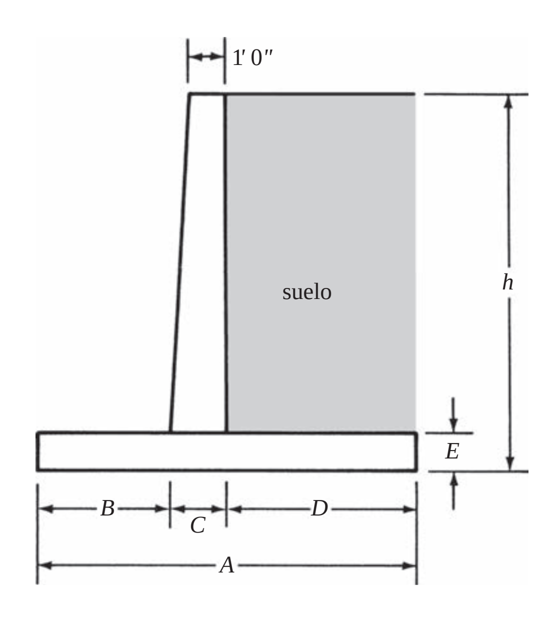
$$\Delta L = (0.000005L)(\Delta T)$$



Alcantarilla rectangular o de cajón. (Cortesía de Economy Forms Corporation.)

PROBLEMAS

En los problemas 13.1 a 13.4, use la ecuación de Rankine para calcular la fuerza activa horizontal total y el momento de volteo para el muro mostrado en la siguiente figura. Suponga que $\phi = 30°$ y que el suelo pesa 100 lb/pie^3. Desprecie el terreno sobre la punta del muro para cada muro.



Problema	A	B	C	D	E	h
13.1	8′0″	2′0″	1′6″	4′6″	1′6″	14′0″
13.2	10′6″	2′6″	1′9″	6′3″	1′8″	18′0″
13.3	11′0″	3′6″	1′6″	6′0″	1′6″	20′0″
13.4	12′6″	4′0″	1′6″	7′0″	2′0″	22′0″

(*Respuesta al problema 13.1:* 3 266 lb; 15 242 pie-lb)

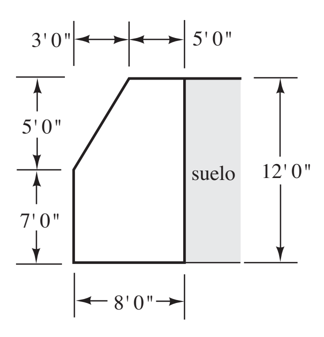
(*Respuesta al problema 13.3:* 6 666 lb; 44 440 pie-lb)

13.5 Repita el problema 13.1 si δ es igual a 20°. (*Resp*. 4 059 lb; 18 943 pie-lb)

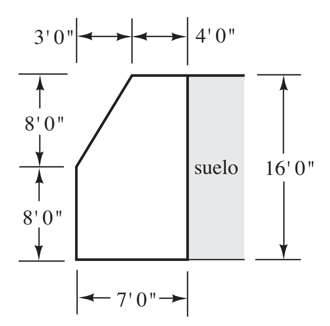
13.6 Repita el problema 13.3 si δ es igual a 23°40′.

En los problemas 13.7 a 13.9 determine los factores de seguridad contra volteo y deslizamiento para los muros de gravedad y semigravedad mostrados si $\phi = 30°$ y el coeficiente de fricción (concreto sobre suelo) es 0.5. Calcule también la presión del suelo bajo la punta y el talón de cada zapata. El suelo pesa 100 lb/pie^3 y el concreto simple usado en la zapata pesa 145 lb/pie^3. Determine las presiones horizontales usando la ecuación de Rankine.

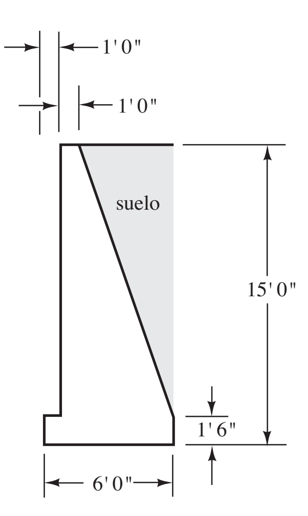
Problema 13.7 (*Resp*. 5.69, 2.67, 2 193 lb/pie^2, − 1 015 lb/pie^2)



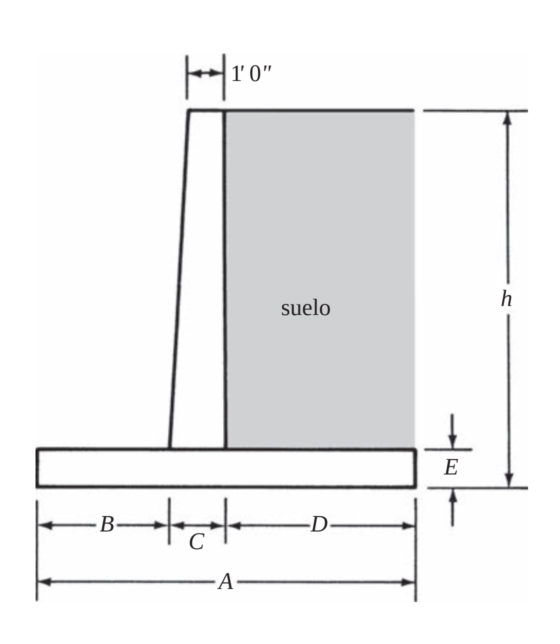
Problema 13.8



Problema 13.9 (*Resp*. 1.73, 1.32, − 4 739 lb/pie^2, − 0 lb/pie^2)



En los problemas 13.10 a 13.13, si el coeficiente de Rankine k_a es igual a 0.75, el peso del suelo es 110 lb/pie^3, el peso del concreto es 150 lb/pie^3 y el coeficiente de fricción (concreto sobre suelo) es igual a 0.55, determine los factores de seguridad contra volteo y deslizamiento para el muro mostrado en la siguiente figura.



Problema	A	B	C	D	E	h
13.10	8′0″	2′0″	1′0″	5′0″	1′3″	14′0″
13.11	11′0″	2′6″	1′6″	7′0″	1′6″	15′0″
13.12	13′6″	4′0″	1′6″	8′0″	1′6″	18′0″
13.13	14′0″	3′6″	1′6″	9′0″	1′9″	20′0″

(*Respuesta al problema 13.11:* 2.70, 0.93.)

(*Respuesta al problema 13.13:* 2.41, 0.86.)

13.14 Repita el problema 13.4 suponiendo una sobrecarga de 200 lb/pie^2.

13.15 Repita el problema 13.9 suponiendo una sobrecarga de 200 lb/pie^2. (*Resp.* 13.6, 1.12, − 8 089 lb/pie^2, 0 lb/pie^2.)

13.16 Repita el problema 13.12 suponiendo una sobrecarga de 330 lb/pie^2. Determine también las presiones del suelo en la punta y en el talón.

En los problemas 13.17 a 13.20, determine las dimensiones aproximadas de los muros de retención, verifique los factores de seguridad contra volteo y deslizamiento; calcule las presiones del suelo para el muro mostrado. Determine también el espesor requerido del vástago en su base y seleccione el refuerzo vertical ahí, usando $f_y = 60\,000$ lb/plg^2, $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2, $q_a = 5\,000$ lb/pie^2, ρ = aproximadamente $0.18 f'_c/f_y$, ángulo de fricción interna = 33°40′ y coeficiente de fricción deslizante (concreto sobre suelo) = 0.45. Peso del suelo = 100 lb/pie^3. Peso del concreto = 150 lb/pie^3.

Problema	h	Sobrecarga
13.17	12′0″	Ninguna
13.18	16′0″	Ninguna
13.19	18′0″	Ninguna
13.20	15′0″	200 lb/pie^2

(*Respuesta al problema 13.17:* 6 pies de ancho, factor de seguridad por volteo = 2.62.)

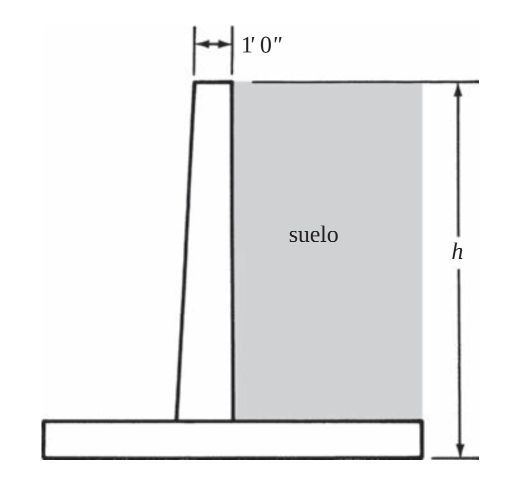
(*Respuesta al problema 13.19:* 8 pies 6 plg de ancho, factor de seguridad por volteo = 2.30.)

En los problemas 13.21 a 13.23, determine la misma información requerida para los problemas 13.17 a 13.20 con los mismos datos, pero diseñe los talones en vez de los vástagos.

Problema	h	Sobrecarga
13.21	14′0″	Ninguna
13.22	18′0″	300 lb/pie^2
13.23	20′0″	300 lb/pie^2 comenzando a 4′0″ de la cara interior del muro

(*Respuesta al problema 13.21:* 6 pies 6 plg de ancho, factor de seguridad por volteo = 2.24.)

(*Respuesta al problema 13.23:* 10 pies 3 plg de ancho, factor de seguridad por volteo = 2.16.)

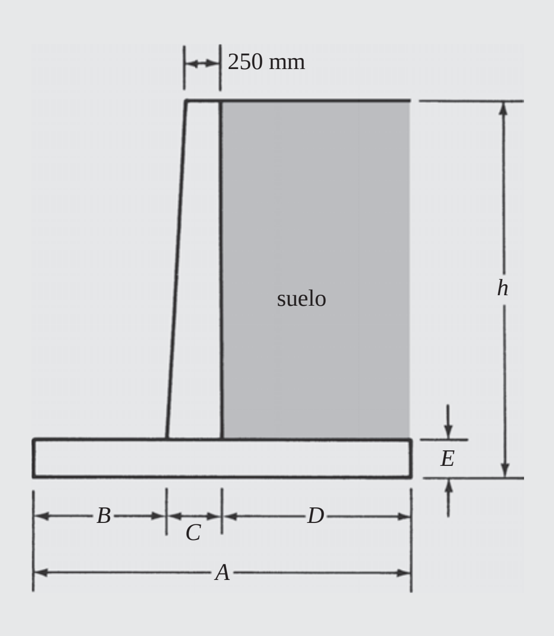


Problemas con unidades del SI

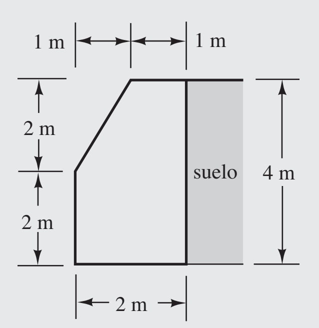
En los problemas 13.24 a 13.26, use la ecuación de Rankine para calcular la fuerza horizontal total y el momento de volteo para el muro mostrado. Suponga que sen $\phi = 0.5$ y un peso del suelo de 16 kN/m^3.

Problema	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*h*
13.24	2.400 m	600 mm	500 mm	1.300 m	450 mm	4 m
13.25	2.700 m	700 mm	500 mm	1.500 m	500 mm	6 m
13.26	3.150 m	800 mm	550 mm	1.800 m	500 mm	8 m

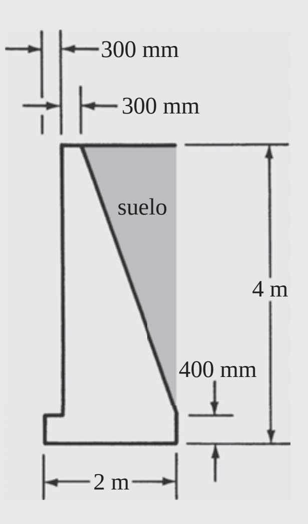
(*Respuesta al problema 13.25:* 95.904 kN, 191.908 kN-m.)



Problema 13.27 (*Resp.* 3.06, 1.68, – 141.87 kN/m^2, – 17.03 kN/m^2.)



Problema 13.28

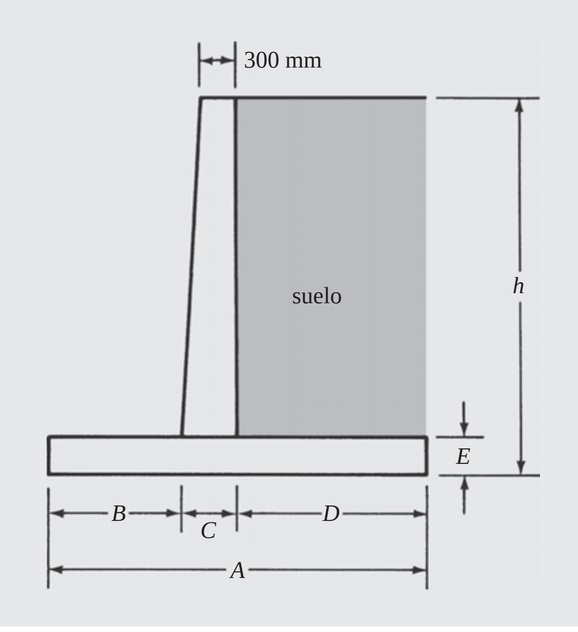


En los problemas 13.27 y 13.28, determine los factores de seguridad contra volteo y contra deslizamiento para los muros de gravedad y semigravedad mostrados si $\phi = 30°$ y el coeficiente de deslizamiento (concreto sobre suelo) es 0.45. Calcule también la presión del suelo bajo la punta y el talón de cada zapata. El suelo pesa 16 kN/m^3 y el concreto simple usado en las zapatas pesa 22.7 kN/m^3.

En los problemas 13.29 y 13.30, si el coeficiente de Rankine es igual a 0.35, el peso del suelo es 16 kN/m^3, el peso del concreto es 23.5 kN/m^3 y el coeficiente de fricción (concreto sobre suelo) es igual a 0.50, determine los factores de seguridad contra el volteo y el deslizamiento para el muro mostrado.

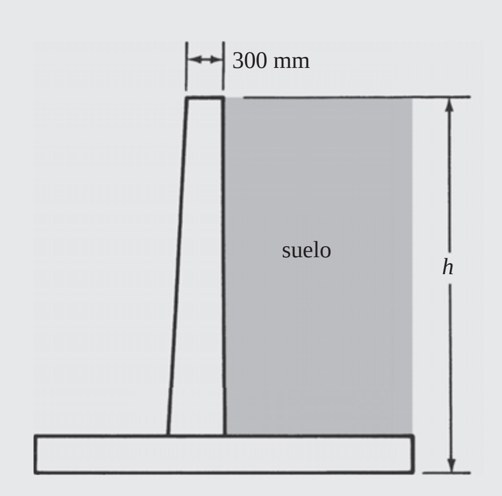
Problema	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*h*
13.29	4 m	1.5 m	300 mm	2.2 m	700 mm	5 m
13.30	5 m	1.5 m	500 mm	3.0 m	800 mm	7 m

(*Respuesta al problema 13.29:* 5.32, 1.77.)



En los problemas 13.31 a 13.33, escoja dimensiones aproximadas para el muro de retención en voladizo mostrado y determine el refuerzo requerido en la base del vástago usando esas dimensiones y los siguientes datos: $f'_c = 21$ Mpa, $f_y = 420$ MPa, $\rho =$ aproximadamente $\frac{3}{8}\rho_{bal}$, ángulo de fricción interna 33°40′. Peso del suelo = 16 kN/m^3 y peso del concreto reforzado = 23.5 kN/m^3.

Problema	*h*	Sobrecarga
13.31	4 m	Ninguna
13.32	6 m	Ninguna
13.33	7 m	4 kN/m



(*Respuesta al problema 13.31:* usar 320 mm en la base del vástago con $d = 250$ mm y varillas #16 @ 225 mm en acero vertical.) (*Respuesta al problema 13.33:* Usar 560 mm en la base del vástago con $d = 490$ mm y varillas #25 @ 225 mm en acero vertical.)

14

Estructuras continuas de concreto reforzado

14.1 INTRODUCCIÓN

Durante la construcción de estructuras de concreto reforzado, se deposita tanto concreto como es posible en cada colada. Por ejemplo, el concreto para un piso completo o para una gran parte de él, incluyendo las vigas, trabes y partes de las columnas, se cuela todo al mismo tiempo. Las varillas de refuerzo se extienden de miembro a miembro, así como de un claro a otro de una viga. Cuando se tienen juntas de construcción, las varillas de refuerzo se dejan salidas de la parte ya colada, de manera que se puedan empalmar o traslapar con las varillas del concreto aún por colarse. Además, el concreto ya colado se limpia para que el nuevo concreto se adhiera a él más eficazmente. El resultado es que las estructuras de concreto reforzado son generalmente monolíticas o continuas y por ello estáticamente indeterminadas.

Una carga colocada en un claro de una estructura continua ocasionará cortantes, momentos y deflexiones en los otros claros de esa estructura. No sólo son continuas las vigas de una estructura de concreto reforzado, sino que toda la estructura es continua. En otras palabras, las cargas aplicadas a una columna afectan a las vigas, losas y otras columnas y viceversa.

El resultado es que se obtienen estructuras más económicas porque los momentos flexionantes son menores y por tanto también el tamaño de los miembros. Aunque el análisis y diseño de las estructuras continuas es más complicado que el de las estructuras estáticamente determinadas, este hecho es cada vez menos importante, gracias a la creciente disponibilidad de buen software.

14.2 CONSIDERACIONES GENERALES DE LOS MÉTODOS DE ANÁLISIS

En el diseño de concreto reforzado usamos actualmente métodos elásticos para analizar las estructuras cargadas con cargas últimas o factorizadas. Tal procedimiento puede no parecerle correcto al lector, pero da resultados satisfactorios. Éste podría preguntar: ¿por qué no usamos análisis último o inelástico en las estructuras de concreto reforzado? La respuesta es que nuestra teoría y nuestras pruebas no son lo suficientemente avanzadas.

Es cierto que bajo ciertas circunstancias se permiten algunas modificaciones de los momentos para tomar en cuenta el comportamiento último o inelástico, como se describe en la sección 14.5 de este capítulo. Sin embargo, en general usaremos el análisis elástico para las estructuras de concreto reforzado. En realidad, ningún método de análisis, elástico o inelástico, da resultados exactos debido a los efectos desconocidos del flujo plástico, de los asentamientos, de la contracción, de la mano de obra, etcétera.



Centro Financiero Cofinanzas, Caracas, Venezuela. (Cortesía de Economy Forms Corporation.)

14.3 LÍNEAS DE INFLUENCIA CUALITATIVAS

Hay muchos métodos que pueden usarse para analizar las estructuras continuas. El método más común de cálculo manual es el de distribución de momentos, pero se usan con frecuencia otros métodos, como el matricial, las soluciones con computadora y otros. Cualquiera que sea el método que usted use, debe entenderse que para determinar los cortantes y los momentos máximos de las diferentes secciones de la estructura, es necesario considerar las diferentes posiciones de las cargas vivas. Como un antecedente para este material, se presenta un breve repaso de las *líneas de influencia cualitativas*.

Las líneas de influencia cualitativas se basan en un principio introducido por el profesor alemán Heinrich Müller-Breslau. Este principio es el siguiente: *la forma deformada de una estructura representa a cierta escala la línea de influencia para una función, tal como una reacción, una fuerza cortante o un momento, si se permite que la función bajo consideración actúe a lo largo de una pequeña distancia.* En otras palabras, la estructura genera su propia línea de influencia cuando se efectúa el desplazamiento apropiado.

La forma de la línea de influencia usual necesaria para estructuras continuas es tan sencilla de obtener con el principio de Müller-Breslau, que en muchos casos no es necesario calcular los valores numéricos de las coordenadas. Es posible esbozar el diagrama en forma aproximada con la suficiente exactitud como para localizar las posiciones críticas de las cargas vivas para varias funciones de la estructura. Estos diagramas se denominan líneas de influencia *cualitativas,* mientras que aquellas con valores numéricos se denomina líneas de influencia *cuantitativas*.[1]

---

[1]McCormac, J.C., 2007, *Structural Analysis: Using Classical and Matrix Methods*, 4a. ed. (Hoboken, NJ: John Wiley & Sons), págs. 189-194.

Si se desea una línea de influencia para la reacción izquierda de la viga continua en la figura 14.1(*a*), su forma general se puede determinar permitiendo que la reacción actúe hacia arriba una distancia unitaria, como se muestra en la figura 14.1(*b*). Si el extremo izquierdo de la viga se empuja hacia arriba, la viga tomará la forma mostrada. Esta forma deformada puede trazarse fácilmente si se recuerda que los otros apoyos se consideran fijos. La línea de influencia para V_c, trazada de manera similar, se muestra en la figura 14.1(*c*).

La figura 14.1(*d*) muestra la línea de influencia para el momento positivo en el punto *x* cercano al centro del claro izquierdo. Se supone que la viga tiene una articulación en *x* y que se aplica un par a cada lado de la articulación, la cual causará compresión en las fibras superiores. La flexión de la viga a cada lado de la articulación ocasiona que el claro izquierdo tome la forma indicada y la forma deformada del resto de la viga puede esbozarse de forma aproximada. Se usa un procedimiento similar para dibujar la línea de influencia del momento negativo en el punto *y* del tercer claro, excepto que un par de momentos se aplica en el pasador supuesto, que tienden a causar compresión en las fibras inferiores de la viga, correspondiente a un momento negativo.

Finalmente, se dibujan líneas de influencia cualitativas para la fuerza cortante positiva en los puntos *x* y *y*. Se supone que la viga está cortada en el punto *x y* que dos fuerzas verticales de la naturaleza requerida para generar una fuerza cortante positiva se aplican a la viga en los lados de la sección cortada. La viga tomará la forma mostrada en la figura 14.1(*f*). Se usa el mismo procedimiento en la figura 14.1(*g*) para dibujar un diagrama para la fuerza cortante positiva en el punto *y*. [Teóricamente, para las líneas de influencia cualitativas del cortante, es necesario tener un momento a cada lado de la sección cortada que sea suficiente para mantener las pendientes iguales. Tales momentos se indican en las partes (*f*) y (*g*) de la figura con la letra *M*.]

Con estos diagramas se dispone de considerable información respecto a las condiciones críticas de la carga viva. Si se quiere un valor máximo positivo de V_A para una carga viva uniforme, la carga

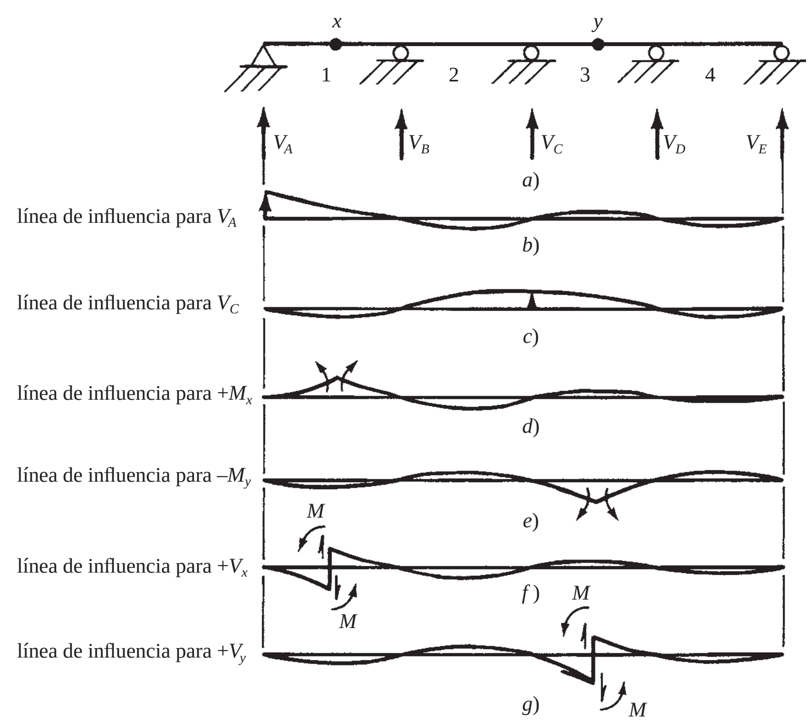


Figura 14.1 Líneas de influencia cualitativas.

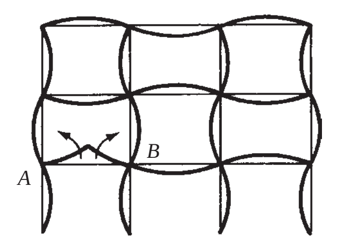


Figura 14.2

se coloca en los claros 1 y 3, donde el diagrama tiene ordenadas positivas; si se requiere un momento negativo máximo en el punto *y*, se cargan los claros 2 y 4, etcétera.

Las líneas de influencia cualitativas son particularmente útiles para determinar las posiciones críticas de las cargas en edificios, como se ilustra con la línea de influencia para el momento en el edificio mostrado en la figura 14.2. Al dibujar diagramas para un marco entero, se supone que los nudos pueden rotar libremente, pero también se supone que los miembros en cada nudo están rígidamente conectados entre sí, de manera que los ángulos entre ellos no cambien durante la rotación. La línea de influencia mostrada en la figura es para el momento positivo en el centro de la viga *AB*.

Los claros que deben cargarse para generar un momento positivo máximo son obvios en el diagrama. Debe estar claro que las cargas sobre un miembro alejado más de tres claros aproximadamente, tendrán poco efecto sobre la función bajo consideración.

En los últimos párrafos, las líneas de influencia se han usado para determinar las posiciones críticas en que deben colocarse las cargas vivas para generar momentos máximos. Los mismos resultados pueden obtenerse (y tal vez más fácilmente) considerando la forma deformada o curvatura de un miembro bajo carga. Si las cargas vivas se colocan de manera que ocasionen la curvatura máxima en un punto particular, ellas flexionarán al máximo la estructura en ese punto, lo cual significa que se obtendrá el momento máximo.

En la viga continua de la figura 14.3(*a*), se desea generar el momento negativo máximo en el apoyo *B*, mediante la colocación apropiada de una carga viva uniforme. En la parte (*b*) de la figura está esbozada la forma deformada de la viga como sería cuando se tiene un momento negativo en *B* y el resto de la forma deformada de la viga está dibujado con líneas punteadas. Entonces la carga viva uniforme

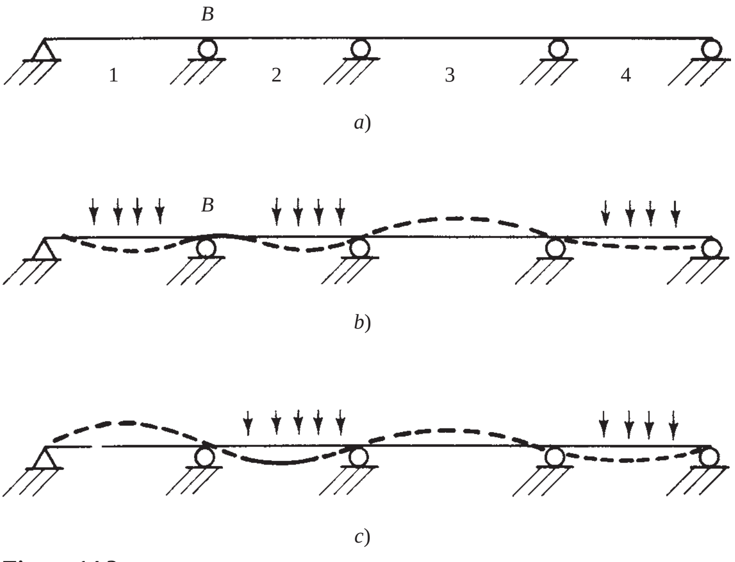


Figura 14.3

debe colocarse entonces en aquellas posiciones que exageren esa forma deformada. Esto se hace colocando la carga en los claros 1, 2 y 4.

Una situación similar se muestra en la figura 14.3(*c*), donde se quiere obtener un momento positivo máximo en el centro del segundo claro. La forma deformada de la viga se ilustra tal como sería cuando se presenta un momento positivo en ese claro y el resto de la forma deformada de la viga se muestra como prolongación de esa porción. Para exagerar esta flexión positiva o hacia abajo en el segundo claro, debemos colocar la carga viva en los claros 2 y 4.

14.4 DISEÑO AL LÍMITE

Puede demostrarse claramente que una viga o marco estáticamente indeterminado por lo general no se colapsa cuando alcanza su capacidad por momento último en sólo una sección. Más bien, hay una redistribución de los momentos en la estructura. Su comportamiento es algo similar al caso de tres hombres que caminan cargando un tronco sobre sus hombros y uno de ellos se cansa y baja un poco su hombro. El resultado es una redistribución de la carga hacia los otros hombres, con cambios en las fuerzas cortantes y momentos en el tronco.

Conviene en este momento aclarar la diferencia entre los términos *diseño plástico*, como se usa en acero estructural y *diseño al límite*, como se usa en concreto reforzado. En acero estructural, el diseño plástico implica (*a*) el momento resistente incrementado de un miembro después de que la fibra extrema queda esforzada a la fluencia y (*b*) la redistribución o cambio en el diagrama de momento del miembro. (El diseño por factores de carga y resistencia [LRFD] es un método de diseño en acero que incorpora la mayor parte de la teoría asociada con el diseño plástico.) En el concreto reforzado, el incremento del momento resistente de una sección después de que parte de la sección queda esforzada a la fluencia ya ha sido aclarado en el procedimiento de diseño por resistencia. Por tanto, el diseño al límite de una estructura de concreto reforzado tiene que ver sólo con el cambio en el diagrama de momentos, después de que el acero de refuerzo en alguna sección transversal queda esforzado a su punto de fluencia.

La hipótesis básica usada para el diseño al límite de estructuras de concreto reforzado y del diseño plástico de estructuras de acero es sobre la capacidad que tienen estos materiales para resistir un llamado momento de fluencia, con un incremento apreciable de la curvatura local. En efecto, si una sección de un miembro estáticamente indeterminado alcanza este momento, comenzará a fluir pero no fallará. La sección se comporta como una articulación (llamada *articulación plástica*) que envía el exceso de carga a las secciones de los miembros que tienen menores esfuerzos. El comportamiento resultante es parecido al del tronco soportado por tres hombres, uno de los cuales baja su hombro.

Para aplicar el diseño al límite o la teoría plástica a una estructura particular, es necesario que la estructura pueda comportarse plásticamente. Para este análisis inicial se supone un material plástico ideal, como el acero estructural dúctil. La figura 14.4 muestra la relación entre el momento y la curvatura

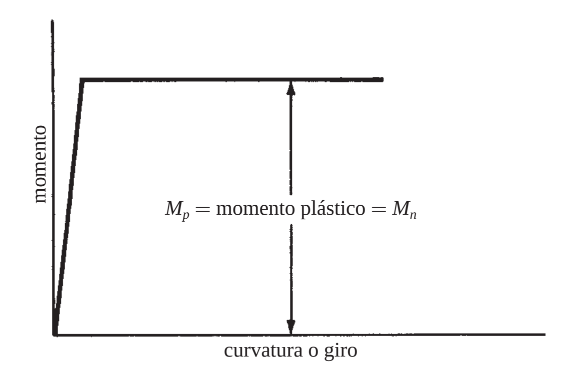


Figura 14.4 Relación momento-curvatura de un material plástico ideal.

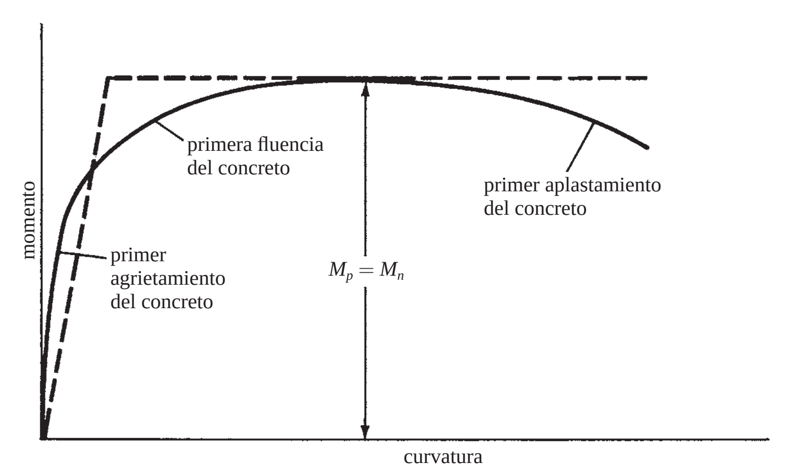


Figura 14.5 Relación típica momento-curvatura en un miembro de concreto reforzado.

resultante en una longitud corta de un miembro de acero dúctil. El momento resistente último teórico o nominal de una sección se designa en este texto con M_n (es igual que el momento plástico M_p).

Aunque la relación del momento a la curvatura del concreto reforzado es bastante diferente de la relación ideal mostrada en la figura 14.4, la curva ideal puede aproximarse razonablemente a la curva real, como se muestra en la figura 14.5. La línea punteada en la figura representa la curva ideal, mientras que la línea sólida es típica del concreto reforzado. Las pruebas han mostrado que entre más bajo sea el porcentaje de refuerzo en el concreto, ρ o $\rho - \rho'$ (donde ρ' es el porcentaje de refuerzo a compresión), más se acercará la curva real a la curva ideal. Esto es particularmente cierto cuando se usan aceros de refuerzo muy dúctiles, por ejemplo el acero del grado 40. Cuando existe un porcentaje alto de acero en un miembro de concreto reforzado, la fluencia que realmente se presenta antes de la falla es tan limitada que el comportamiento último o límite del miembro no se ve mayormente afectado por la fluencia.

El mecanismo de colapso

Para entender la redistribución de los momentos en las estructuras de acero o de concreto reforzado, primero es necesario considerar la localización y el número de articulaciones plásticas requeridas para ocasionar el colapso de una estructura. Una viga estáticamente determinada fallará si se desarrolla una articulación plástica. Para ilustrar este hecho, consideremos la viga simple de sección transversal constante con una carga concentrada a medio claro, como se muestra en la figura 14.6(*a*). Si la carga se incrementa hasta que se desarrolla una articulación plástica en el punto de momento máximo (bajo la carga en este caso), se habrá generado una estructura inestable, como se muestra en la figura 14.6(*b*). Cualquier incremento adicional de carga ocasionará el colapso de la viga.

La teoría plástica es de poca utilidad en las vigas y los marcos estáticamente determinados, pero puede ser de gran utilidad en las vigas y los marcos estáticamente indeterminados. Para que falle una estructura estáticamente indeterminada, es necesario que se forme más de una articulación plástica. Veremos que el número de articulaciones plásticas requeridas para la falla de estructuras estáticamente indeterminadas varía de estructura a estructura, pero nunca puede ser menor que dos. La viga doblemente empotrada en la figura 14.7 no puede fallar, a menos que se formen tres articulaciones plásticas.

Aunque una articulación plástica puede haberse formado en una estructura estáticamente indeterminada, la carga aún se puede incrementar sin causar la falla, siempre que la configuración geométrica de la estructura lo permita. La articulación plástica actuará como una articulación real en lo que respecta al incremento de la carga. Cuando la carga aumenta, se presenta una redistribución de los momentos ya que

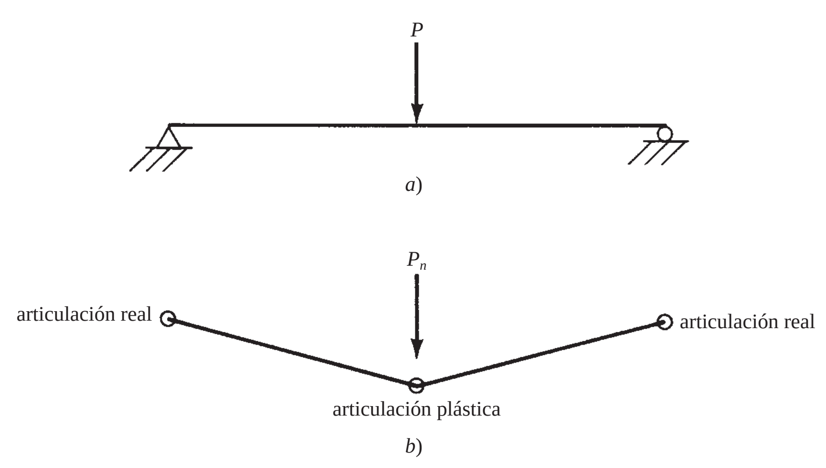


Figura 14.6

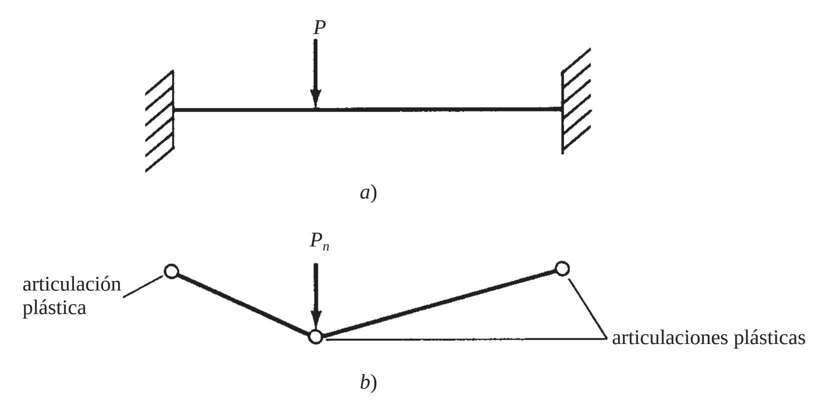


Figura 14.7

la articulación plástica no puede resistir un momento mayor. Al formarse más articulaciones plásticas en la estructura, habrá a la larga un número suficiente de ellas para ocasionar el colapso.

La viga empotrada y apoyada en la figura 14.8 es un ejemplo de una estructura que fallará después de que se formen dos articulaciones plásticas. Se requieren tres articulaciones para el colapso, pero ya existe una articulación real en el extremo derecho. En esta viga, el momento elástico más grande causado por la carga concentrada de diseño se presenta en el extremo empotrado. Al incrementarse la magnitud de la carga, se formará en ese punto una articulación plástica.

La carga puede incrementarse más aún, hasta que el momento en algún otro punto (en este caso, bajo la carga concentrada) alcance el valor del momento plástico. Una carga adicional ocasionará el colapso de la viga. La disposición de las articulaciones plásticas y tal vez la de las articulaciones reales que permitan el colapso de una estructura, se llama el *mecanismo*. Las partes (*b*) de las figuras 14.6, 14.7 y 14.8 muestran los mecanismos de varias vigas.

Análisis plástico por el método de equilibrio

Para analizar plásticamente una estructura, es necesario calcular los momentos plásticos o últimos de las secciones, considerar la redistribución de momentos después de que se desarrollan los momentos últimos

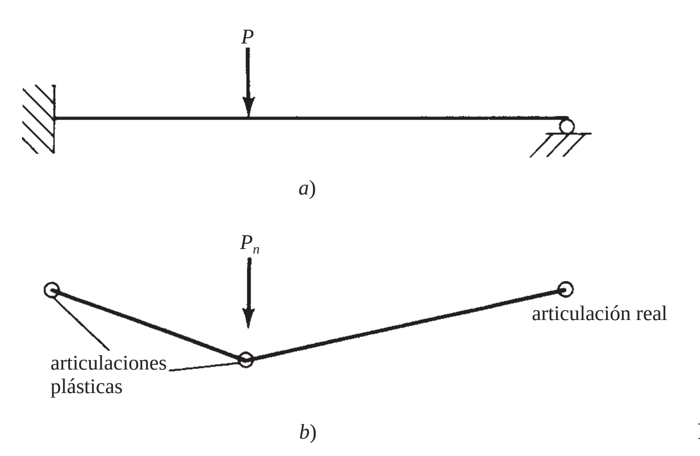


Figura 14.8

y finalmente determinar las cargas últimas que existen cuando se forma el mecanismo de colapso. En esta sección se ilustrará el método de análisis plástico conocido como *método de equilibrio*.

Como primera ilustración consideremos la viga empotrada de la figura 14.9. Se quiere determinar el valor de w_n o carga teórica última que la viga puede soportar. Los momentos máximos en una viga empotrada con carga uniforme en el intervalo elástico se presentan en los extremos empotrados, como se muestra en la figura.

Si se incrementa la magnitud de la carga uniforme, crecerán los momentos en la viga proporcionalmente, hasta que finalmente se desarrolle un momento plástico en algún punto. Debido a la simetría, los momentos plásticos se desarrollarán en los extremos de la viga, como se muestra en la figura 14.10(*b*). Si la carga se incrementa aún más, la viga será incapaz de resistir momentos mayores que M_n en sus extremos. Esos puntos girarán en grandes ángulos, lo que permitirá que la viga se deflexione más y permitirá que crezcan los momentos del claro. Aunque el momento plástico se ha alcanzado en sus extremos y se han formado ahí articulaciones plásticas, la viga no puede fallar, porque de hecho se ha convertido en una viga simplemente apoyada en sus extremos para efectos de incrementos de la carga, como se muestra en la figura 14.10(*c*).

La carga puede ahora incrementarse en esta viga "simple" y los momentos en los extremos permanecerán constantes; sin embargo, los momentos en los puntos intermedios del claro crecerán igual que en una viga simple con carga uniforme. Este incremento se muestra con líneas punteadas en la figura 14.11(*b*). La carga puede incrementarse hasta que el momento en algún otro punto (en este caso el centro del claro de la viga) alcance el momento plástico. Cuando esto suceda, se habrá desarrollado una tercera articulación plástica y se habrá formado un mecanismo que induce el colapso.

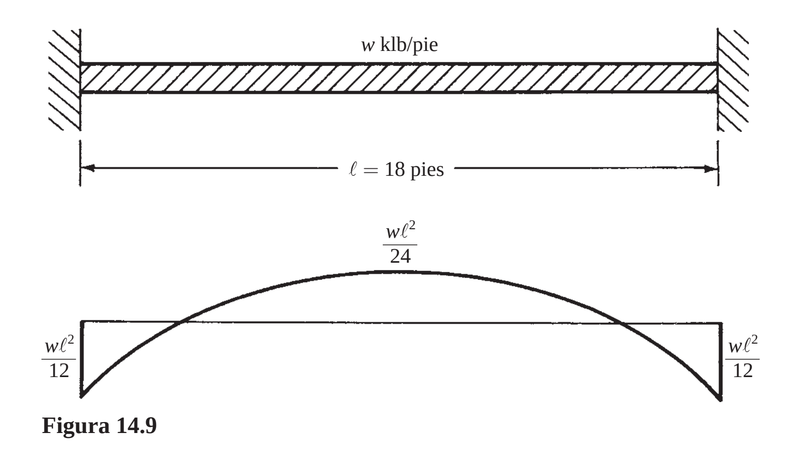


Figura 14.9

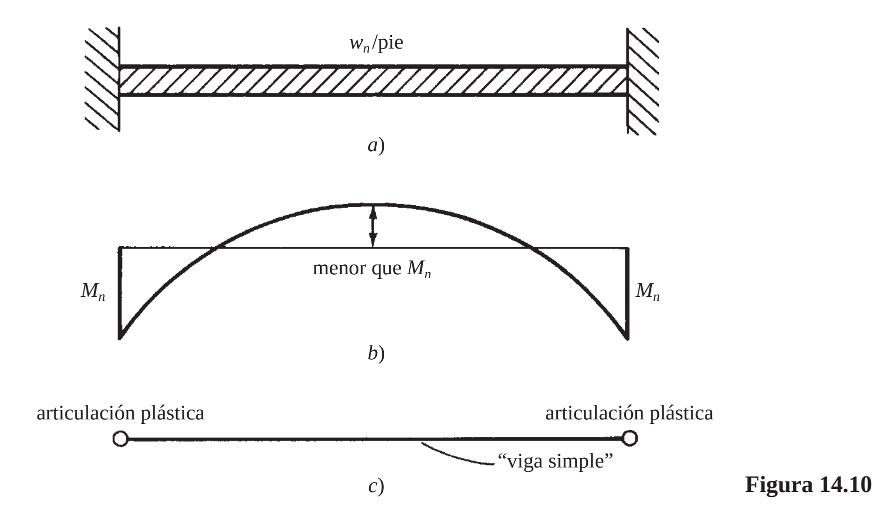


Figura 14.10

Un método para determinar el valor de w_n es tomar momentos en el centro del claro de la viga (sabiendo que el momento ahí es M_n durante el colapso). Se hace referencia aquí a la figura 14.11(*a*) para las reacciones de la viga.

$$M_n = -M_n + \left(w_n \frac{\ell}{2}\right)\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{4}\right) = -M_n + \frac{w_n \ell^2}{8}$$

$$w_n = \frac{16M_n}{\ell^2}$$

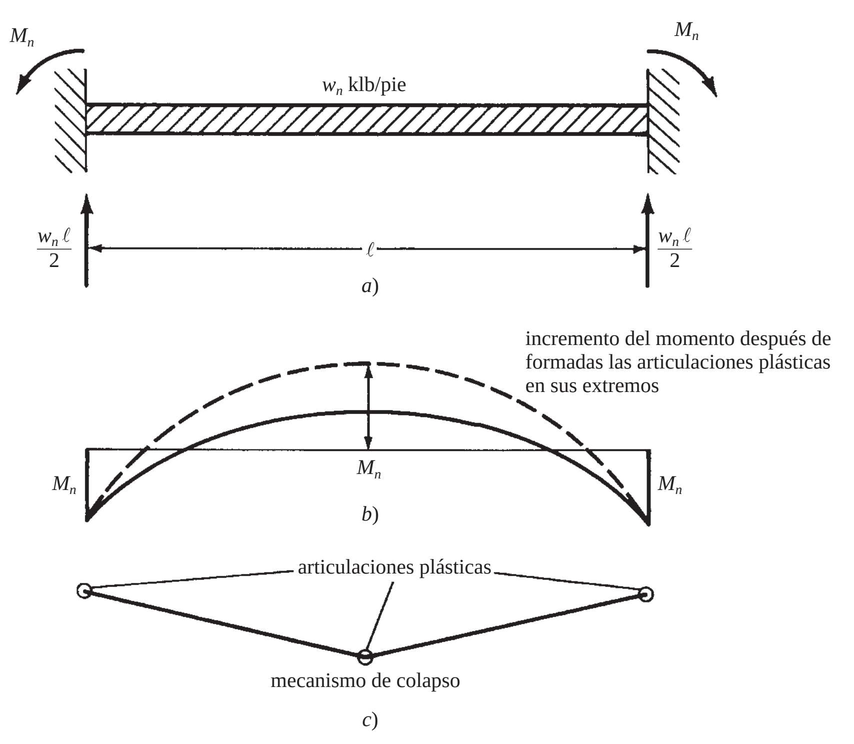


Figura 14.11

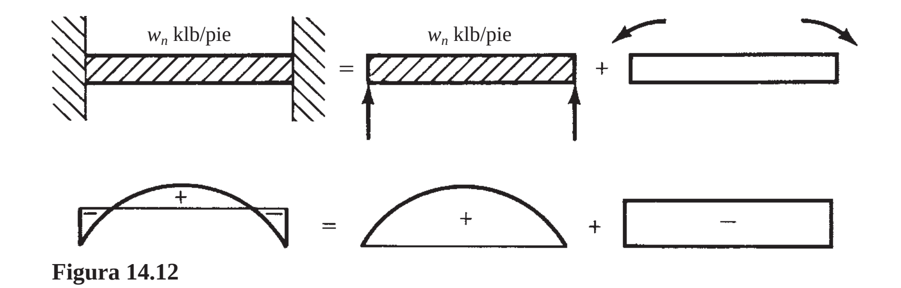


Figura 14.12

El mismo valor podría obtenerse considerando los diagramas mostrados en la figura 14.12. Recordará usted que una viga empotrada puede reemplazarse por una viga simple más una viga simple con momentos en sus extremos. Así, el diagrama de momentos finales para la viga empotrada, es igual al diagrama de momentos si la viga ha sido simplemente apoyada más el diagrama de momentos en los extremos.

Para la viga considerada, el valor de M_n se puede calcular como sigue (véase la figura 14.13):

$$2M_n = \frac{w_n \ell^2}{8}$$

$$M_n = \frac{w_n \ell^2}{16}$$

La viga empotrada y apoyada de la figura 14.14 que soporta una carga concentrada, se presenta como un segundo ejemplo de análisis plástico. Se quiere determinar el valor de P_n, es decir, la carga última teórica que la viga puede soportar antes del colapso. El momento máximo en el intervalo elástico en esta viga se presenta en el extremo empotrado, como se muestra en la figura. Si se incrementa la magnitud de la carga concentrada, los momentos en la viga crecerán proporcionalmente hasta que se alcanza el valor del momento plástico en alguna sección. Esta sección es el extremo empotrado, donde el diagrama de momentos elásticos tiene su mayor ordenada.

Después de que se haya formado esta articulación plástica, la viga actuará como si estuviese simplemente apoyada, en lo que respecta a los incrementos de carga, porque tendrá una articulación plástica en el extremo izquierdo y una articulación real en el extremo derecho. Un aumento en la magnitud de la carga P, no incrementará el momento en el extremo izquierdo pero incrementará el momento en el resto de la viga, como pasaría en una viga simplemente apoyada. El momento creciente en la viga simplemente apoyada se indica con la línea punteada en la figura 14.14(*c*). Finalmente, el momento bajo la carga concentrada alcanzará el valor M_n y se formará un mecanismo constituido por dos articulaciones plásticas y una articulación real, como se muestra en la figura 14.14(*d*).

El valor de la carga P_n concentrada máxima teórica que la viga puede soportar, puede determinarse tomando momentos a la derecha o a la izquierda de la carga. La figura 14.14(*e*) muestra las reacciones de la viga para las condiciones que existen justamente antes del colapso. Se toman momentos a la derecha de la carga como sigue:

$$M_n = \left(\frac{P_n}{2} - \frac{M_n}{20}\right)10$$

$$P_n = 0.3M_n$$



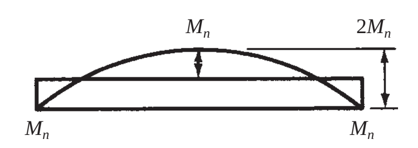


Figura 14.12

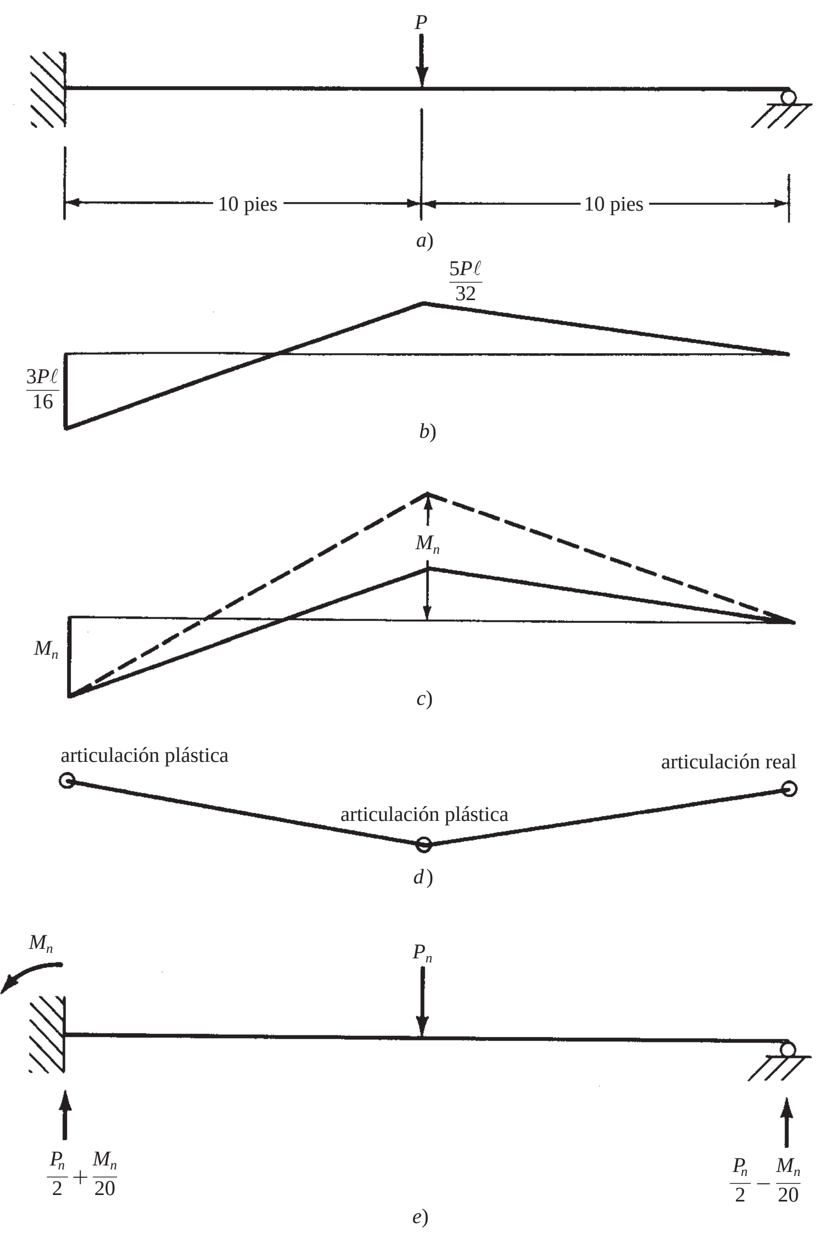


Figura 14.14

El tema del análisis plástico respecto de diferentes tipos de estructuras y cargas puede estudiarse más ampliamente en diversos libros sobre análisis estructural o de diseño en acero.[2] El método ha demostrado ser satisfactorio para estructuras dúctiles de acero mediante muchas pruebas. Sin embargo, el concreto es un material relativamente frágil y la teoría de diseño al límite no ha sido aceptada por completo por el código ACI. El código ciertamente reconoce que existe cierta redistribución de momentos y

[2]McCormac, J.C., 2008, *Structural Steel Design: LRFD Method*, 4a. ed. (Hoboken, NJ: Pearson Prentice Hall), págs. 239-251.

permite una redistribución parcial basada en una regla empírica que se presenta en la siguiente sección de este capítulo.

14.5 DISEÑO AL LÍMITE SEGÚN EL CÓDIGO ACI

Las pruebas en marcos de concreto reforzado han mostrado que bajo ciertas condiciones se presenta definitivamente una redistribución de momentos antes de que ocurra el colapso. Reconociendo este hecho, el código ACI (8.4.1) permite que los momentos factorizados calculados por la teoría elástica (*no por medio de un análisis aproximado*) sean disminuidos en las posiciones de momentos máximos negativos o positivos en cualquier claro de una estructura continua para cualquier disposición de carga. La cantidad para la cual los momentos pueden disminuir no puede exceder de 1 000ϵ_t en porcentaje con un máximo de 20%. La redistribución de los momentos como se describe aquí no es permisible a menos que ϵ_t sea igual o mayor que 0.0075 en la sección donde se reduce el momento (sección 8.4.2 del ACI). Las tablas A.7 y B.7 del apéndice de este libro proporcionan los porcentajes de acero para los cuales ϵ_t será igual a 0.0075. Si ρ es mayor que estos valores, la redistribución no se permite ya que ϵ_t será menor que 0.0075. Los valores dados en la tabla se suministran para secciones rectangulares con refuerzo en tensión.

De acuerdo con la sección 18.10.4.1 del ACI los momentos negativos o positivos pueden disminuirse para secciones presforzadas usando las mismas reglas si se usa refuerzo adherido (como se describe en el capítulo 19).

El porcentaje de redistribución de momentos del código ACI ha sido intencionalmente limitado a un valor muy conservador, con el fin de garantizar que las grietas de tamaño excesivo en el concreto no se presenten bajo altos esfuerzos del acero y para garantizar una ductilidad adecuada por la redistribución de momentos en las articulaciones plásticas. Es probable que el código ACI amplíe su actual método conservador de redistribución de momentos cuando se entienda mejor el comportamiento de las articulaciones plásticas, particularmente en lo que respecta al cortante, a las deflexiones y al desarrollo del refuerzo. Se supone aquí que las secciones están satisfactoriamente reforzadas por cortante, de manera que los momentos últimos pueden alcanzarse sin que ocurra una falla por cortante. Los ajustes se aplican a los momentos que resultan de cada una de las diferentes condiciones de carga. El miembro considerado será entonces proporcionado con base en la envolvente de momentos resultante. Las figuras 14.15 a 14.18 ilustran la aplicación de la redistribución de momentos permitida por el código, en una viga continua de tres claros. Se observará en estas figuras que se usan cargas factorizadas y análisis elásticos en todos los cálculos.

En estas figuras se consideran tres condiciones diferentes de carga viva. Para determinar el momento positivo máximo en el claro 1, la carga viva se coloca en los claros 1 y 3 (figura 14.15). Similarmente, para producir un momento máximo positivo en el claro 2, la carga viva se coloca sólo en este claro (figura 14.16). Finalmente, el momento máximo negativo en el primer apoyo interior de la izquierda se obtiene colocando la carga viva en los claros 1 y 2 (figura 14.17).

Para esta viga en particular se supone que el código permite una disminución de 10% en los momentos negativos o positivos. Esto requerirá que 1 000ϵ_t exceda a 10 en las secciones donde el momento se reduce para suministrar la ductilidad necesaria. El resultado dará momentos de diseño menores en las secciones críticas. Inicialmente, la carga para el momento positivo máximo en el claro 1 se considera como se muestra en la figura 14.15. Si los momentos positivos máximos calculados de 425 pie-klb cerca de la mitad del claro de los claros en los extremos son disminuidos cada uno en 10% a 383 pie-klb, los momentos negativos en los dos apoyos interiores serán incrementados a 406 pie-klb. Aun cuando el momento negativo ha aumentado significativamente, de 308 a 406 pie-klb, este valor más alto todavía no controlará la capacidad de momento requerida en esta posición. Entonces, el momento de diseño positivo disminuye, pero el momento negativo no se incrementa.

De la misma manera, en la figura 14.16, cuando la viga se carga para producir el momento máximo positivo en el claro 2, una disminución de 10% en el momento positivo de 261 a 235 pie-klb incrementará al momento negativo en los dos apoyos interiores de 339 a 365 pie-klb.

Finalmente, en la figura 14.17, la colocación de la carga viva causa un momento negativo máximo en el primer apoyo interior de 504 pie-klb. Si este valor se reduce en 10%, el momento máximo ahí será

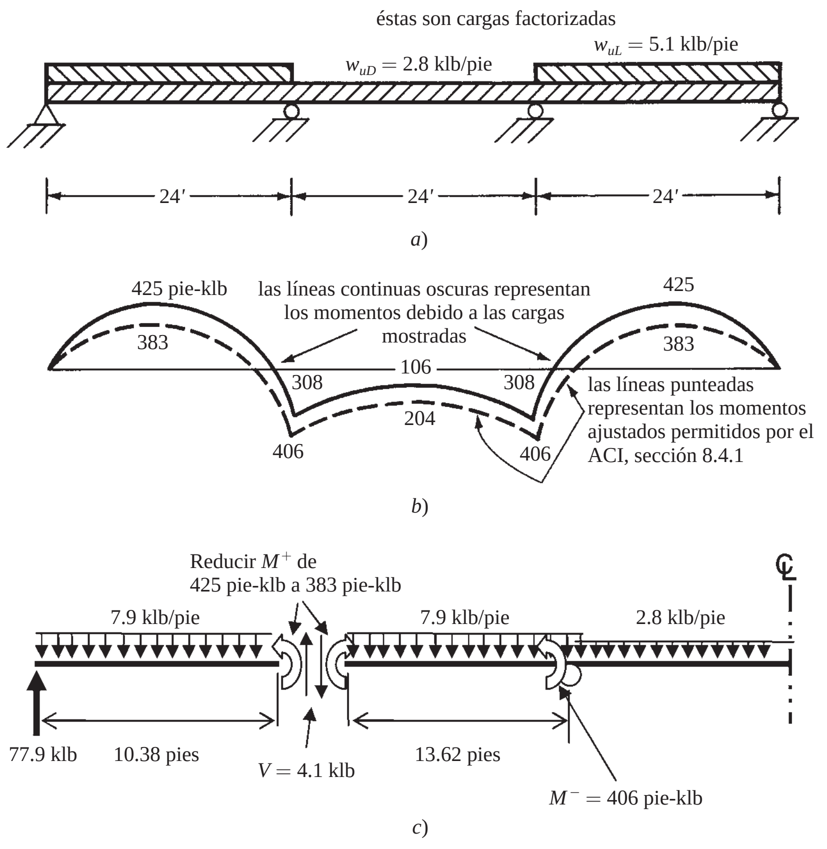


Figura 14.15 Momento positivo máximo en los claros extremos. *a*) Patrones de carga para el momento positivo máximo en ambos claros extremos. *b*) Diagrama de momentos antes y después de reducir el momento positivo en los claros extremos. *c*) Fuerzas cortantes y momentos en el claro izquierdo después de reducir M^+ 10% en los claros extremos.

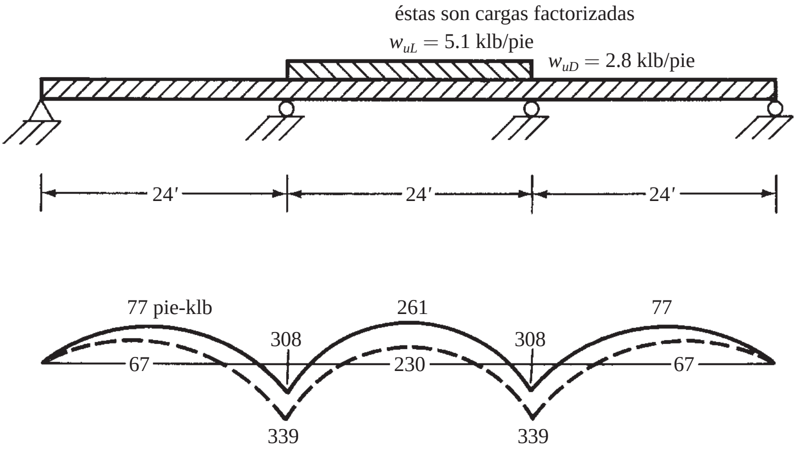


Figura 14.16 Momento positivo máximo en el claro 2.

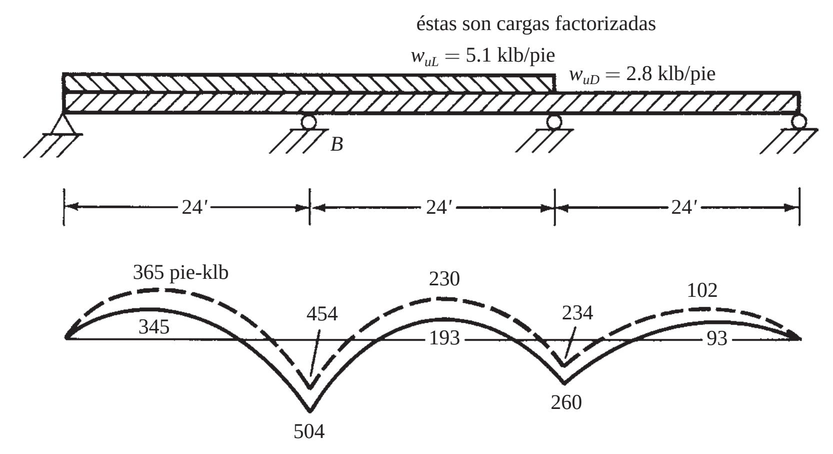


Figura 14.17 Momento negativo máximo en el apoyo *B*.

de −454 pie-klb. En esta figura los autores han reducido también 10% el momento negativo en el otro apoyo interior.

Se notará que el resultado neto de los diferentes aumentos o disminuciones en los momentos positivos o negativos es una reducción neta tanto de los valores máximos positivos como de los máximos negativos. El resultado de estas diversas redistribuciones es en realidad una envolvente de los valores extremos de los momentos en las secciones críticas. La envolvente para la viga de tres claros considerada en esta sección se muestra en la figura 14.18. Está claro cuáles partes de las vigas necesitan refuerzo positivo, cuáles refuerzo negativo y cuáles ambos.

Las reducciones en los momentos flexionantes debido a la redistribución de momentos que aquí se han descrito, no significa que los factores de seguridad para los miembros continuos sean menores que aquellos para los claros simples. Más bien, el exceso de resistencia que tienen tales miembros debido a la continuidad, se reduce de tal manera que los factores de seguridad en conjunto son más cercanos pero no menores que aquellos para los claros simples.

Diversos estudios han mostrado que el agrietamiento y la deflexión de los miembros seleccionados por el proceso de diseño al límite no son más severos que en los mismos miembros diseñados sin aprovechar las redistribuciones permisibles.[3,4]

(El apéndice B del código ACI presenta algunas variaciones que pueden usarse en el diseño para cargas axiales y de flexión. Hay cambios en los porcentajes de redistribución de momentos permitidos para los miembros continuos, en los límites de refuerzo y en la reducción de resistencia o en los factores ϕ. Estos últimos cambios dependen de las condiciones de las deformaciones unitarias, incluyendo si las secciones están controladas por la compresión o por la tensión).

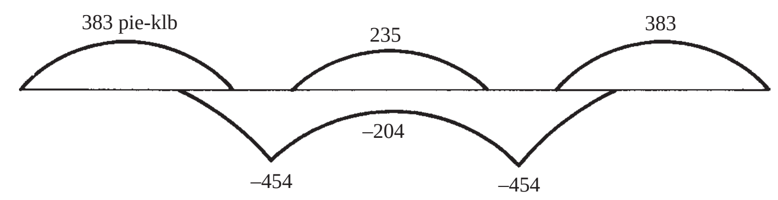


Figura 14.18 Envolvente de momentos.

[3] Cohn, M.Z., 1964, “Rotational Compatibility in the Limit Design of Reinforced Concrete Continuous Beams”, *Proceedings of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete*, ASCE-ACI (Miami), págs. 359-382.
[4] Mattock, A.H., 1959, “Redistribution of Design Bending Moments in Reinforced Concrete Continuous Beams”, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 113, págs. 35-46.

14.6 DISEÑO PRELIMINAR DE MIEMBROS

Antes de poder efectuar un análisis “exacto” de un marco de edificación, es necesario estimar los tamaños de sus miembros. Aun si se efectúa el diseño con computadora, es económicamente aconsejable hacer algunas estimaciones preliminares respecto a los tamaños. Si se ha hecho un análisis aproximado de la estructura, será posible efectuar estimaciones razonables sobre el tamaño de los miembros. El resultado será un ahorro considerable en el tiempo de uso de la computadora y en dinero.

Un proyectista experimentado usualmente puede hacer estimaciones preliminares muy satisfactorias de los tamaños con base en su experiencia. Sin embargo, aunque no tenga tanta experiencia, un proyectista puede aun hacer estimaciones bastante razonables con base en su conocimiento del análisis estructural. Por ejemplo, para estimar el tamaño de una columna puede despreciar el momento y suponer un esfuerzo axial promedio o P_u/A_g de entre $0.4f_c'$ a $0.6f_c'$. Este valor aproximado puede ser dividido por la carga estimada de la columna para obtener su área estimada. Si los momentos son grandes, pueden usarse valores menores del esfuerzo medio ($0.4f_c'$ a $0.5f_c'$); si los momentos son pequeños, pueden usarse valores mayores ($0.55f_c'$ a $0.6f_c'$).

Los tamaños preliminares de las vigas se pueden obtener considerando sus momentos aproximados. Una viga simplemente apoyada con carga uniforme tendrá un momento flexionante máximo de $w_u\ell^2/8$, mientras que una viga doblemente empotrada con carga uniforme tendrá un momento máximo de $w_u\ell^2/12$. Para una viga continua con carga uniforme, el proyectista podría estimar un momento máximo con valor intermedio, digamos $w_u\ell^2/10$, usando este valor para estimar el tamaño de la viga.

En muchas estructuras es necesario efectuar por lo menos dos análisis diferentes. Un análisis se hace para considerar el efecto de las cargas de gravedad, como se describe en la sección 14.7 de este capítulo; otro se hace para considerar el efecto de las cargas laterales, como se verá en la sección 14.8. Para cargas de gravedad solamente, $U = 1.2D + 1.6L$.

Como las cargas de gravedad sólo afectan al piso en que se aplican, cada piso puede analizarse en forma independiente de los otros. Éste no es el caso de las cargas laterales, porque al aplicarse en cualquier parte de la estructura, éstas afectan los desplazamientos laterales en todo el marco y por consiguiente afectan a las fuerzas en las partes de la estructura situadas debajo de ellas. Para esta situación deben aplicarse las ecuaciones de factor de carga que incluyen a las fuerzas laterales (ecuaciones 9-3, 9-4, etc., del ACI).

Algunas veces debe efectuarse un tercer análisis, uno que analiza la posibilidad de la inversión de las fuerzas en el lado de barlovento o incluso el volteo de la estructura. Si se considera el volteo, las cargas muertas y vivas de gravedad deben reducirse a sus tamaños mínimos posibles (es decir, carga viva nula y $0.9D$, en el caso de que las cargas muertas se hayan sobreestimado un poco) mientras actúan las cargas laterales. Para este caso deben considerarse las ecuaciones 9-6 y 9-7 de factor de carga del ACI.

14.7 ANÁLISIS APROXIMADO DE MARCOS CONTINUOS POR CARGAS VERTICALES

Las estructuras estáticamente indeterminadas se pueden analizar “exactamente” o “aproximadamente”. Algunos métodos aproximados que implican el uso de hipótesis simplificadoras se presentan en esta sección. A pesar del creciente uso de las computadoras para efectuar análisis “exactos”, se siguen usando métodos aproximados, tanto o más que antes, por varias razones. Entre éstas se cuentan:

1. La estructura puede ser tan complicada que no se encuentra nadie que tenga el conocimiento para hacer un análisis “exacto” o no se dispone del software adecuado.
2. En algunas estructuras, cualquier método puede estar sujeto a tantos errores e imperfecciones, que los métodos aproximados pueden dar valores tan precisos como los obtenidos con un análisis “exacto”. Un ejemplo específico es el análisis del marco de un edificio para cargas de viento, donde las paredes, las subdivisiones y los pisos contribuyen con una cantidad indeterminada a la resistencia al viento. Las fuerzas del viento calculadas en el marco mediante cualquier método no son exactas.

3. Para diseñar los miembros de una estructura estáticamente indeterminada en ocasiones es necesario hacer una estimación de sus tamaños antes de poder comenzar a efectuar un análisis estructural mediante un método exacto. El análisis aproximado de la estructura dará las fuerzas mediante la cuales se pueden hacer buenas estimaciones iniciales sobre el tamaño de los miembros.
4. Los análisis aproximados son muy útiles en la revisión rápida de soluciones exactas.

Del análisis de las líneas de influencia en la sección 14.3 puede verse que a menos que se use una computadora (una alternativa muy práctica hoy en día), un análisis exacto que implique la colocación de las cargas vivas en diferentes posiciones será una tarea muy larga y tediosa. Por esta razón, cuando no se dispone de una computadora, es común usar métodos aproximados de análisis, tal como el de coeficientes de momentos y cortantes del ACI, el del marco rígido equivalente, el de la localización supuesta de los puntos de inflexión y otros que se analizan en las siguientes páginas.

Coeficientes ACI para vigas y losas continuas

Un método muy común que se usa para el diseño de estructuras de concreto reforzado continuas implica el uso de los coeficientes ACI dados en la sección 8.3.3 del código. Estos coeficientes, reproducidos en la tabla 14.1, proporcionan los momentos y cortantes máximos estimados para edificios de proporciones normales. Los valores calculados de esta manera son usualmente algo mayores que los que se obtienen con un análisis "exacto". Como resultado, pueden obtenerse ahorros considerables haciendo tal análisis. En este respecto debe mencionarse que estos coeficientes tienen su mayor utilidad en los marcos continuos con más de tres o cuatro claros continuos.

Al desarrollar los coeficientes, los valores del momento negativo se redujeron para tomar en cuenta los anchos usuales de los apoyos y también alguna redistribución de los momentos, como se describió en la sección 14.5. Además, los valores del momento positivo se incrementaron algo para tomar en cuenta la redistribución de los momentos. También se notará que los coeficientes toman en cuenta el hecho de que

Tabla 14.1 Coeficientes ACI

Momento positivo	
Claros extremos	
Si el extremo discontinuo no está restringido	$\frac{1}{11} w_u \ell_n^2$
Si el extremo discontinuo es monolítico con el apoyo	$\frac{1}{14} w_u \ell_n^2$
Claros interiores	$\frac{1}{16} w_u \ell_n^2$
Momento negativo en la cara exterior del primer apoyo interior	
Dos claros	$\frac{1}{9} w_u \ell_n^2$
Más de dos claros	$\frac{1}{10} w_u \ell_n^2$
Momento negativo en otras caras de los apoyos interiores	$\frac{1}{11} w_u \ell_n^2$
Momento negativo en la cara de todos los apoyos para *a*) losas con claros que no exceden de 10 pies y *b*) vigas y trabes en las que la relación de la suma de las rigideces de columnas a la suma de las rigideces de vigas, excede de ocho en cada extremo del claro	$\frac{1}{12} w_u \ell_n^2$
Momento negativo en las caras interiores de apoyos exteriores, para miembros colados monolíticamente con sus apoyos	
Cuando el apoyo es una viga de fachada o trabe	$\frac{1}{24} w_u \ell_n^2$
Cuando el apoyo es una columna	$\frac{1}{16} w_u \ell_n^2$
Fuerza cortante en los miembros extremos en la cara del primer apoyo interior	$1.15(w_n \ell_n/2)$
Fuerza cortante en la cara de todos los otros apoyos	$w_n \ell_n/2$



Plaza One Shell, Houston, Texas, que tiene 52 niveles y una altura de 714 pies. (Cortesía de Master Builders.)

los apoyos no son simples en la construcción monolítica y de que se presentan momentos en los apoyos extremos, como en el caso de que esos apoyos sean vigas o columnas.

Al aplicar los coeficientes, w_u es la carga de diseño, mientras que ℓ_n *es el claro libre para el cálculo de momentos positivos y es el promedio de los claros libres adyacentes para el cálculo de los momentos*

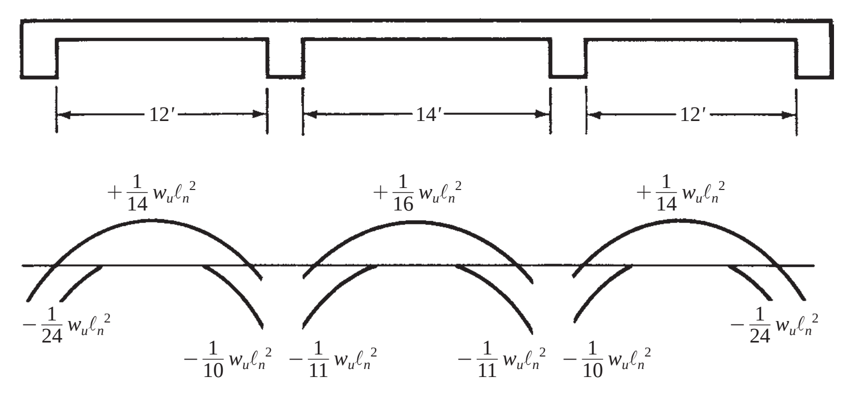


Figura 14.19 Envolventes del momento de una losa continua construida monolíticamente con vigas.

negativos. Estos valores se pueden aplicar solamente a miembros con claros aproximadamente iguales (el mayor de los dos claros adyacentes no debe exceder el menor en más de 20%) y para los casos en que la razón de la carga viva uniforme de servicio a la carga muerta uniforme de servicio no sea mayor de tres. Además, los valores no son aplicables a miembros de concreto presforzado. Si no se cumplen estas limitantes, debe usarse un método analítico más preciso.

Para el diseño de una viga o losa continua, los coeficientes de momento proporcionan de hecho dos conjuntos de diagramas de momentos para cada claro de la estructura. Un diagrama resulta de colocar las cargas vivas de manera que éstas causen el máximo momento positivo en el claro, mientras que el otro resulta de colocar las cargas vivas de manera que causen momentos máximos negativos en los apoyos. Sin embargo, en realidad no es posible generar momentos máximos negativos en ambos extremos de un claro simultáneamente. Se requiere colocar en cierta posición las cargas vivas para producir un momento máximo negativo en un extremo del claro y colocarlas en otra posición para generar el momento negativo máximo en el otro extremo. Sin embargo, la hipótesis de que ambos máximos ocurren simultáneamente es conservadora, es decir, del lado de la seguridad, porque el diagrama resultante tendrá un mayor número de valores críticos que si se consideran las condiciones de carga por separado.

Los coeficientes ACI dan los puntos máximos de una envolvente de momentos para cada claro de una estructura continua. En la figura 14.19 se muestran envolventes típicas para una losa continua, la cual se supone que ha sido colada monolíticamente con sus apoyos exteriores, que son trabes de fachada.

El ejemplo 14.1 presenta el diseño de la losa de la figura 14.20, usando los coeficientes de momentos del código ACI. Los cálculos para este problema pueden ordenarse convenientemente en forma de tabla, como la mostrada en la figura 14.21. Para esta losa particular, los autores usaron un arreglo del refuerzo que incluye varillas dobladas. Sin embargo, es bastante común en losas, especialmente en aquellas de 5 plg o menores de espesor, usar sólo varillas rectas en las partes superior e inferior de la losa.

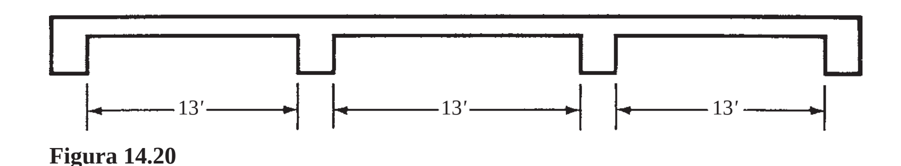
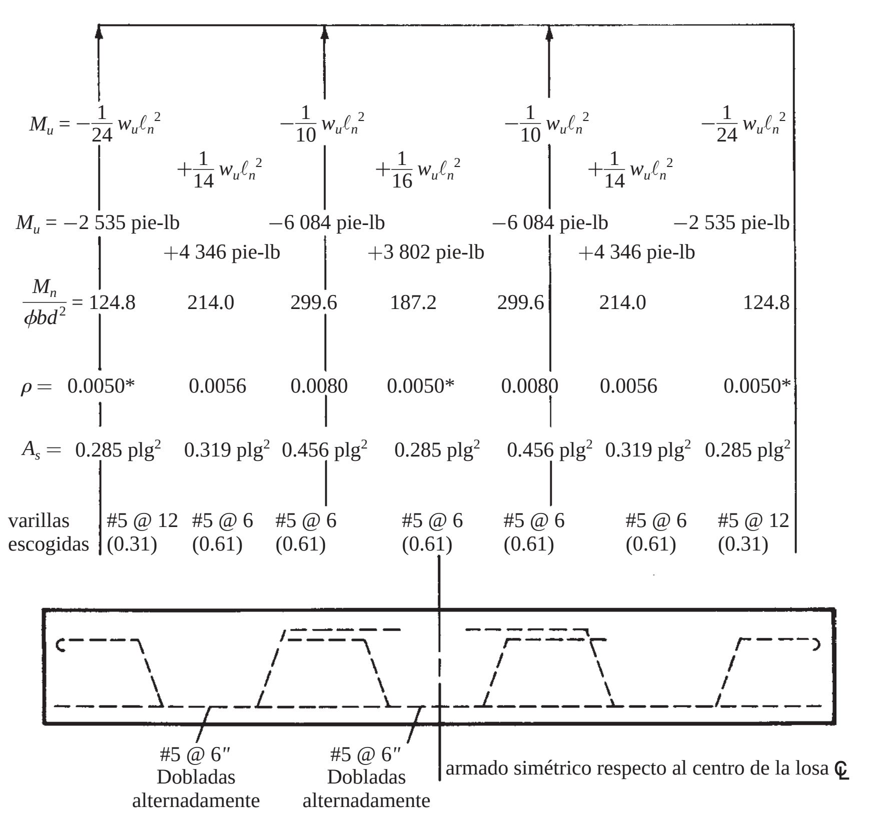


Figura 14.20



*Los valores mínimos de ρ especificados en la sección 10.5.1 del código ACI para el acero de tensión, son aplicables para ambas zonas de momentos positivos y negativos (comentario R10.5 del ACI).

Figura 14.21

EJEMPLO 14.1

Diseñar la losa continua de la figura 14.20 para momentos calculados con los coeficientes ACI. La losa debe soportar una carga viva de servicio de 165 lb/pie² y una carga muerta superpuesta de 5 lb/pie², además de su peso muerto propio. $f'_c = 3\ 000$ lb/plg² y $f_y = 40\ 000$ lb/plg². La losa se ha de construir monolíticamente con sus apoyos de vigas de fachada y los apoyos de éstas tienen 12 plg de ancho.

SOLUCIÓN **Mínima *t* por deflexión según el código ACI (9.5.2.3). Observe que esta tabla usa ℓ, no ℓ_n como el claro.**

$$\text{Multiplicador de la deflexión para acero de 40 000 lb/plg}^2 = 0.4 + \frac{40\ 000}{100\ 000} = 0.80$$

$$t \text{ mínima para claro extremo} = 0.8\frac{\ell}{24} = \frac{(0.8)(12)(13+1)}{24} = 5.6''$$

$$t \text{ mínima para claro interior} = 0.8\frac{\ell}{28} = \frac{(0.8)(12)(13+1)}{28} = 4.80''$$

Cargas y momento máximo suponiendo una losa de 6 plg ($d = 4\frac{3}{4}$ plg)

$$w_D = \text{peso de la losa} = \left(\frac{6}{12}\right)(150) = 75 \text{ lb/pie}^2$$
$$w_L = 165 \text{ lb/pie}^2$$
$$w_u = (1.2)(75 + 5) + (1.6)(165) = 360 \text{ lb/pie}^2$$
$$\text{Máx } M_u = \left(\frac{1}{10}\right)w_u\ell_n^2 = \left(\frac{1}{10}\right)(360)(13)^2 = 6\ 084 \text{ pie-lb}$$

Calcule los momentos, los valores de ρ, las A_s requeridas y seleccione las varillas en cada sección, como se muestra en la figura 14.21.

En las losas de piso no nos ocupamos del diseño del refuerzo del alma. Sin embargo, en las vigas continuas dicho refuerzo debe diseñarse con mucho cuidado. Tales diseños se basan en la fuerza cortante máxima que se presenta en varias secciones a lo largo del claro.

Se recordará que para determinar la fuerza cortante máxima que se presenta en la sección 1-1 de la viga en la figura 14.22, la carga muerta uniforme debe extenderse a lo largo de todo el claro, mientras que la carga viva uniforme debe colocarse entre la sección considerada y el apoyo más distante.

Si la carga viva se coloca en forma tal que cause fuerzas cortantes máximas en varios puntos a lo largo del claro y si esa fuerza se calcula para cada punto, puede trazarse entonces una curva de fuerza cortante máxima. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, no es necesario usar ese procedimiento tan demorado en edificios de proporciones normales, porque los valores que se obtienen no varían en forma significativa de los valores dados por el código ACI que se muestran en la figura 14.23.

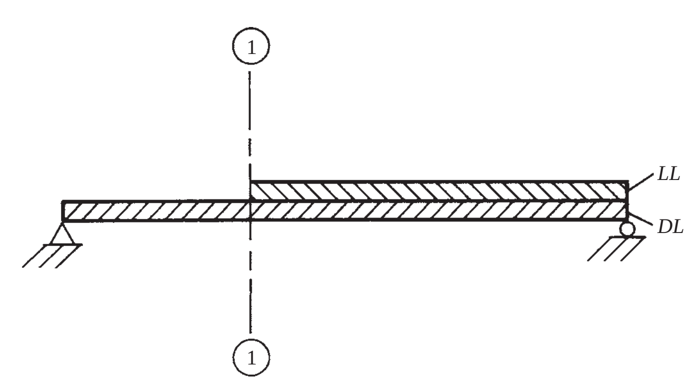


Figura 14.22

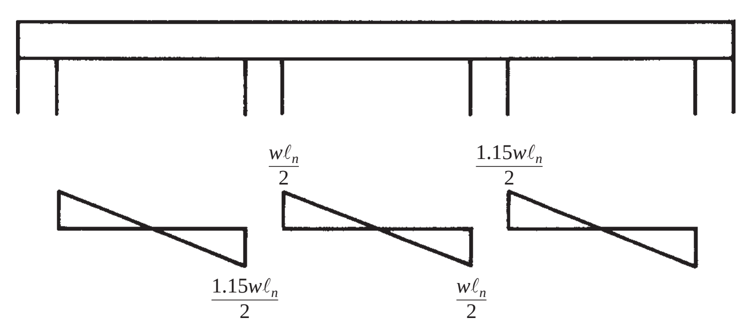


Figura 14.23

Método del marco rígido equivalente

Cuando las vigas continuas se conectan y son soportadas por trabes, se hace la hipótesis de que las trabes sólo les proporcionan soporte vertical. Entonces se analizan meramente como vigas continuas, como se muestra en la figura 14.24. Las trabes proporcionan algo de rigidez por torsión y si los momentos torsionantes calculados exceden de $\phi\lambda\sqrt{f'_c}(A_{cp}^2/\rho_{cp})$ como se especifica en la sección 11.6.1 del ACI, ellos deben considerarse, como se describirá en el capítulo 15.

Si las vigas continuas se ensamblan en las columnas, las rigideces por flexión de las columnas junto con las rigideces por torsión de las trabes son de tal magnitud que deben ser consideradas. Un método aproximado empleado con frecuencia para el análisis de tales miembros de concreto reforzado es el *método del marco rígido equivalente*. En este método, que es aplicable sólo a cargas de gravedad, se supone que las cargas están aplicadas sólo en los pisos o techos bajo consideración y se supone también que los extremos alejados de las columnas están empotrados, como se muestra en la figura 14.25. Se estiman los tamaños de los miembros y frecuentemente se hace un análisis por distribución de momentos.

Para este tipo de análisis es necesario estimar los tamaños de los miembros y calcular sus rigideces relativas o valores I/ℓ. Con estos valores se pueden calcular los factores de distribución y aplicarse el método de distribución de momentos. Los momentos de inercia de las columnas y vigas se calculan normalmente con base en las secciones totales del concreto sin tomar en cuenta el refuerzo.

Se presenta un problema al determinar el momento de inercia por usarse en las vigas T continuas. El momento de inercia de una viga T es mucho mayor cuando se tiene un momento positivo con los patines en compresión, que cuando se tiene un momento negativo con los patines agrietados por la tensión. Como el momento de inercia varía a lo largo del claro, es necesario usar un valor equivalente. Un procedimiento usado a menudo es suponer que el momento de inercia equivalente es igual a dos veces el momento de inercia del alma, suponiendo que el peralte del alma es igual al peralte total efectivo de la viga.[5] Algunos proyectistas usan otros valores equivalentes, tales como suponer una sección T

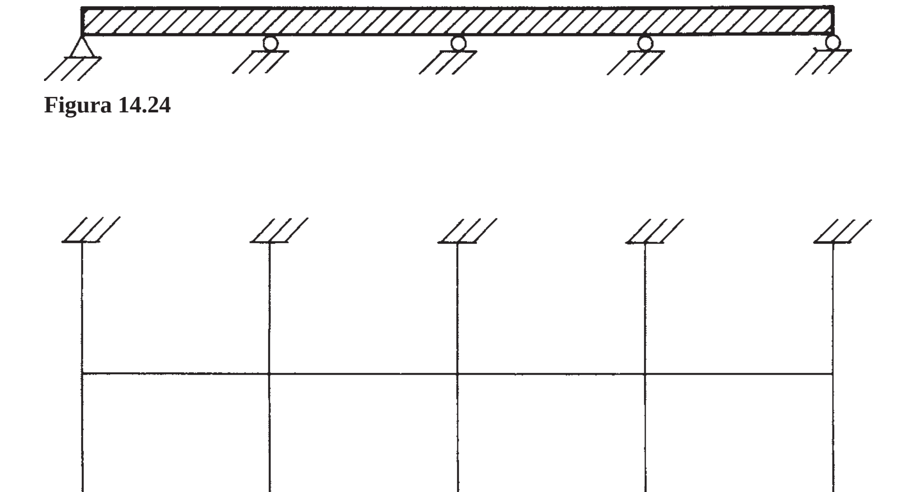


Figura 14.24

Figura 14.25

[5]Portland Cement Association, 1959, *Continuity in Concrete Building Frames*, 4a. ed. (Chicago), págs. 17-20.

equivalente con patines de un ancho igual a cierto número de veces (digamos 2 a 6) el ancho del alma. Estas secciones equivalentes pueden variar ampliamente sin afectar apreciablemente los momentos finales.

El código ACI (8.9.2) establece que para un análisis aproximado, sólo necesitan considerarse dos combinaciones de carga viva. Éstas son: 1) carga viva colocada en dos claros adyacentes y 2) carga viva colocada en los claros alternos. El ejemplo 14.2 ilustra la aplicación del método del marco rígido equivalente a una viga continua T.

Los resultados de computadoras parecen indicar que el modelo mostrado en la figura 14.25 (permitido por el código ACI) no es muy confiable para carga asimétrica. Los acortamientos diferenciales de las columnas pueden redistribuir completamente los momentos obtenidos con este modelo (es decir, los momentos positivos pueden volverse momentos negativos). En consecuencia, los proyectistas deben tomar en cuenta las deformaciones axiales posibles en sus diseños.

EJEMPLO 14.2

Usando el método del marco rígido equivalente, dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga T continua de la figura 14.26. Se supone que la viga está conectada a columnas de 16 plg × 16 plg y que va a soportar una carga muerta de servicio de 2.33 klb/pie (incluido el peso de la viga) y una carga viva de servicio de 3.19 klb/pie. Suponga que la carga viva se aplica sólo en el claro central. Se supone que las trabes tienen un peralte de 24 plg y un ancho de alma de 12 plg. Suponga que la I de la viga T es igual a dos veces la I de su alma.

SOLUCIÓN **Cálculo de los momentos de empotramiento**

$$w_u \text{ en los claros primero y tercero} = (1.2)(2.33) = 2.8 \text{ klb/pie}$$

$$M_u = \frac{(2.8)(24)^2}{12} = 134.4 \text{ pie-klb}$$

$$w_u \text{ en el claro central} = (1.2)(2.33) + (1.6)(3.19) = 7.9 \text{ klb/pie}$$

$$M_u = \frac{(7.9)(24)^2}{12} = 379.2 \text{ pie-klb}$$

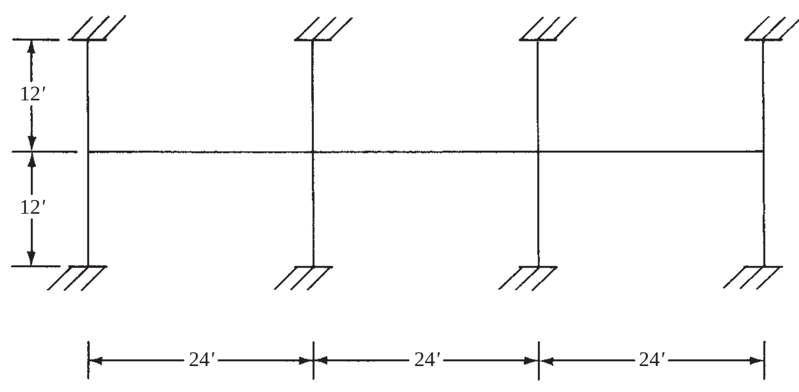


Figura 14.26

Cálculo de los factores de rigidez

$$I \text{ de columnas} = \left(\frac{1}{12}\right)(16)(16)^3 = 5\,461 \text{ plg}^4$$

$$k \text{ de columnas} = \frac{I}{\ell} = \frac{5\,461}{12} = 455$$

$$I \text{ equivalente de la viga T} = (2)\left(\frac{1}{12}b_w h^3\right) = (2)\left(\frac{1}{12}\right)(12)(24)^3 = 27\,648 \text{ plg}^4$$

$$k \text{ de la viga T} = \frac{27\,648}{24} = 1\,152$$

Registre los factores de rigidez sobre el marco y calcule los factores de distribución, como se muestra en la figura 14.27.

Balancee los momentos de empotramiento y dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 14.28.

Puntos de inflexión supuestos

Otro método aproximado para analizar las estructuras estáticamente indeterminadas es suponer la localización de los puntos de inflexión en los miembros. Tal hipótesis tiene el efecto de crear vigas simples entre los puntos de inflexión en cada claro y los momentos positivos en cada claro pueden determinarse por estática. Los momentos negativos se presentan en las trabes entre sus extremos y los puntos de inflexión. Pueden calcularse considerando que la porción de cada viga hasta el punto de inflexión (P. I.) es un voladizo. La fuerza cortante en el extremo de cada trabe contribuye a las fuerzas axiales en las columnas. Similarmente, los momentos negativos en los extremos de las trabes se transfieren también a las columnas.

En la figura 14.29, la viga *AB* del marco de construcción mostrado se analiza suponiendo puntos de inflexión en los quintos del claro y suponiendo apoyos empotrados en los extremos de la viga.

14.8 ANÁLISIS APROXIMADO DE MARCOS CONTINUOS POR CARGAS LATERALES

Los marcos de edificios están sometidos tanto a cargas laterales como a cargas verticales. La atención que debe prestarse a estas fuerzas crece conforme los edificios son más altos. Los edificios no sólo deben tener suficiente resistencia lateral para impedir fallas en ellos, sino que también deben tener resistencia suficiente contra las deflexiones para prevenir daños a sus diversas partes. Los edificios de marcos rígidos son estáticamente indeterminados en alto grado y su análisis mediante métodos "exactos" (a menos

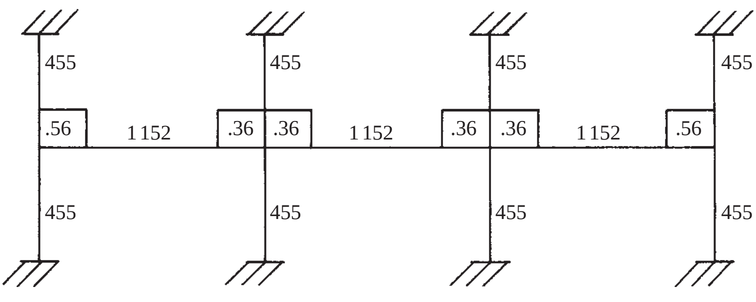


Figura 14.27

Figura 14.28

que se usen computadoras) es tan demorado que esto hace que los métodos aproximados sean muy populares.

El método aproximado presentado aquí se llama *método del portal o del pórtico*. Debido a su simplicidad, probablemente ha sido usado más que cualquier otro método aproximado para determinar las fuerza de viento en los marcos de edificios. Este método, que fue presentado por Albert Smith en el *Journal of the Western Society of Engineers* en abril de 1915, es satisfactorio para edificios de hasta 25 pisos de altura. Otro método muy similar al del portal es el método del voladizo. Se estima que da resultados ligeramente mejores para edificios altos y estrechos, pero que sólo puede usarse para edificios no mayores de 25 a 35 pisos.[6]

El método del portal es meramente una variante del método para el análisis de vigas descrito en la sección 14.7, en el que se suponen las posiciones de los puntos de inflexión. En el método del portal se supone que las cargas están aplicadas únicamente en los nudos. Si esta condición de carga es correcta,

[6] "Wind Bracing in Steel Buildings", 1940, *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 105, págs. 1 723-1 727.

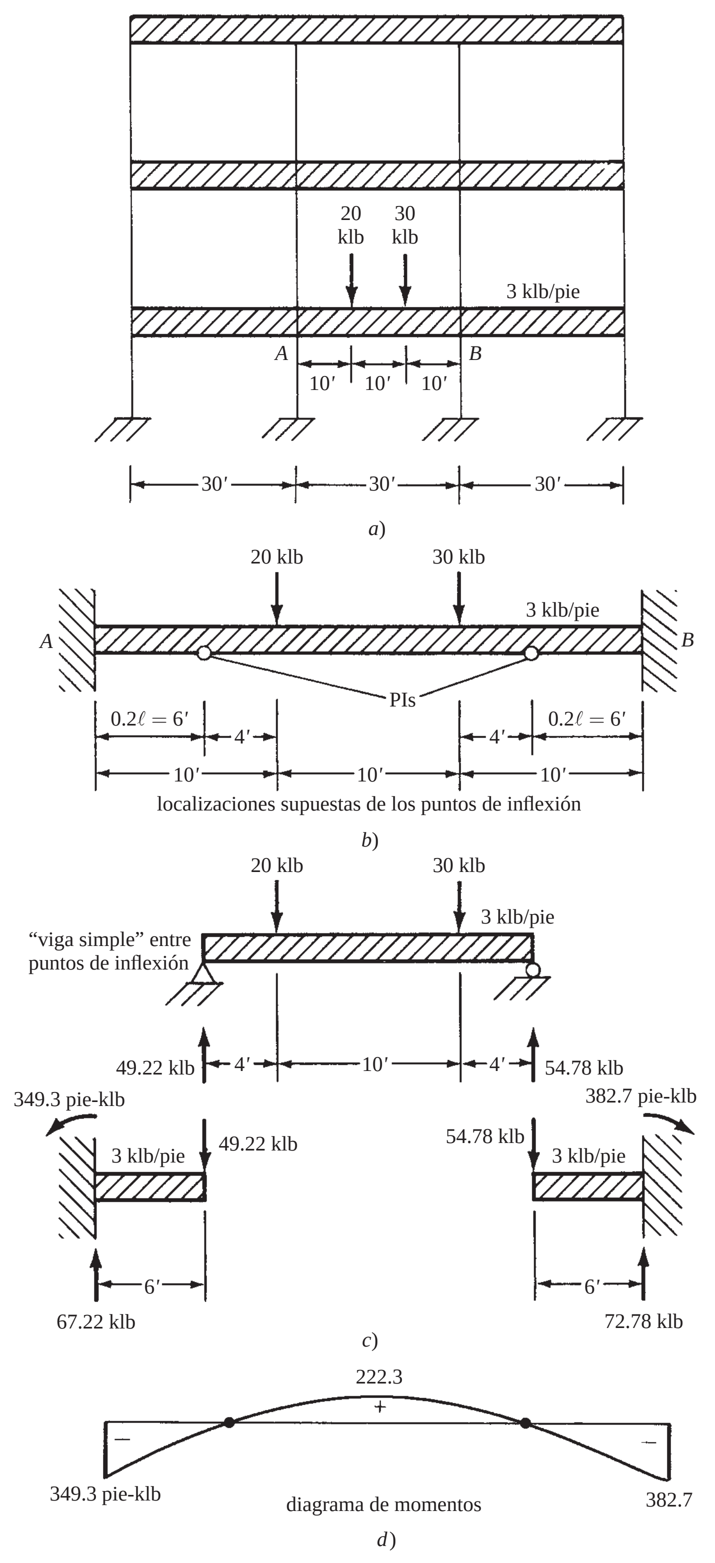

20 klb
30 klb
3 klb/pie
A
B
10′
10′
10′
30′
30′
30′
a)
20 klb
30 klb
3 klb/pie
A
B
PIs
0.2ℓ = 6′
4′
4′
0.2ℓ = 6′
10′
10′
10′
localizaciones supuestas de los puntos de inflexión
b)
20 klb
30 klb
3 klb/pie
“viga simple” entre puntos de inflexión
49.22 klb
4′
10′
4′
54.78 klb
349.3 pie-klb
382.7 pie-klb
3 klb/pie
49.22 klb
54.78 klb
3 klb/pie
6′
6′
67.22 klb
72.78 klb
c)
222.3
+
−
−
349.3 pie-klb
diagrama de momentos
382.7
d)

Figura 14.29



La Torre Apoquindo de 16 niveles, en Santiago, Chile. (Cortesía de Economy Forms Corporation.)

los momentos varían linealmente en los miembros y los puntos de inflexión quedan localizados bastante cerca del centro de los claros de los miembros.

Ninguna consideración se da en el método del portal a las propiedades elásticas de los miembros. Esta omisión puede ser muy grave en marcos asimétricos y en edificios muy altos. Para ilustrar lo grave de este asunto, pueden considerarse los cambios en los tamaños de los miembros de un edificio muy alto. En un edificio así probablemente no habrá cambios muy grandes en el tamaño de las vigas de los pisos superiores, respecto a las de los pisos inferiores. Para las mismas cargas y claros, los tamaños modificados se deben fundamentalmente a los mayores momentos por viento que ocurren en los pisos inferiores. Sin embargo, el cambio en el tamaño de las columnas de los pisos superiores respecto a las de los pisos inferiores será enorme. El resultado es que los tamaños relativos de las columnas y vigas en los pisos superiores son enteramente diferentes de los tamaños relativos correspondientes en los pisos inferiores. Cuando este hecho no se considera, se tendrán grandes errores en el análisis.

En el método del portal, se supone que las cargas de viento totales son resistidas por los marcos sin ayuda de la rigidez de los pisos, los muros y las subdivisiones. Se supone que los cambios en las longitudes de las trabes y columnas son despreciables. Sin embargo, no pueden pasarse por alto en edificios esbeltos y altos, cuya altura sea de cinco o más veces la dimensión horizontal menor.

Si la altura de un edificio es aproximadamente cinco o más veces su menor dimensión lateral, se considera generalmente que debe usarse un método más preciso de análisis. Existen varios métodos aproximados que usan las propiedades elásticas de las estructuras y que dan valores muy cercanos a los de los métodos "exactos". Entre éstos se cuentan el método del factor,[7] el método de los porcentajes *K* de Witmer y el método de Spurr.[8]

El marco de edificio mostrado en la figura 14.30 se analizará con el método del portal, tal como se describe en los siguientes párrafos.

[7]Norris, C.H., Wilbur, J.B. y Utku, S., 1976, *Elementary Structural Analysis*, 3a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill), págs. 207-212.
[8]"Wind Bracing in Steel Buildings", págs. 1 723-1 727.

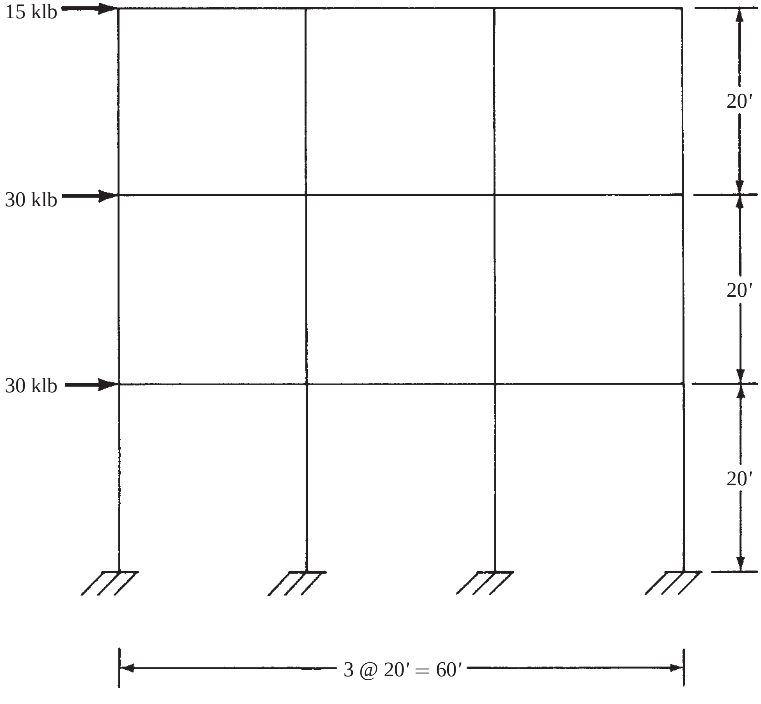


Figura 14.30

Por lo menos deben hacerse tres hipótesis para cada portal individual o para cada trabe. En el método del portal, el marco se divide teóricamente en portales independientes (figura 14.31) y se hacen las tres hipótesis siguientes:

1. Las columnas se flexionan de tal manera que existe un punto de inflexión a la mitad de su altura.
2. Las trabes se flexionan de tal manera que existe un punto de inflexión en los centros de sus claros.
3. Las fuerzas cortantes horizontales en cada nivel se distribuyen arbitrariamente entre las columnas. Una distribución comúnmente usada (que es la ilustrada aquí) consiste en suponer que la fuerza cortante se reparte entre las columnas con la proporción de una parte para las columnas exteriores y dos partes para las columnas interiores.

La razón de la proporción dada en la hipótesis 3 puede verse en la figura 14.31. Cada una de las columnas interiores sirve a dos portales, mientras que las columnas exteriores sirven sólo a uno. Otra distribución común consiste en suponer que la fuerza cortante *V* tomada por cada columna es proporcional al área de piso que soporta. La distribución de la fuerza cortante en los dos procedimientos sería la misma en un edificio con vanos iguales, pero para uno con vanos desiguales los resultados serían diferentes; el método del área de piso daría probablemente resultados más realistas.

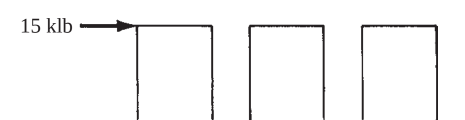


Figura 14.31 Un nivel del marco mostrado en la figura 14.30.

Análisis de marcos con el método del portal

El marco de la figura 14.30 se analiza en la figura 14.32 con base en las hipótesis anteriores. Las flechas mostradas en la figura dan la dirección de las fuerzas cortantes en las trabes y de las fuerzas axiales en las columnas. Usted puede visualizar la condición de esfuerzos en el marco si supone que el viento tiende a empujarlo de izquierda a derecha, alargando las columnas exteriores de la izquierda y comprimiendo las columnas exteriores de la derecha. Brevemente, los cálculos se hicieron de la siguiente manera:

1. *Fuerzas cortantes en las columnas*. Se obtuvieron primero las fuerzas cortantes en cada columna de los diversos niveles. La fuerza cortante total en el nivel superior es de 15 klb. Como hay dos columnas exteriores y dos columnas interiores, puede escribirse la siguiente expresión:

$$x + 2x + 2x + x = 15 \text{ klb}$$
$$x = 2.5 \text{ klb}$$
$$2x = 5.0 \text{ klb}$$

La fuerza cortante en la columna *CD* es de 2.5 klb; en *GH* es de 5.0 klb, etc. Similarmente, las fuerzas cortantes en los miembros se determinaron para las columnas en los niveles primero y segundo, donde las fuerzas cortantes totales son de 75 klb y 45 klb, respectivamente.

2. *Momentos en las columnas*. Se supone que las columnas tienen puntos de inflexión a la mitad de sus alturas; por tanto, sus momentos, arriba y abajo, son iguales a las fuerzas cortantes multiplicadas por la mitad de sus alturas.

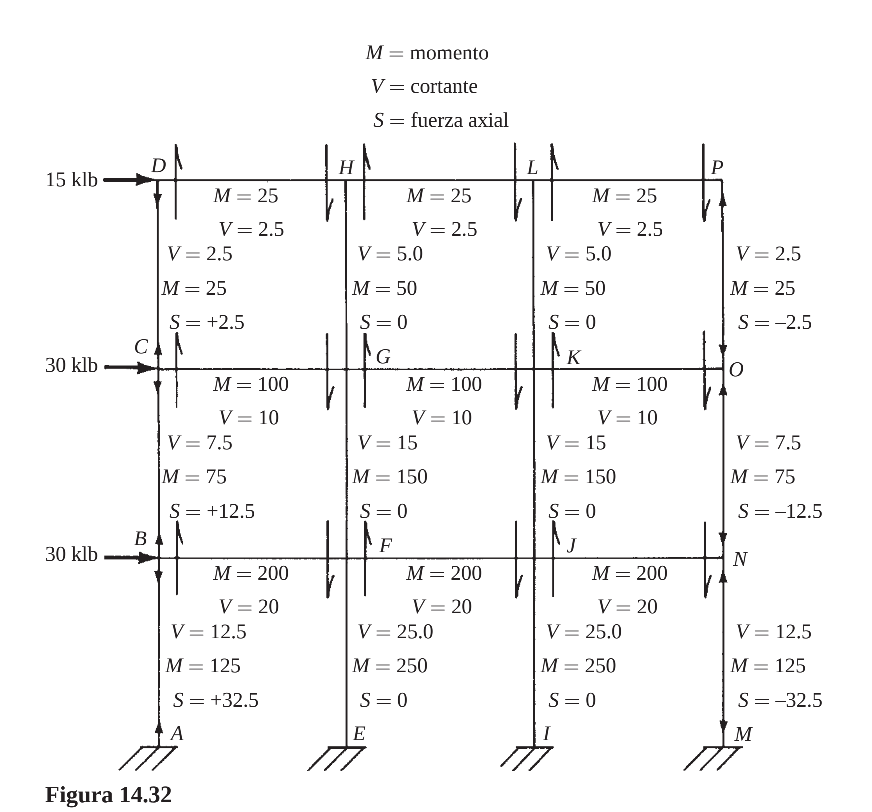


Figura 14.32

3. *Momentos y fuerzas cortantes en las trabes*. En cualquier nudo del marco, la suma de los momentos en las trabes es igual a la suma de los momentos en las columnas. Los momentos en las columnas ya se determinaron previamente. Comenzando en la esquina superior izquierda del marco y procediendo de izquierda a derecha, sumando o restando los momentos según el caso, los momentos en las trabes se encontraron en el siguiente orden: *DH*, *HL*, *LP*, *CG*, *GK*, etc. Se infiere que si los puntos de inflexión están en los centros de las trabes, las fuerzas cortantes en las trabes son iguales a los momentos en las trabes divididos entre la mitad de las longitudes de éstas.
4. *Fuerzas axiales en las columnas.* Las fuerzas axiales en las columnas pueden obtenerse directamente a partir de las fuerzas cortantes en las trabes. Comenzando en la esquina superior izquierda, la fuerza axial en la columna *CD*, es igual a la fuerza cortante en la trabe *DH*. La fuerza axial en la columna *GH* es igual a la diferencia entre las fuerzas cortantes de las trabes *DH* y *HL*, la cual es igual a cero en este caso. (Si el ancho de cada uno de los portales es el mismo, las fuerzas cortantes en la trabe de un nivel serán iguales y las columnas interiores no tendrán fuerza axial ya que sólo se consideran las cargas laterales.)

14.9 ANÁLISIS POR COMPUTADORA DE MARCOS DE EDIFICIOS

Todas las estructuras son tridimensionales, pero un análisis teórico de tales estructuras mediante un método manual de cálculo resulta tan largo que se vuelve impráctico. En consecuencia, se supone normalmente que tales sistemas consisten en sistemas bidimensionales o planos y cada uno se analiza independientemente. Los métodos de análisis presentados en este capítulo se trataron de esta manera.

Actualmente, las computadoras electrónicas han cambiado considerablemente la situación y ahora es posible analizar estructuras tridimensionales completas. En consecuencia, existen análisis más realistas y se reduce la necesidad de factores de seguridad altos. La aplicación de las computadoras no se restringe meramente al análisis; se usan en prácticamente todas las fases del trabajo con concreto, desde el análisis hasta el diseño, el detallado, la formulación de especificaciones, las cuantificaciones de los materiales, las estimaciones de costos, etcétera.

Otra ventaja muy importante del análisis por computadora de los marcos de edificios es que el proyectista puede considerar rápidamente un gran número de patrones diferentes de carga. Los resultados son en ocasiones sorprendentes.

14.10 ARRIOSTRAMIENTO LATERAL EN EDIFICIOS

Para un edificio común, el proyectista selecciona columnas relativamente pequeñas. Aunque tal procedimiento conduce a una mayor área de piso, también conduce a edificios con poca rigidez lateral o con poca resistencia al viento y a las cargas sísmicas. Tales edificios pueden tener grandes deflexiones laterales y fuertes vibraciones durante los vendavales, a menos que se proporcione a la estructura una rigidez lateral o contraventeo adecuado.

Para proporcionar rigidez lateral será necesario que las losas del techo y de los pisos se unan a los muros y a los cubos de las escaleras o de los elevadores rígidos. Algunas veces se agregan muros estructurales, llamados *muros de cortante*, a una estructura para proporcionar la resistencia lateral necesaria. (El diseño de los muros de cortante se trata en el capítulo 18 de esta obra.) Si no es posible proporcionar tales muros, los cubos de escaleras o de elevadores se pueden diseñar como grandes vigas tipo caja para transmitir las cargas laterales a la cimentación. Estos miembros se comportarán como grandes vigas en voladizo. Al diseñar tales miembros, el proyectista debe procurar obtener una resistencia simétrica con el fin de impedir rotaciones o torsiones laterales no uniformes en las estructuras cuando se apliquen cargas laterales.[9]

[9] Leet, K., 1991, *Reinforced Concrete Design*, 2a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill), págs. 453-454.

4.11 REQUISITOS DE LA LONGITUD DE DESARROLLO EN MIEMBROS CONTINUOS

En el capítulo 7 se presentó una introducción general al tema de las longitudes de desarrollo para vigas simples y en voladizo. En esta sección se presentan los requisitos de la longitud de desarrollo según el ACI para miembros continuos, tanto del refuerzo positivo como del negativo. Después de estudiar esta información, probablemente el lector estará complacido al encontrar al final de esta sección una discusión de prácticas simplificadas de diseño en gabinete para determinar las longitudes de las varillas.

Refuerzo por momento positivo

La sección 12.11 del código proporciona varios requisitos para las longitudes del refuerzo por momento positivo. Éstos se resumen brevemente en los siguientes párrafos.

1. Por lo menos un tercio del acero positivo en las vigas simples y un cuarto en los miembros continuos debe prolongarse a lo largo de la misma cara del miembro 6 plg o más en el apoyo (12.11.1). El propósito de este requisito es garantizar que el momento resistente de una viga no se reduzca excesivamente en la partes de las vigas donde los momentos pueden cambiar debido a asentamientos, cargas laterales, etcétera.

2. El refuerzo positivo requerido en el párrafo anterior debe, *si el miembro es parte de un sistema primario resistente a carga lateral*, prolongarse en el apoyo una distancia suficiente para desarrollar el esfuerzo de fluencia en tensión de las varillas en la cara del apoyo. Este requisito es incluido por el código (12.11.2) para garantizar una respuesta dúctil a sobreesfuerzos severos que podrían ocurrir con la inversión de momentos durante un sismo o una explosión. Como resultado de este requisito, es necesario tener varillas inferiores traslapadas en apoyos interiores y usar longitudes adicionales de empotramiento y ganchos en los apoyos exteriores.

3. La sección 12.11.3 del código establece que en los apoyos simples y en los puntos de inflexión, las varillas a tensión por momento positivo deben tener sus diámetros limitados a ciertos tamaños máximos. El propósito de esta limitación es mantener los esfuerzos de adherencia dentro de valores razonables en esas secciones de momentos pequeños y fuerzas cortantes grandes. (Recuerde que cuando los diámetros de las varillas son pequeños, éstas tienen una mayor área superficial en proporción a las áreas de sus secciones transversales. Así entonces, para adherirse al concreto, entre mayor es el diámetro de la varilla, mayor tendrá que ser la longitud de desarrollo de ésta. Este hecho se refleja en las expresiones para ℓ_d.) No se ha demostrado que las longitudes de anclaje largas sean totalmente eficaces en el desarrollo de las varillas en una distancia corta, como entre un P. I. y un punto de esfuerzo máximo, situación que podría ocurrir en las vigas cortas fuertemente cargadas con grandes varillas inferiores. Se especifica que ℓ_d, calculada de acuerdo con los requisitos presentados en el capítulo 7, no debe exceder del siguiente valor:

$$\ell_d \leq \frac{M_n}{V_u} + \ell_a \qquad \text{(Ecuación 12-5, ACI)}$$

En esta expresión, M_n es la resistencia teórica a flexión calculada del miembro cuando todo el refuerzo en esa parte de la viga se supone trabajando bajo el esfuerzo f_y y V_u es la fuerza cortante máxima aplicada en la sección. En un apoyo, ℓ_a es igual a la suma de la longitud de empotramiento más allá del ℄ y la longitud equivalente de empotramiento debida a ganchos o a otro anclaje mecánico. Las varillas deformadas con anclaje interno así como con anclaje mecánico, que se permiten en la sección 12.6 del código ACI, consisten en varillas, placas o ángulos u otras piezas soldadas o ligadas transversalmente a las varillas de flexión en localidades donde no se dispone de suficiente longitud de anclaje. Véanse las secciones 1.15 y 7.15 de esta obra para los detalles sobre el anclaje interno. En un punto de inflexión, ℓ_a es igual al mayor valor del peralte efectivo del miembro o 12d (ACI 12.11.3). Cuando los extremos

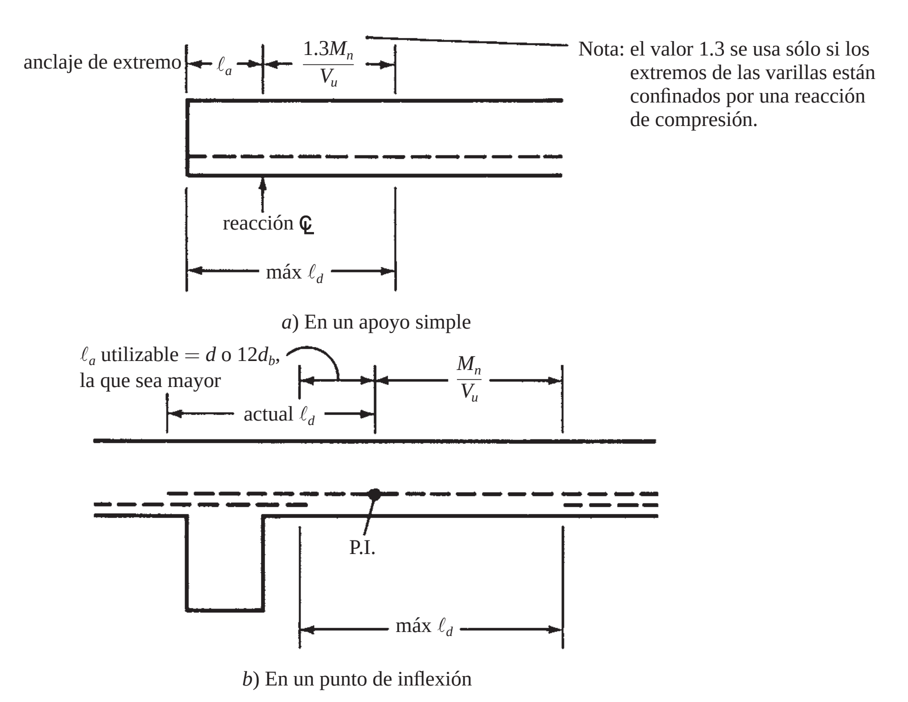


Figura 14.33 Requisitos de la longitud de desarrollo para el refuerzo por momento positivo.

del refuerzo están restringidos por una reacción de compresión, tal como cuando existe una columna abajo, pero no como cuando una viga se enmarca en una trabe, se permite un incremento de 30% en el valor de M_n/V_u a $1.3M_n/V_u$. Los valores descritos aquí se resumen en la figura 14.33, que es similar a la figura R12.11.3 del código ACI. En el ejemplo 14.3 se suministra una breve ilustración numérica para el caso de una viga simplemente apoyada.

EJEMPLO 14.3

En el apoyo simple mostrado en la figura 14.34, dos varillas sin revestimiento #9 se han prolongado desde la zona de momento máximo hasta dentro del apoyo. ¿Es satisfactorio el tamaño de las varillas si $f_y = 60$ lb/plg^2, $f'_c = 3$ klb/plg^2, $b = 12$ plg, $d = 24$ plg y $V_u = 65$ klb, si se usa concreto de arena y grava normal y si la reacción es de compresión? Suponga un recubrimiento para las varillas = 2″ libres.

SOLUCIÓN

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{(2.00)(60)}{(0.85)(3)(12)} = 3.92''$$

$$M_n = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) = (2.00)(60)\left(24 - \frac{3.92}{2}\right) = 2\,644.8 \text{ plg-klb}$$

$$c = \text{cubierta lateral} = 2 + \frac{1.128}{2} = 2.564'' \leftarrow$$

$$c = \text{una mitad de centro a centro de las varillas} = \left(\frac{1}{2}\right)(12 - 2 \times 2 - 1.128) = 3.436''$$

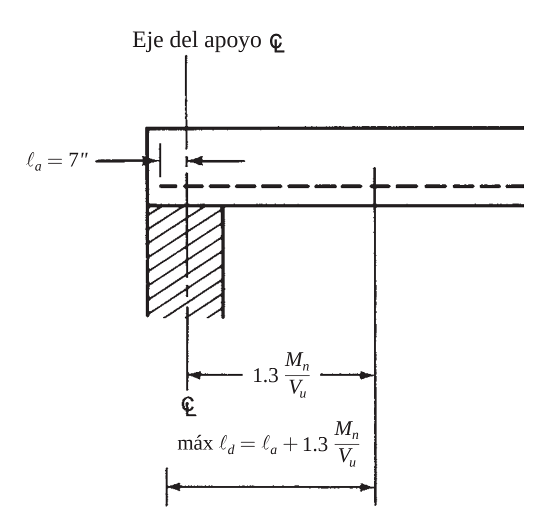


Figura 14.34

Suponemos $K_{tr} = 0$

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{3}{40}\frac{f_y}{\lambda\sqrt{f'_c}}\frac{\Psi_t\Psi_e\Psi_s}{\dfrac{c_b + K_{tr}}{d_b}}$$

$$= \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{60\,000}{(1.0)\sqrt{3\,000}}\right)\frac{(1.0)(1.0)(1.0)}{\dfrac{2.564 + 0}{1.128}} = 36.14 \text{ diámetros}$$

$$\ell_d = (36.14)(1.128) = 41''$$

$$\ell_d \text{ permisible máximo} = \frac{M_n}{V_u} + \ell_a$$

$$= (1.3)\left(\frac{2\,644.8}{65}\right) + 7 = 59.90'' > 41'' \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Nota: si esta condición no se hubiese satisfecho, el valor permisible de ℓ_d se podría haber incrementado usando varillas más pequeñas o incrementando el anclaje extremo ℓ_a, por ejemplo mediante el uso de ganchos.

Refuerzo por momento negativo

La sección 12.12 del código establece que el refuerzo de tensión por momento negativo requerido debe anclarse apropiadamente en o a través del apoyo del miembro. La sección 12.12.1 del código dice que la tensión en esas varillas negativas debe desarrollarse a cada lado de la sección bajo consideración, por longitud de empotramiento, ganchos o anclaje mecánico. Pueden usarse ganchos porque se trata de varillas a tensión.

La sección 12.10.3 del código dice que el refuerzo debe prolongarse más allá del punto en que ya no se requiere por momento, en una distancia igual al peralte efectivo *d* del miembro o a 12 diámetros de la varilla, rigiendo la distancia mayor, excepto en los apoyos de vigas simples o en los extremos de vigas en voladizo. La sección 12.12.3 del código dice que por lo menos un tercio del refuerzo total

proporcionado para el momento negativo en el apoyo, debe tener una longitud de empotramiento más allá del punto de inflexión no menor que el peralte efectivo del miembro, que 12 diámetros de varilla o que un dieciseisavo del claro libre del miembro, rigiendo el valor mayor. La ubicación del punto de inflexión puede variar para las diferentes combinaciones de carga, por tanto, es seguro utilizar el caso más crítico.

El ejemplo 14.4 que sigue presenta una consideración detallada de las longitudes requeridas por el código para un conjunto de varillas rectas de momento negativo en un apoyo interior de una viga continua.

EJEMPLO 14.4

En el primer apoyo interior de la viga continua mostrada en la figura 14.35, se usan seis varillas superiores rectas del #8 sin revestimiento (4.71 plg^2) para resistir un momento M_u de 390 pie-klb para el cual la A_s requerida es de 4.24 plg^2. Si $f_y = 60$ klb/plg^2, $f'_c = 3$ klb/plg^2 y se usa concreto normal de grava y arena, determinar la longitud de las varillas de acuerdo con el código ACI. Las dimensiones de la viga son $b_w = 14$ plg y $d = 24$ plg. Supongan revestimiento para las varillas $= 2d_b$ y una separación libre entre ellas $= 3d_b$.

Nota: las seis varillas de tensión por momento negativo se colocan en realidad en una capa en la parte superior de la viga, pero simplemente se muestran como ejemplo en las figuras 14.35 y 14.36 como si estuviesen colocadas en tres capas de dos varillas cada una. En la solución que sigue, las dos varillas "inferiores" se cortan primero, en el punto en que se suministran el momento más la longitud requerida de desarrollo; las dos varillas "intermedias" se cortan cuando lo permiten el momento más la longitud de desarrollo necesaria y las dos varillas "superiores" se cortan a la distancia requerida más allá del punto de inflexión.

SOLUCIÓN

1. Longitud de desarrollo requerida

$$c_b = \text{recubrimiento lateral} = (2)(1.0) + \frac{1.0}{2} = 2.5''$$

$$c_b = \text{media separación centro a centro entre varillas} = \left(\frac{3}{2}\right)(1.0) + \left(\frac{1.0}{2}\right) = 2.0'' \leftarrow$$

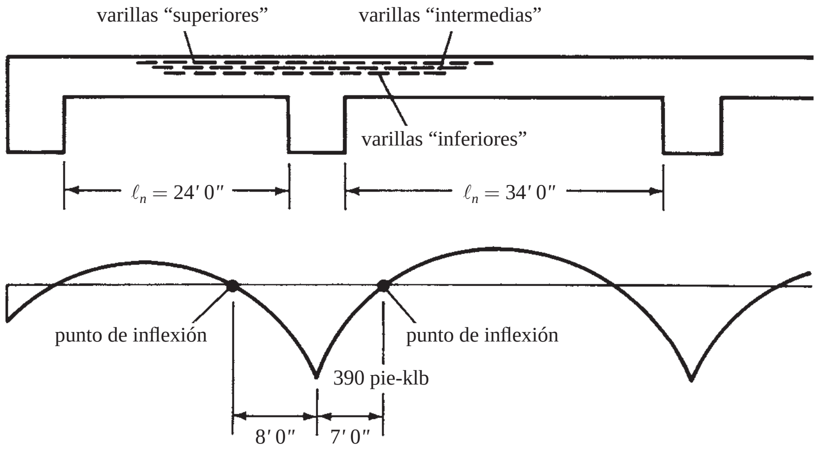
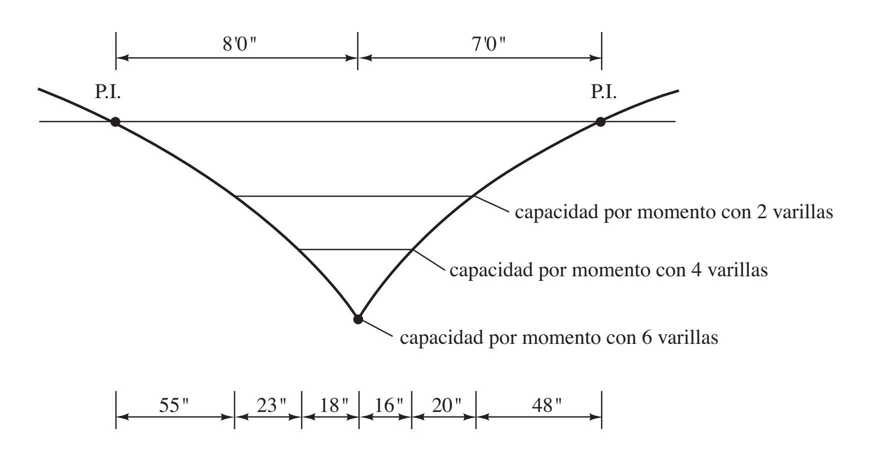


Figura 14.35



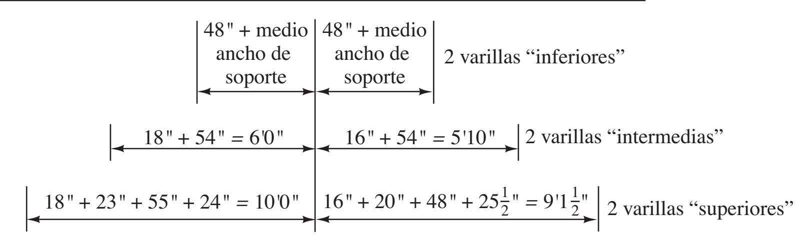


Figura 14.36

Suponemos $K_{tr} = 0$

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{60\ 000}{(1.0)\sqrt{3\ 000}}\right)\frac{(1.3)(1.0)(1.0)}{\frac{2.0+0}{1.0}} = 53.4 \text{ diámetros}$$

$$\ell_d = (53.41)(1.0) = 53.4'' \quad \text{Digamos } 54''$$ OK

2. La sección 12.12.3 del código requiere que un tercio de las varillas se prolonguen más allá del punto de inflexión ($1/3 \times 6 = 2$ varillas) una distancia igual al mayor de los siguientes valores (aplicable a las varillas "superiores" en la figura).

a) d del alma $= 24''$
b) $12d_b = (12)(1) = 12''$
c) $\left(\frac{1}{16}\right)(24 \times 12)$ para el claro de $24'' = 18''$
$\left(\frac{1}{16}\right)(34 \times 12)$ para el claro de $34'' = 25\frac{1}{2}''$

Use $24''$ para el claro corto y $25\frac{1}{2}''$ para el claro largo

3. La sección 12.10.3 del código requiere que las varillas se prolonguen más allá del punto en que ya no se requieren por momento una distancia igual al mayor valor de los siguientes:

a) $d = 24''$
b) $12d_b = (12)(1) = 12''$

4. La sección 12.3.3 dice que la ℓ_d puede multiplicarse por $A_{s,\text{ req}}/A_{s,\text{ prop}}$. Esto sólo se aplica a las primeras varillas cortadas (aquí, las varillas "inferiores").

$$\ell_d \text{ reducida} = (53.4)\left(\frac{4.24}{4.71}\right) = 48''$$

5. En la figura 14.36 estos valores se aplican a las varillas bajo consideración y se dan los resultados.

El ingeniero estructural rara vez tiene que involucrarse con un diagrama de momentos único; las cargas se mueven y los diagramas de momento cambian. Por tanto, el código ACI (12.10.3) establece que las varillas de refuerzo deben prolongarse en una distancia de 12 diámetros o una distancia igual al peralte efectivo del miembro, rigiendo la mayor distancia (excepto en los apoyos de claros simples y en los bordes libres de voladizos), más allá de sus puntos teóricos de corte.

Como se indicó antes, las varillas deben empotrarse a una distancia ℓ_d desde sus puntos de esfuerzo máximo.

Además, el código (12.11.1) establece que por lo menos un tercio del acero positivo en los claros simples y un cuarto del acero positivo en los claros continuos deben prolongarse a lo largo de la misma cara de la viga en 6″ por lo menos dentro del apoyo.

El código (12.12.3) da reglas algo similares para el acero negativo. Por lo menos un tercio del acero negativo proporcionado en un apoyo debe prolongarse más allá de su punto de inflexión en una distancia igual a un dieciseisavo del claro libre o a 12 diámetros de la varilla o al peralte efectivo del miembro, rigiendo el mayor valor. Las otras varillas de acero negativo deben prolongarse más allá de sus puntos teóricos de corte en una distancia igual al peralte efectivo, o a 12 diámetros de la varilla y por lo menos una distancia ℓ_d desde la cara del apoyo.

El cálculo de los puntos de corte y doblado para todas las varillas aun de una estructura de pequeño tamaño puede representar un trabajo considerable. Por tanto, el proyectista promedio o más bien el dibujante estructural corta o dobla las varillas siguiendo reglas empíricas que han sido desarrolladas para satisfacer las reglas del código que se presentaron aquí. En la figura 14.37 se da un conjunto de tales reglas para viga continuas. En el *Manual CSRI*,[10] se dan tales reglas para tipos diferentes de miembros estructurales, como losas sólidas en una dirección, largueros de concreto, losas en dos direcciones, etcétera.

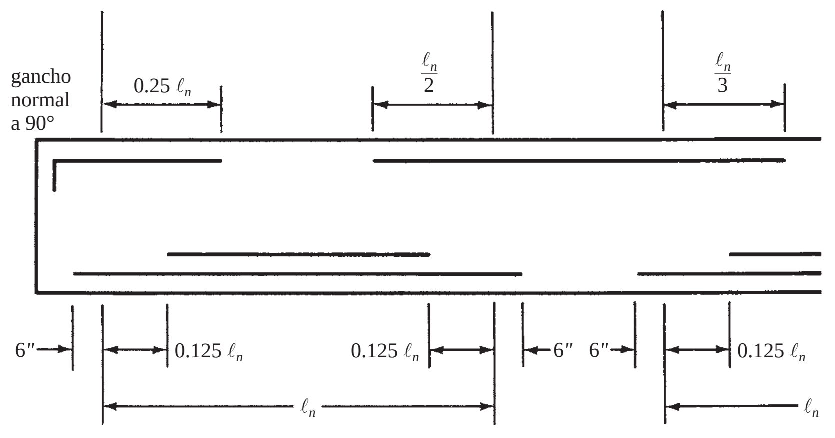


Figura 14.37 Detalles recomendados en varillas de vigas continuas.

---

[10]Concrete Reinforcing Steel Institute, 2002 *CRSI Handbook*, 9a. ed. (Chicago), pág. 12-1.

PROBLEMAS

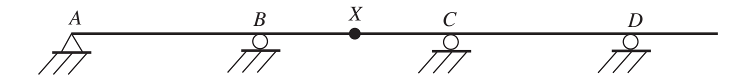
Líneas de influencia cualitativas

En los problemas 14.1 a 14.3 dibuje las líneas de influencia cualitativas para las funciones indicadas en las estructuras mostradas.

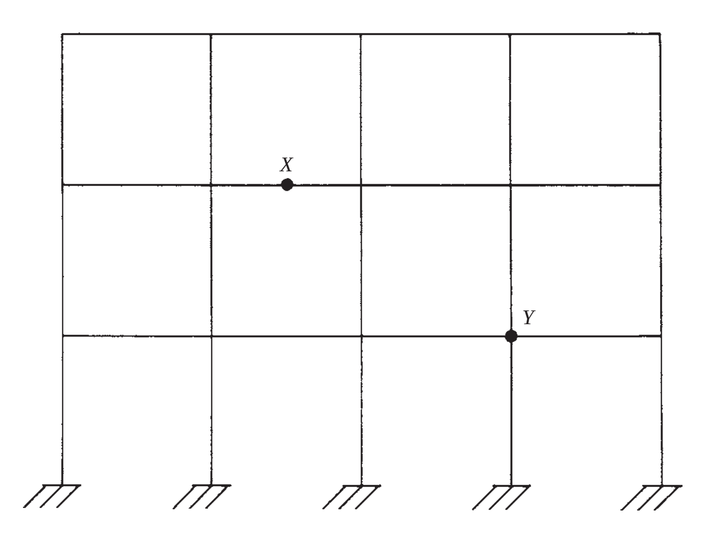
14.1 Reacciones en *A* y *B*, momento positivo y fuerza cortante positiva en *X*.



14.2 Reacción en *B* y *D*, momento positivo y fuerza cortante en *X*.

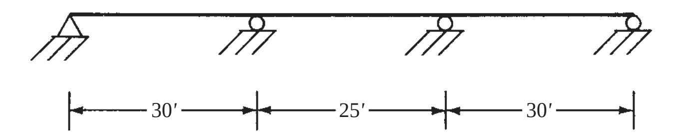


14.3 Momento positivo en *X*, fuerza cortante positiva en *X*, momento negativo justo a la izquierda de *Y*.



Envolventes del momento

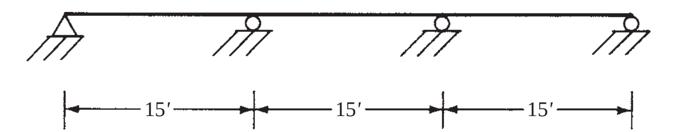
14.4 Para la viga continua mostrada y para una carga muerta de servicio de 2 klb/pie y una carga viva de servicio de 4 klb/pie, dibuje la envolvente de momentos usando cargas factorizadas y suponiendo una redistribución permisible hacia arriba o hacia abajo de 10% del momento negativo máximo. No use coeficientes del ACI.



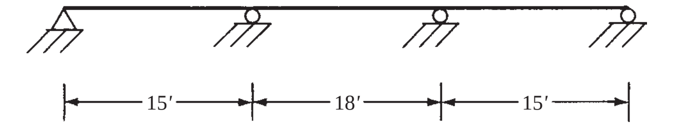
Diseño de losas con los coeficientes del ACI

En los problemas 14.5 y 14.6, diseñe las losas continuas mostradas usando los coeficientes de momentos del ASCI, suponiendo una carga viva de servicio de 200 lb/pie^2 que deberá ser soportada además del peso de las losas. Las losas deberán construirse monolíticamente junto con los apoyos extremos, que son vigas de fachada. $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2, $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2 para concreto de peso normal. En la figura se muestran los claros libres.

Problema 14.5 (*Una respuesta:* losa de 7$\frac{1}{2}$½″, $d = 6\frac{1}{4}$¼″, varillas #4 @ 6-1/2″ de A_s positivo en los 3 claros.)

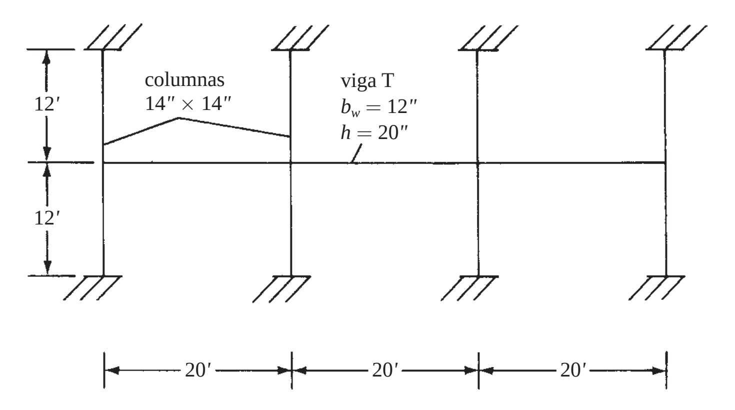


Problema 14.6

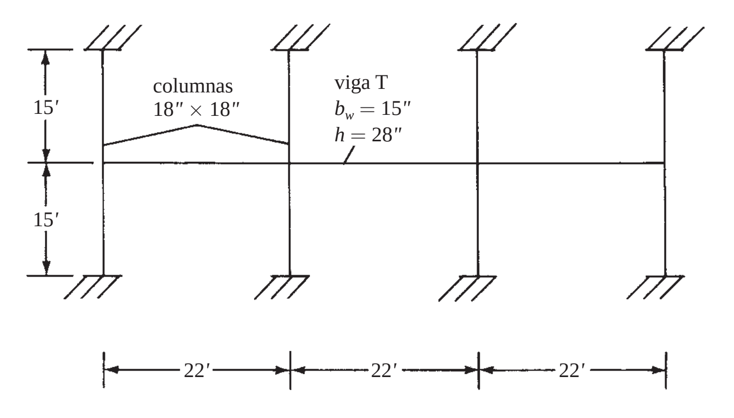


Análisis por el método del marco equivalente

14.7 Con el método del marco rígido equivalente, dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga continua mostrada, usando cargas factorizadas. La carga muerta de servicio, incluyendo el peso propio de la viga, es de 1.5 klb/pie y la carga viva de servicio es de 3 klb/pie. Coloque la carga viva sólo en el claro central. Suponga que los momentos de inercia de las vigas T son iguales a 2 veces los momentos de inercia de sus almas. (*Resp.*: $M -$ máx = 184.8 pie-klb, $M +$ máx = 145.2 pie-klb.)

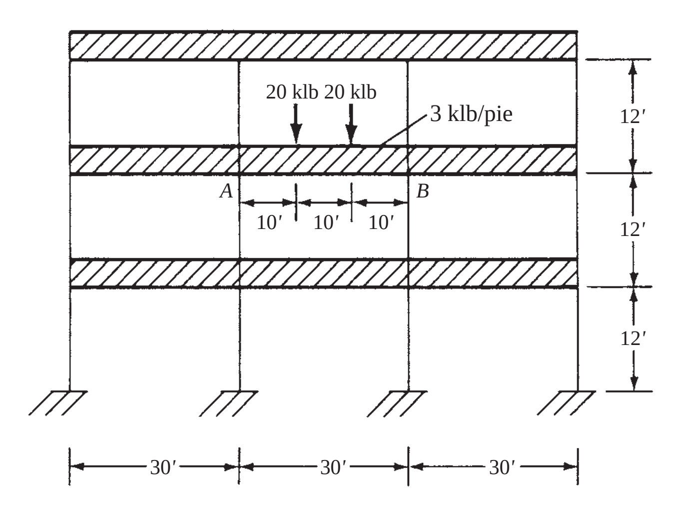


14.8 Con el método del marco rígido equivalente, dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga continua mostrada, usando cargas factorizadas. La carga muerta de servicio, incluyendo el peso propio de la viga, es de 2.4 klb/pie y la carga viva de servicio es de 3.2 klb/pie. Coloque la carga viva sólo en los claros 1 y 2. Suponga que los momentos de inercia de las vigas T son iguales a 2 veces los momentos de inercia de sus almas.



Análisis suponiendo la ubicación de los puntos de inflexión

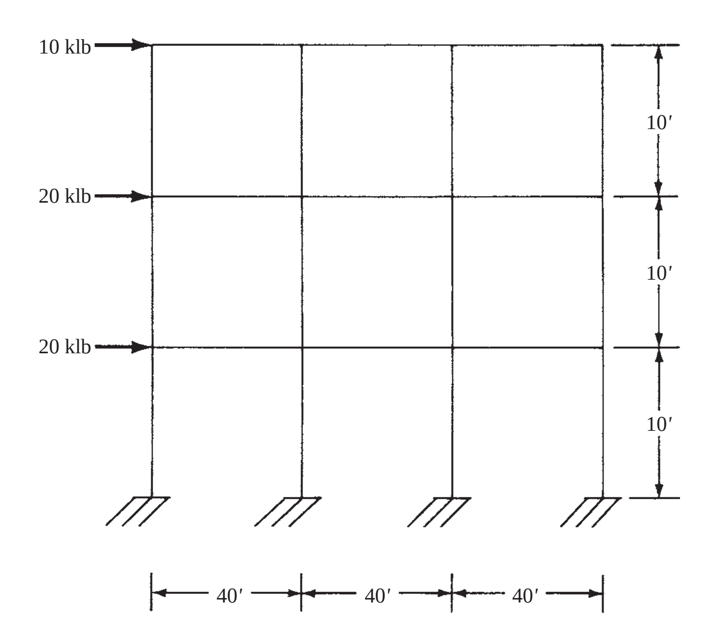
14.9 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para el miembro *AB* del marco mostrado en la figura acompañante si se supone que los puntos de inflexión están ubicados a 0.15*L* desde cada extremo del claro. (*Resp*.: *M* máx = 304 pie-klb @ ℄.)



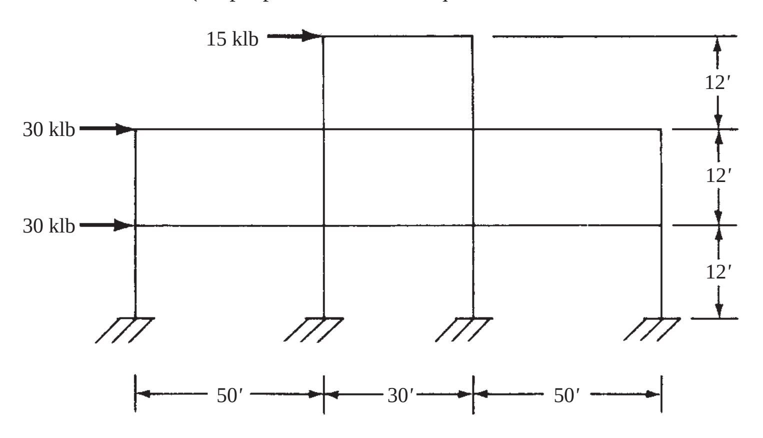
Análisis por el método del portal

En los problemas 14.10 a 14.12, calcule los momentos, las fuerzas cortantes y las fuerzas axiales para todos los miembros de los marcos mostrados, usando el método del portal.

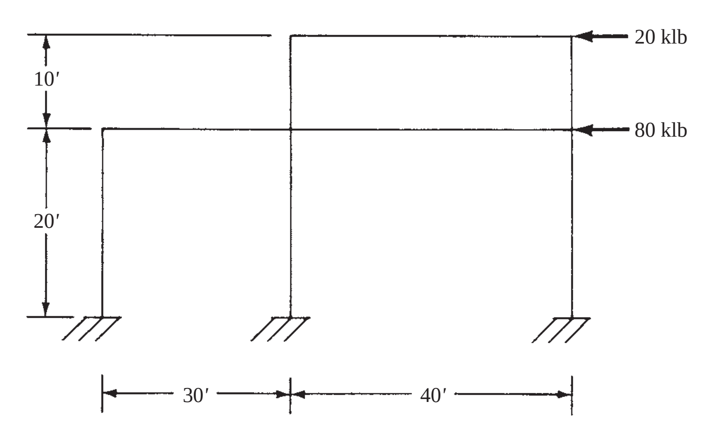
Problema 14.10



Problema 14.11 (*Resp.*: para la columna izquierda inferior $V = 12.5$ klb, $M = 75$ pie-klb y $S = 6.6$ klb)

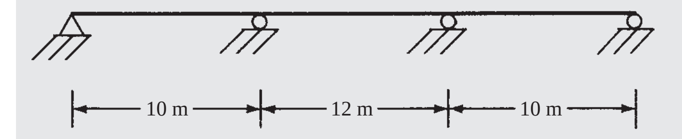


Problema 14.12

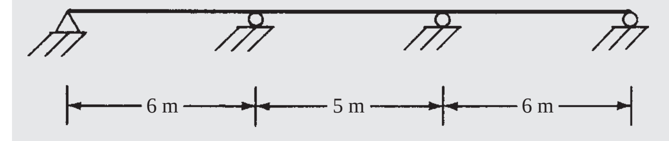


Problemas con unidades del SI

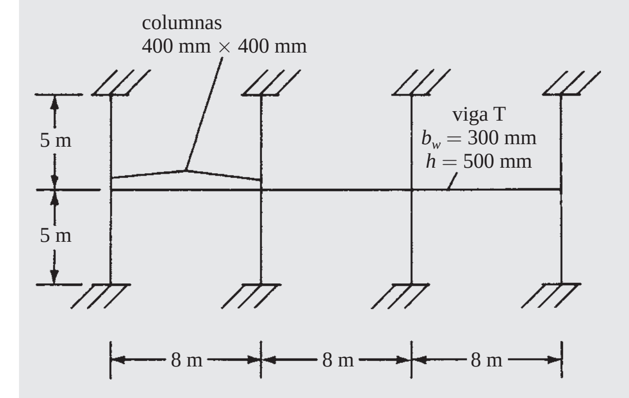
14.13 Para la viga continua mostrada y para una carga muerta de servicio de 26 kN/m y una carga viva de servicio de 32 kN/m, dibuje la envolvente de momentos, suponiendo una redistribución permisible de 10% hacia arriba o hacia abajo del momento negativo máximo. (*Resp.*: M – máx = 1 110.7 N · m, M + máx = 748.8 N · m.)



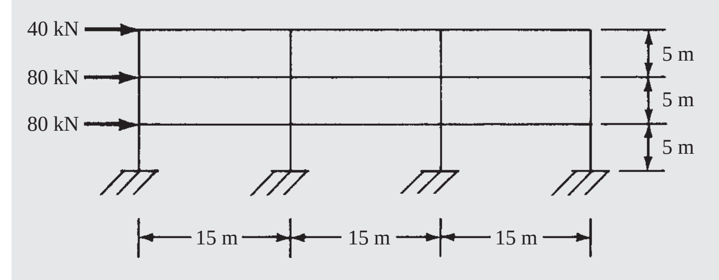
14.14 Diseñe la losa continua mostrada usando los coeficientes de momento del ACI, suponiendo que el concreto pesa 23.5 kN/m^3 y suponiendo que se debe soportar una carga viva de servicio de 9 kN/m. Las losas están construidas monolíticamente con los apoyos extremos, que son vigas de fachada, $f_y = 420$ MPa y $f'_c = 21$ MPa. Se muestran los claros libres.



14.15 Usando el método del marco rígido equivalente, dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para las vigas continuas mostradas, usando cargas factorizadas. La carga muerta de servicio incluyendo el peso propio de la viga es 10 kN/m y la carga viva de servicio es 14 kN/m. Coloque la carga viva sólo en los claros 1 y 3. Suponga que la I de las vigas T es igual a 1.5 veces la I de sus almas. (*Resp.*: M – máx = 171.7 N · m, M + máx = 127.4 N · m.)



14.16 Calcule los momentos, las fuerzas cortantes y las fuerzas axiales para todos los miembros del marco mostrado, usando el método del portal.



15

Torsión

15.1 INTRODUCCIÓN

El proyectista promedio probablemente no se preocupa mucho por la torsión. Piensa casi exclusivamente en fuerzas axiales, fuerzas cortantes y momentos flexionantes y sin embargo, la mayoría de las estructuras de concreto reforzado están sujetas hasta cierto grado a la torsión. Hasta hace pocos años, los factores de seguridad requeridos por los códigos para el diseño de miembros de concreto reforzado por cortante y momento, eran tan grandes, que los efectos de la torsión podían casi siempre despreciarse con certidumbre, excepto en casos extremos. Actualmente, los factores de seguridad son menores que antes y los miembros son de menor tamaño, por lo que la torsión se ha vuelto un problema más común.

En muchas estructuras sí se presenta una torsión apreciable, como en las trabes principales de los puentes, que son torcidas por las vigas transversales y por las losas. Se presenta en los edificios donde el borde de una losa de piso y sus vigas están soportados por una viga de fachada, a su vez soportada por las columnas exteriores. Este caso se ilustra en la figura 15.1, donde las vigas de piso tienden a torcer lateralmente la viga de fachada. Los terremotos pueden producir fuerzas de torsión peligrosas en todos los edificios. Esto es especialmente cierto en estructuras asimétricas en las cuales los centros de masa y de rigidez no coinciden. Otros casos en que la torsión puede ser particularmente importante ocurren en las trabes de puentes curvos, en las escaleras espirales, en las trabes de terrazas y en donde se aplican "excéntricamente" grandes cargas a las vigas. La figura 15.2 muestra un caso de aplicación "excéntrica" con esfuerzos resultantes de torsión muy grandes. Debe ser claro que si el miembro de soporte tiene capacidad de giro, los esfuerzos resultantes de torsión serán muy pequeños. Sin embargo, si el miembro está restringido, los esfuerzos de torsión serán muy grandes.

Cuando un miembro de concreto simple está sometido a torsión pura, se agrietará y fallará a lo largo de líneas espirales a 45° debido a la tensión diagonal que corresponde a los esfuerzos de torsión. Una demostración muy efectiva de este tipo de falla se tiene al torcer un trozo de gis en sus manos hasta que se rompe. Aunque los esfuerzos de tensión diagonal producidos por la torsión son muy similares a los producidos por el cortante, los primeros se presentan en todas las caras de un miembro. Como resultado, se suman en un lado a los esfuerzos causados por el cortante y se restan en el otro.[1]

En años recientes se ha tenido más reportes de fallas estructurales atribuidas a la torsión. Como resultado, se ha dedicado una gran cantidad de investigación a este tema, con lo que se ha mejorado mucho la noción del comportamiento de los miembros estructurales sometidos a torsión. Con base en tan extenso trabajo experimental, el código ACI incluye requisitos muy específicos para el diseño de miembros de concreto reforzado sometidos a torsión o a torsión combinada con cortante y flexión. Se debe tener en cuenta que las fuerzas cortantes y de torsión máximas pueden presentarse en las zonas en que los momentos flexionantes son pequeños. En tales casos, puede ser de particular importancia la interacción del cortante con la torsión en lo que respecta al diseño.

---

[1] White, R.N., Gergely, P. y Sexsmith, R.G., 1974, *Structural Engineering*, vol. 3 (Nueva York: John Wiley & Sons), págs. 423-424.

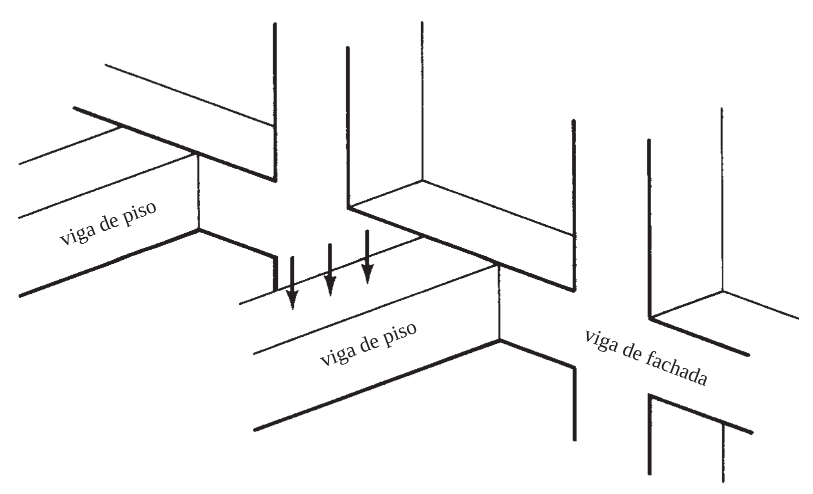


Figura 15.1 Torsión en vigas de fachada.

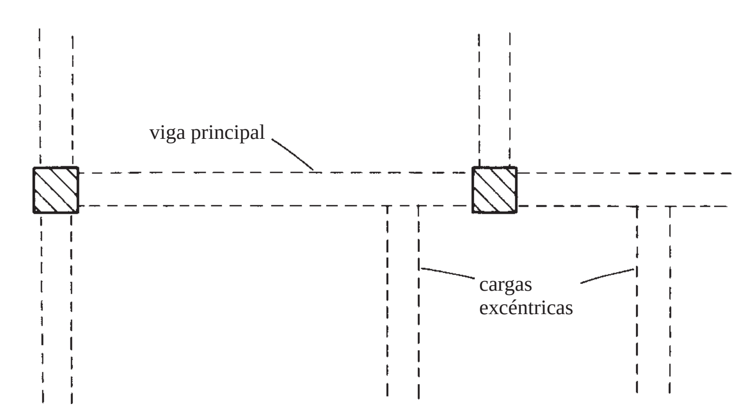


Figura 15.2 Cargas excéntricas que ocasionan torsión en la viga principal.

15.2 REFUERZO POR TORSIÓN

Los miembros de concreto reforzado sometidos a grandes fuerzas torsionales pueden fallar repentinamente si no se les proporciona refuerzo por torsión. La adición de refuerzo torsional no cambia la magnitud de la torsión que generará grietas de tensión diagonal, pero impide que los miembros se rompan en pedazos. Como resultado, serán capaces de resistir momentos de torsión considerables sin fallar. Las pruebas han mostrado que tanto las varillas longitudinales como los estribos cerrados (o espirales) son necesarios para interceptar las numerosas grietas de tensión diagonal que ocurren sobre todas las superficies de los miembros sujetos a fuerzas torsionales apreciables.

Los estribos normales tipo ⊔ no son satisfactorios. Deben cerrarse soldando sus extremos para formar un lazo continuo, como se ilustra en la figura 15.3(*a*), o bien doblando sus extremos alrededor de una varilla longitudinal, como se muestra en la parte (*b*) de la misma figura. Si se usan estribos de una pieza como éstos, la jaula entera de la viga acaso tendrá que ser prefabricada y colocada como una unidad (lo que puede no ser factible si las varillas longitudinales tienen que pasar entre las varillas de columnas) o las varillas longitudinales tendrán que entretejerse una por una a través de los estribos cerrados y tal vez a través de varillas de columnas. Es fácil ver que es mejor algún otro tipo de arreglo.



Puente elevado de viaducto, Wichita Falls, Texas. (Cortesía de EFCO.)

Hasta hace poco era común usar dos estribos ⊔ traslapados, dispuestos como se muestra en la figura 15.4. Aunque esta disposición simplifica la colocación de las varillas longitudinales, tal arreglo no ha resultado muy satisfactorio. Como se describe en el comentario (R11.5.4.1) del ACI, los miembros sometidos principalmente a torsión, pierden su recubrimiento lateral de concreto por desconchado bajo fuertes pares torsionales. Si esto llega a ocurrir, los estribos ⊔ traslapados de la figura 15.4 no serán efectivos y se tendrá una falla prematura por torsión.

Un tipo de refuerzo por torsión mucho mejor consiste en estribos ⊔, cada uno anclado adecuadamente a una varilla superior, como los mostrados en la figura 15.5. Las pruebas han demostrado que el

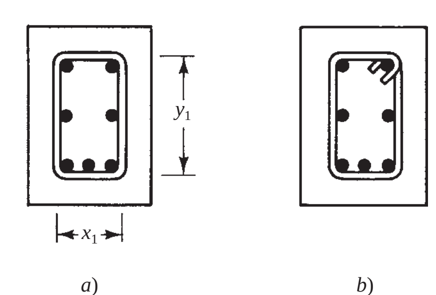


Figura 15.3 Estribos cerrados (éstos son frecuentemente imprácticos).

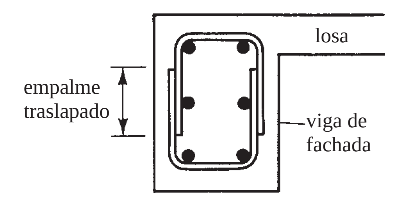
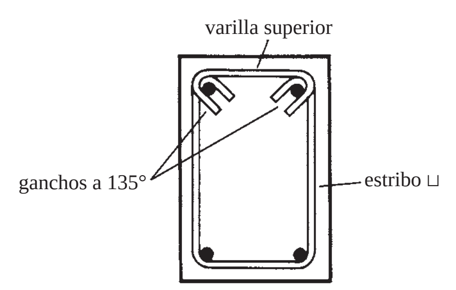


Figura 15.4 Estribos ⊔ traslapados que se usan como refuerzo por torsión, *pero que no son satisfactorios.*

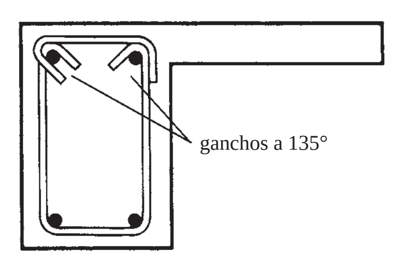
uso de estribos de torsión con ganchos a 90° conduce al desconchamiento del concreto del lado de los ganchos. El uso de ganchos a 135°, tanto en los estribos ⊔ como en las varillas superiores, es muy útil para reducir tal avería.

Si se proporciona confinamiento lateral a los estribos, como se muestra en las partes (*b*) y (*c*) de la figura 15.5, los ganchos a 90° pueden ser adecuados para las varillas superiores.

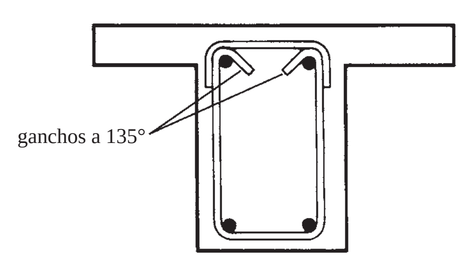
Cuando deben usarse vigas de almas anchas (digamos, mayores de 2 pies), suelen emplearse estribos de ramas múltiples. En tales casos, las ramas exteriores de los estribos se deben diseñar por cortante y torsión, mientras que las ramas interiores se diseñan sólo por cortante vertical.



a) Sin concreto de confinamiento en ninguno de los dos lados; ganchos a 135° necesarios en ambos extremos de la varilla superior.



b) Confinamiento lateral proporcionado por la losa en el lado derecho; gancho a 90° permitido en ese lado para la varilla superior.



c) Confinamiento lateral proporcionado en ambos lados por la losa de concreto; ganchos a 90° permitidos en ambos extremos de la varilla superior.

Figura 15.5 Refuerzo de torsión recomendado.

La resistencia de los estribos cerrados no se puede desarrollar, a menos que se proporcione un refuerzo longitudinal adicional. Las varillas longitudinales deben espaciarse uniformemente alrededor de la parte interna de los estribos, a no más de 12 pulgadas una de otra. Debe colocarse por lo menos una varilla en cada esquina de los estribos para proporcionar anclaje a las ramas de éstos (código 11.6.6.2); de otra manera, si el concreto en las esquinas se aplastase, los estribos se deslizarían y el resultado sería la formación de grietas torsionales aun mayores. Estas varillas longitudinales deben tener diámetros de al menos igual a 0.042 veces el espaciamiento de los estribos. Su tamaño no debe ser menor al del #3.

15.3 MOMENTOS TORSIONALES QUE SE HAN DE CONSIDERAR EN EL DISEÑO

El lector habrá aprendido en sus estudios de análisis estructural que si una parte de una estructura estáticamente indeterminada "cede" cuando se aplica una fuerza particular a esa parte, la magnitud de la fuerza que esa parte tendrá que resistir se reducirá apreciablemente. Por ejemplo, si tres hombres cargan un tronco sobre sus hombros (situación estáticamente indeterminada) y uno de ellos baja un poco su hombro bajo la carga, ocurrirá una importante redistribución de las fuerzas internas en la "estructura" y este hombre tendrá que soportar una carga mucho menor. Por otra parte, si dos hombres cargan un tronco sobre sus hombros (situación estáticamente determinada) y uno de ellos baja ligeramente su hombro, no habrá ningún cambio o casi ninguno en la distribución de fuerzas en la estructura. Éstos son casos similares a los que ocurren en las estructuras estáticamente determinadas e indeterminadas sometidas a momentos de torsión. Estas acciones se denominan *torsión de equilibro* y *torsión de compatibilidad*, respectivamente.

1. *Torsión de equilibrio*. En una estructura estáticamente determinada hay sólo una trayectoria a lo largo de la cual un momento de torsión se puede trasmitir a los soportes. Este tipo de momento de torsión, que se denomina *torsión de equilibrio* o *torsión estáticamente determinada*, no puede reducirse por medio de una redistribución de fuerzas internas o por un giro del miembro. La torsión de equilibrio se muestra en la figura 15.6, que muestra una viga de borde que soporta un techo de concreto. La viga de borde debe diseñarse para resistir el momento de torsión total calculado.
2. *Torsión de compatibilidad*. El momento de torsión en una región dada de una estructura estáticamente indeterminada se puede reducir considerablemente si esa parte de la estructura se agrieta bajo la torsión y "cede" o gira. El resultado será una redistribución de fuerzas en la estructura.

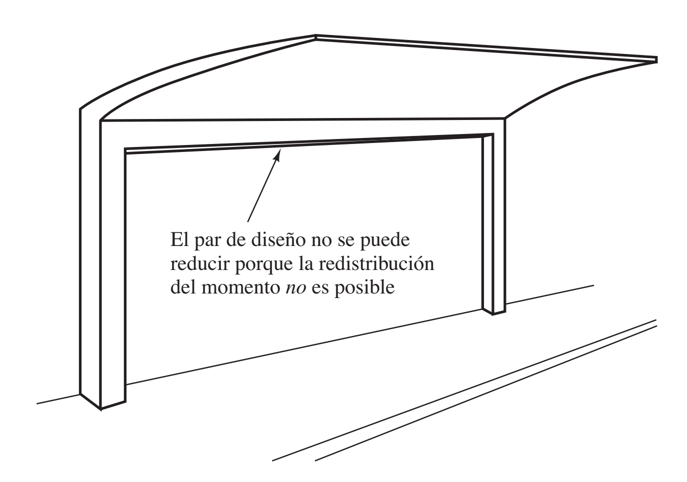


Figura 15.6 Torsión de equilibrio.

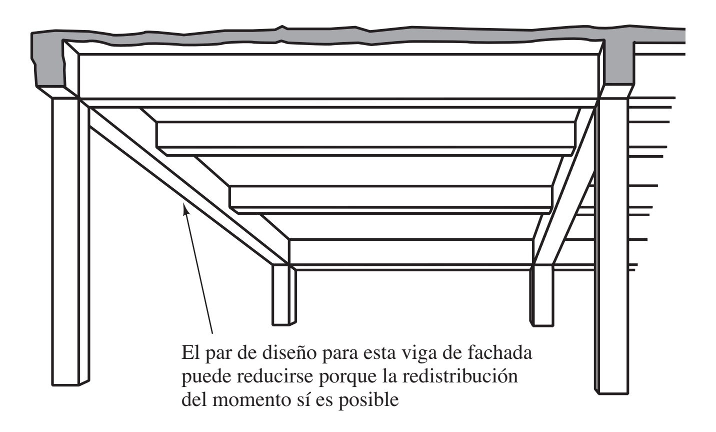


Figura 15.7 Torsión de compatibilidad.

A este tipo de torsión, que se ilustra en la figura 15.7, se le llama *torsión estáticamente indeterminada* o *torsión de compatibilidad*, en el sentido de que parte de la estructura bajo consideración se tuerce para mantener las deformaciones de la estructura compatibles.

En donde es posible una redistribución o reducción de la torsión en una estructura estáticamente indeterminada, el momento máximo factorizado T_u se puede reducir como sigue en los miembros no presforzados, de acuerdo con la sección 11.6.2.2 del ACI. En la expresión que sigue, A_{cp} es el área encerrada por el perímetro exterior de la sección transversal de concreto y P_{cp} es el perímetro exterior de esa sección transversal. Se supone que el agrietamiento torsional ocurrirá cuando el esfuerzo principal de tensión alcance la resistencia por tensión del concreto en compresión-tensión biaxial. Este valor de agrietamiento se toma igual a $4\lambda\sqrt{f'_c}$ y por tanto, el par de torsión de agrietamiento, T_{cr}, es

$$T_{cr} = \phi 4\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}}\right)$$

Si los miembros de concreto reforzado están sujetos a fuerzas axiales de tensión o de compresión, T_{cr} debe calcularse con la siguiente expresión en la cual N_u es la fuerza axial factorizada tomada como positiva si la fuerza es de compresión y negativa si es de tensión.

$$T_{cr} = \phi 4\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}}\right)\lambda\sqrt{1+\frac{N_u}{4\sqrt{f'_c}}}$$

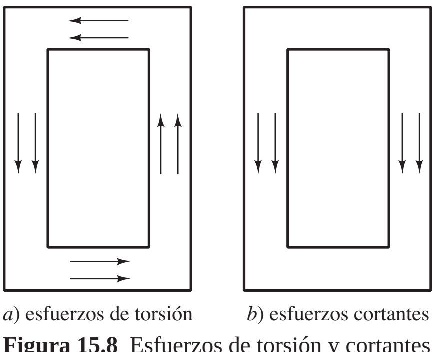
Después de que ocurre el agrietamiento, los momentos de torsión en la viga de fachada mostrada en la figura 15.7 se reducen, como resultado de la redistribución de las fuerzas internas. En consecuencia, el momento de torsión usado para diseño en la viga de fachada puede reducirse.

15.4 ESFUERZOS DE TORSIÓN

Como ya se mencionó, los esfuerzos de torsión se suman a los esfuerzos cortantes en un lado de un miembro y se restan en el otro lado. Esta situación en una viga hueca está ilustrada en la figura 15.8.

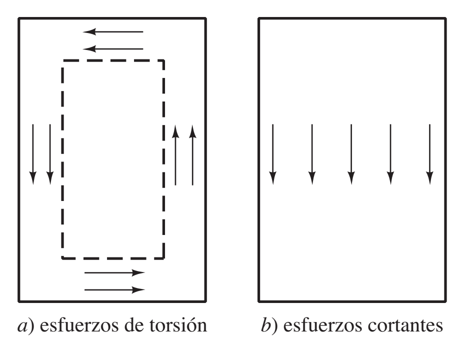
Los esfuerzos de torsión son bastante pequeños cerca del centro de una viga sólida. Debido a esto, se supone que las vigas huecas (suponiendo que los espesores de pared cumplen ciertos requisitos del ACI) tienen casi exactamente las mismas resistencias por torsión que las vigas sólidas con las mismas dimensiones exteriores.

En las secciones sólidas, los esfuerzos cortantes debido a la torsión T_u están concentrados en un “tubo” exterior del miembro, como se muestra en la figura 15.9(*a*), mientras que los esfuerzos cortantes debidos a V_u eran repartidos a través del ancho de la sección sólida, como se muestra en la parte (*b*) de



a) esfuerzos de torsión *b*) esfuerzos cortantes

Figura 15.8 Esfuerzos de torsión y cortantes en una viga hueca.



a) esfuerzos de torsión *b*) esfuerzos cortantes

Figura 15.9 Esfuerzos de torsión y cortantes en una viga sólida.

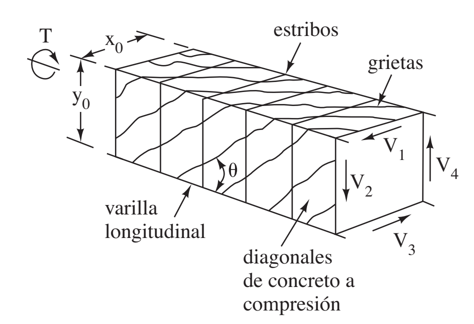


Figura 15.10 Armadura espacial imaginaria.

la figura. En consecuencia, los dos tipos de esfuerzos cortantes (debidos a la fuerza cortante y a la torsión) se combinan usando una expresión de raíz cuadrada que se muestra en la siguiente sección de este capítulo.

Después del agrietamiento, se supone que la resistencia por torsión del concreto es despreciable. Las grietas por torsión tienden a describir espirales alrededor de los miembros (huecos o sólidos) localizados aproximadamente en ángulos de 45° con respecto a los bordes longitudinales de esos miembros. Se supone que la torsión es resistida por una armadura espacial imaginaria situada en el “tubo” exterior de concreto del miembro. Una armadura así se muestra en la figura 15.10. El acero longitudinal en las esquinas del miembro y los estribos transversales cerrados actúan como miembros a tensión en la “armadura”, mientras que el concreto diagonal entre los estribos actúa como puntal a compresión. El concreto agrietado es aun capaz de tomar esfuerzos de compresión.

15.5 CUÁNDO SE REQUIERE REFUERZO DE TORSIÓN SEGÚN EL ACI

El diseño de miembros de concreto reforzado por torsión se basa en la analogía de una armadura tubular espacial de pared delgada, en la cual se desprecia el interior o núcleo resistente del concreto de los miembros. Después de que la torsión ha ocasionado el agrietamiento de un miembro, su resistencia a la torsión es proporcionada casi por completo por los estribos cerrados y el refuerzo longitudinal localizado cerca de la superficie del miembro. Una vez que ocurre el agrietamiento, se supone que el concreto tiene una resistencia despreciable a la torsión. (Éste no es el caso en el diseño por cortante, donde se supone que el concreto toma la misma cantidad de cortante que antes de agrietarse.)

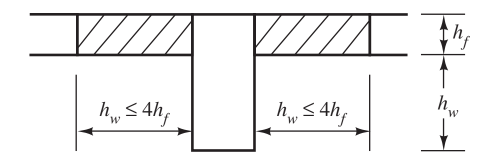


Figura 15.11 Tramos de vigas T monolíticas que pueden usarse en los cálculos de torsión.

Si los esfuerzos de torsión son menores que aproximadamente un cuarto del par de agrietamiento T_{cr} de un miembro, no reducirán apreciablemente sus resistencias por cortante o flexión. Se supone que el agrietamiento por torsión ocurre cuando el esfuerzo principal de tensión alcanza el valor $4\lambda\sqrt{f'_c}$. En la sección 11.6.1 del ACI, se establece que los efectos de torsión pueden despreciarse en miembros no presforzados si

$$T_u < \phi\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}}\right) = \frac{1}{4}T_{cr}$$

Para estructuras estáticamente indeterminadas, donde pueden ocurrir reducciones en los momentos de torsión por la redistribución de las fuerzas internas, la sección 11.6.2.2 del código ACI permite reducir el momento de torsión máximo factorizado, al siguiente valor:

$$\phi 4\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}}\right)$$

En otras palabras, el par aplicado puede limitarse a un momento calculado de agrietamiento del miembro. (Si el par calculado para un miembro es mayor que el valor anterior, éste puede usarse en el diseño). Si los momentos de torsión se reducen como se describió aquí, será necesario redistribuir estos momentos a los miembros adyacentes. El comentario del ACI (R11.5.2.1 y R11.5.2.2) ciertamente dice que cuando la disposición de las estructuras impone rotaciones por torsión considerables dentro de una longitud corta de un miembro (como cuando un par grande está situado cerca de una columna rígida), deberá usarse un análisis más exacto.

Para miembros aislados con patines o sin ellos, A_{cp} es igual al área de las secciones transversales completas (incluida el área de cualquier abertura en los miembros huecos) y p_{cp} representa los perímetros de las secciones transversales completas. Si una viga es colada monolíticamente con una losa, puede suponerse que los valores de A_{cp} y p_{cp} incluyen parte de las losas adyacentes de las secciones T o L resultantes. Los anchos de las losas que pueden incluirse como partes de las vigas se describen en la sección 13.2.4 del ACI y se ilustran en la figura 15.11. Esos anchos o extensiones no deben exceder las proyecciones de las vigas arriba o abajo de la losa ni cuatro veces el espesor de la losa, rigiendo el menor.

Cuando se tiene una torsión considerable, puede resultar más económico seleccionar una viga mayor, de manera que no tenga que usarse un refuerzo de torsión. Una viga así puede resultar más económica que una menor con los estribos cerrados y el acero longitudinal adicional requeridos en el diseño por torsión. En otras ocasiones, tal procedimiento puede no ser económico y algunas veces las consideraciones arquitectónicas pueden dictar el uso de secciones menores.

15.6 RESISTENCIA AL MOMENTO POR TORSIÓN

Las dimensiones de los miembros sometidos a cortante y torsión están limitadas por el código ACI, con el objetivo de reducir el agrietamiento y prevenir el aplastamiento de la superficie del concreto causado por los esfuerzos inclinados de compresión. Esto se logra con las ecuaciones siguientes, en las que las partes de la izquierda representan los esfuerzos cortantes debidos a la fuerza de cortante y a la torsión. La

suma de estos dos esfuerzos en un miembro no debe exceder el esfuerzo que ocasione el agrietamiento por cortante ($8\sqrt{f'_c}$ según R11.6.3 del ACI). En estas expresiones, $V_c = 2\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$ (ecuación 11-3 del ACI). Para secciones sólidas

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi\left(\frac{V_c}{b_w d} + 8\sqrt{f'_c}\right) \qquad \text{(Ecuación 11-18, ACI)}$$

Para secciones huecas

$$\left(\frac{V_u}{b_w d}\right) + \left(\frac{T_u p_h}{1.7A_{oh}^2}\right) \leq \phi\left(\frac{V_c}{b_w d} + 8\sqrt{f'_c}\right) \qquad \text{(Ecuación 11-19, ACI)}$$

Si el espesor de la pared de una sección hueca es menor que A_{oh}/p_h, el segundo término en la ecuación 11-19 del ACI no debe tomarse como $T_u p_h/1.7A_{oh}^2$ sino como $T_u/1.7A_{oh}$, en que t es el espesor de la pared donde se están revisando los esfuerzos (11.5.3.3 del ACI).

Otro requisito que se da en la sección 11.5.4.4 para secciones huecas, es que la distancia de la línea central del refuerzo transversal por torsión a la cara interior de la pared no debe ser menor que $0.5A_{oh}/p_h$. En esta expresión, p_h es el perímetro de la línea central del refuerzo de torsión cerrado más externo, mientras que A_{oh} es el área de la sección transversal del miembro encerrado por esta línea central. Las letras *oh* (siglas de *outside hoop*) significan *aro exterior* (de estribos).

15.7 DISEÑO DEL REFUERZO POR TORSIÓN

La resistencia a la torsión de las vigas de concreto reforzado puede incrementarse considerablemente añadiendo un refuerzo de torsión que consiste en estribos cerrados y varillas longitudinales. Si el momento de torsión factorizado para una viga es mayor que el valor dado en la sección 11.5.1 del ACI $[\phi\lambda\sqrt{f'_c}(A_{cp}^2/P_h)]$, el código proporciona una expresión para calcular el área absoluta mínima de los estribos cerrados transversales que deben usarse.

$$(A_v + 2A_t) = 0.75\sqrt{f'_c}\,\frac{b_w s}{f_{yt}} \geq \frac{50 b_w s}{f_{yt}} \qquad \text{(Ecuación 11-23, ACI)}$$

En esta expresión, A_v es el área de refuerzo requerido por cortante en una distancia s (que representa la distancia entre estribos). Recuerde que en el diseño por cortante, el área A_v que se obtiene es para ambas ramas de un estribo de dos (o para todas las ramas de un estribo de cuatro, etc.). El valor A_t, que representa el área de los estribos necesaria por torsión, es para sólo una rama del estribo. Por tanto, el valor $A_v + 2A_t$ es el área total de ambas ramas del estribo (para estribos de dos ramas) necesario por cortante más torsión. Se considera conveniente usar iguales volúmenes de acero en los estribos y en el acero longitudinal adicional, de manera que ambos participen por igual en la resistencia a los momentos de torsión. Se siguió esta teoría al preparar las ecuaciones ACI que se usan para seleccionar el refuerzo por torsión. El código ACI requiere que el área de los estribos A_t usados para resistir la torsión se calcule con la ecuación que sigue:

$$T_n = \frac{2A_o A_t f_{yt}}{s}\cot\theta \qquad \text{(Ecuación 11-21, ACI)}$$

Generalmente, esta ecuación se escribe en la siguiente forma:

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_n}{2A_o f_{yt}\cot\theta}$$

El refuerzo transversal se basa en la resistencia T_n por momento de torsión, que es igual a T_u/ϕ. El término A_0 representa el área total encerrada por la trayectoria del flujo cortante alrededor del perímetro

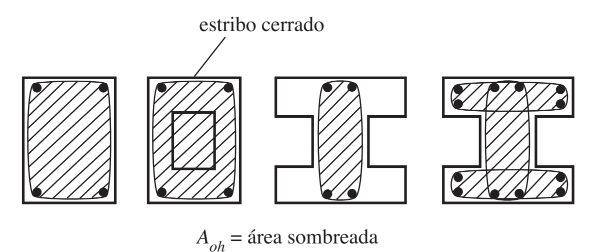


Figura 15.12 Valores de A_{oh}.

del tubo. Esta área se define en términos de A_{oh}, que es el área encerrada por los estribos cerrados más externos. La figura 15.12 ilustra esta definición de A_{oh} para varias secciones transversales de vigas.

El valor de A_0 se puede determinar por análisis o tomarse igual a $0.85A_{oh}$. El término θ representa el ángulo de las "diagonales a compresión" del concreto en la armadura espacial análoga. No debe ser menor que 30° o mayor que 60° y puede tomarse igual a 45°, de acuerdo con la sección 11.5.3.6 del ACI. En la sección 11.5.3.6 del ACI, el valor de θ puede ser de 45° para los miembros no presforzados y esa recomendación la observaremos aquí. En esta misma sección del ACI se sugieren valores de θ para el concreto presforzado.

Según el comentario (R11.5.3.8) del ACI, las áreas requeridas de estribos por cortante y torsión se suman como sigue para un estribo de dos ramas:

$$\text{Total}\left(\frac{A_{v+t}}{s}\right) = \frac{A_v}{s} + \frac{2A_t}{s}$$

La separación del refuerzo transversal de torsión no debe ser mayor que $p_h/8$ o 12 pulgadas, donde p_h es el perímetro de la línea central del refuerzo transversal cerrado más externo (11.5.6.1 del ACI). Recuerde también las separaciones máximas entre estribos por cortante de $\frac{d}{2}$ y $\frac{d}{4}$ y dadas en las secciones 11.4.5.1 y 11.4.5.3 del ACI.

Se ha encontrado que los especímenes de concreto reforzado con menos de aproximadamente 1% de refuerzo por torsión por volumen, cargados a torsión pura, fallan tan pronto como ocurre el agrietamiento por torsión. El porcentaje es menor para miembros sometidos a torsión y a cortante. La ecuación que sigue, que proporciona un área total mínima de refuerzo longitudinal por torsión, se basa en usar aproximadamente 0.5% de refuerzo de torsión por volumen. En esta expresión, A_{cp} es el área encerrada por la sección transversal exterior de concreto. El valor A_t/s no debe tomarse menor que $25b_w/f_{yv}$, de acuerdo con la sección 11.5.5.3 del ACI.

$$A_{\ell\ \text{mín}} = \frac{5\sqrt{f'_c}A_{cp}}{f_y} - \left(\frac{A_t}{s}\right)p_h\frac{f_{yt}}{f_y} \qquad \text{(Ecuación 11-24, ACI)}$$

La sección 11.5.4.3 del ACI establece que el refuerzo longitudinal por torsión debe anclarse en ambos extremos.

La torsión máxima actúa generalmente en los extremos de las vigas y, en consecuencia, las varillas longitudinales de torsión deben anclarse para su resistencia de fluencia en la cara de los soportes. Para hacer esto, puede ser necesario usar ganchos o varillas horizontales en forma de ⊔ con empalmes traslapados con el refuerzo longitudinal de torsión. *Una práctica bastante común consiste en extender el refuerzo del fondo de las vigas de fachada sometidas a torsión, 6 pulgadas hacia dentro de los soportes. Generalmente, esto no es suficiente*

15.8 REQUISITOS ADICIONALES DEL ACI

Antes de presentar ejemplos numéricos de diseño por torsión, es necesario mencionar otros requisitos del ACI. Éstos son:

1. Las secciones localizadas a una distancia menor que d de la cara del soporte, pueden diseñarse para el par de torsión a una distancia d. Sin embargo, si existe un par concentrado dentro de esta distancia, la sección crítica de diseño estará en la cara del soporte (11.5.2.4 del ACI).
2. La resistencia de diseño por fluencia del refuerzo de torsión para miembros no presforzados, no debe ser mayor que 60 000 lb/plg^2. El propósito de este valor máximo es limitar el ancho de las grietas diagonales (11.5.3.4 del ACI).
3. La tensión longitudinal creada por los momentos de torsión es parcialmente compensada en las zonas de compresión por la flexión de los miembros. En estas zonas, el área calculada del refuerzo longitudinal por torsión puede reducirse en una cantidad igual a $M_u/0.9df_y$, de acuerdo con la sección 11.5.3.9 del ACI. En esta expresión, M_u es el momento factorizado que actúa en la sección en combinación con T_u. Sin embargo, el refuerzo proporcionado no debe ser menor que los valores mínimos requeridos en las secciones 11.5.5.3 y 11.5.6.2 del ACI.
4. El refuerzo longitudinal debe distribuirse alrededor del perímetro interior de los estribos cerrados y debe espaciarse a no más de 12 plg. Debe colocarse por lo menos una varilla en cada esquina de los estribos para proporcionar anclaje para las ramas del estribo. Estas varillas deben ser del #3 o mayores en tamaño y deben tener diámetros no menores que 0.042 veces la separación entre los estribos (11.5.6.2 del ACI).
5. El refuerzo de torsión debe proporcionarse para una distancia no menor que $b_t + d$ más allá del punto en que teóricamente ya no se requiere. El término b_t representa el ancho de aquella parte de la sección transversal del miembro que contiene los estribos cerrados de torsión (11.5.6.3 del ACI).

15.9 PROBLEMAS EJEMPLO USANDO UNIDADES COMUNES EN ESTADOS UNIDOS

En esta sección se presenta el diseño del refuerzo de torsión para una viga usando las unidades comunes en Estados Unidos; en la siguiente sección se presenta un ejemplo usando unidades del SI.

EJEMPLO 15.1

Diseñar el refuerzo por torsión necesario para la viga mostrada en la figura 15.13 si $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2, $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2, $T_u = 30$ pie-klb y $V_u = 60$ klb. Suponga 1.5 plg de recubrimiento libre, estribos #4 y una A_s requerida por M_u de 3.52 plg^2. Seleccionar para el refuerzo de flexión varillas del #8. Se especifica concreto de peso normal.

SOLUCIÓN

1. **¿Se necesita refuerzo de torsión?**

A_{cp} = área encerrada por el perímetro exterior de la sección transversal de concreto $= (16)(26) = 416$ plg^2 (la letra c significa concreto y la letra p significa perímetro de la sección transversal)

p_{cp} = perímetro exterior de la sección transversal $= (2)(16 + 26) = 84$ plg

La torsión T_u puede despreciarse si es menor que

$$\phi\lambda\sqrt{f'_c}\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} = (0.75)(1.0)(\sqrt{4\ 000})\left(\frac{416^2}{84}\right)$$
$$= 97\ 723 \text{ plg-lb} = 97.72 \text{ plg-klb} < 30 \times 12 = 360 \text{ plg-klb}$$

$\therefore$ Se requiere refuerzo por torsión

Observe que x_1 y y_1 van del c. g. del estribo en un borde al c. g. del estribo en el otro borde

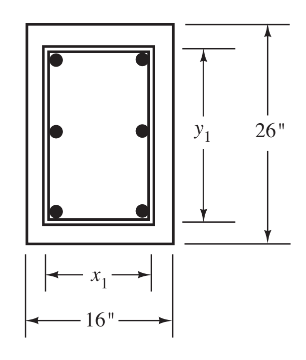


Figura 15.13

2. Cálculo de las propiedades de sección

$$A_{oh} = \text{área encerrada por la línea central de los estribos cerrados más externos}$$

Considerando 1.5 plg de recubrimiento libre y estribos #4

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 16 - (2)(1.5 + 0.25) = 12.5 \text{ plg} \\ y_1 &= 26 - (2)(1.5 + 0.25) = 22.5 \text{ plg} \end{aligned}\right\} \text{Véase la figura 15.13}$$

$$\begin{aligned} A_{oh} &= (12.5)(22.5) = 281.25 \text{ plg}^2 \\ A_o &= \text{área total encerrada por la trayectoria del flujo cortante} \\ &= 0.85A_{oh} \text{ de la sección 11.5.3.6 del ACI} \\ &= \ 0.85)(281.25) = 239.06 \text{ plg}^2 \\ d &= \text{peralte efectivo de la viga} \\ &= 26 - 1.50 - 0.50 - \frac{1.00}{2} = 23.50 \text{ plg} \\ p_h &= \text{perímetro de la línea central del refuerzo por torsión cerrado más externo} \\ &= (2)(x_1 + y_1) \\ &= (2)(12.5 + 22.5) = 70 \text{ plg} \end{aligned}$$

3. ¿Es la sección de concreto suficientemente grande como para soportar la torsión?

$$\begin{aligned} V_c &= \text{resistencia nominal al cortante de la sección de concreto} \\ &= 2\lambda\sqrt{f'_c}b_w d = (2)(1.0)(\sqrt{4\,000})(16)(23.50) = 47\,561 \text{ lb} \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación 11-18 del ACI

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi\left(\frac{V_c}{b_w d} + 8\sqrt{f'_c}\right)$$

$$\sqrt{\left(\frac{60\,000}{16 \times 23.50}\right)^2 + \left(\frac{360\,000 \times 70}{1.7 \times 281.25^2}\right)^2} \leq 0.75\left(\frac{47\,561}{16 \times 23.50} + 8\sqrt{4\,000}\right)$$

$$246 \text{ lb/plg}^2 < 474 \text{ lb/plg}^2$$

$\therefore$ La sección es suficientemente grande

4. Determinación del refuerzo transversal requerido por torsión

$$T_n = \frac{T_u}{\phi} = \frac{30}{0.75} = 40 \text{ pie-klb} = 480\,000 \text{ plg-lb}$$

Suponiendo $\theta = 45°$ de acuerdo con la sección 11.5.3.6(a) del ACI.

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_n}{2A_o f_{yt} \cot\theta} = \frac{480\ 000}{(2)(239.06)(60\ 000)(\cot 45°)}$$
$$= 0.0167 \text{ plg}^2/\text{plg para una rama de los estribos}$$

5. Cálculo del área de refuerzo requerido por cortante

$$V_u = 60\ 000 \text{ lbs} > \frac{1}{2}\phi V_c = \left(\frac{1}{2}\right)(0.75)(47\ 561) = 17\ 835 \text{ lbs}$$

$\therefore$ Se requiere refuerzo por cortante

$$V_s = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi} = \frac{60\ 000 - (0.75)(1.0)(47\ 561)}{0.75} = 32\ 439 \text{ lbs}$$

Aplicando la ecuación 11-15 del ACI

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_{yt} d} = \frac{32\ 439}{(60\ 000)(23.50)}$$
$$= 0.0230 \text{ plg}^2/\text{plg para 2 ramas de estribo}$$

6. Selección de los estribos

$$\text{Refuerzo total en el alma requerido para 2 ramas} = \frac{A_{v+t}}{s}$$
$$= \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} = (2)(0.0167) + 0.0230$$
$$= 0.0564 \text{ plg}^2/\text{plg para 2 ramas}$$

Si usamos estribos #4

$$s = \frac{(2)(0.20)}{0.0564} = 7.09 \text{ plg entre centros}$$ Digamos 7 plg

Separación máxima permisible entre estribos

$$\text{de la sección 11.5.6.1 del ACI} = \frac{p_h}{8} = \frac{70}{8} = \text{Digamos 8.75 plg o 12 plg}$$

Área mínima de estribos A_v según la sección 11-23 del ACI

$$A_v + 2A_t = 0.75\sqrt{f'_c}\frac{b_w s}{f_{yt}} < \frac{50 b_w s}{f_y} = \frac{(50)(16)(7)}{60\ 000} = 0.0933 \text{ plg}$$
$$= 0.75\sqrt{4\ 000}\frac{(16)(7)}{60\ 000} = 0.089 \text{ plg}^2$$
$$< (2)(0.20) = 0.40 \text{ plg}$$ OK

Usamos estribos #4 @ 7 plg

7. Selección del refuerzo longitudinal por torsión

Refuerzo longitudinal adicional requerido por torsión

$$A_\ell = \frac{A_t}{s} p_h \left(\frac{f_{yt}}{f_y}\right)\cot^2\theta$$ (Ecuación 11-22, ACI)

$$= (0.0167)(70)\left(\frac{60\ 000}{60\ 000}\right)(1.00)^2 = 1.17 \text{ plg}^2$$

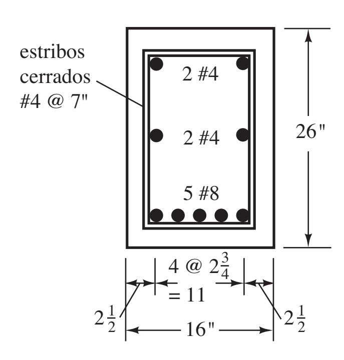


Figura 15.14 Refuerzo seleccionado para la viga del ejemplo 15.1.

$$A_\ell \text{ mín} = \frac{5\sqrt{f'_c}A_{cp}}{f_y} - \left(\frac{A_t}{s}\right)p_h\frac{f_{yt}}{f_y} \qquad \text{(Ecuación 11-24, ACI)}$$

$$\left[\text{con mín } \frac{A_t}{s} = \frac{25b_w}{f_{yv}} = \frac{(25)(16)}{60\,000} = 0.00667\right]$$

$$= \frac{(5\sqrt{4\,000})(416)}{60\,000} - (0.0167)(70)\left(\frac{60\,000}{60\,000}\right)$$

$$= 1.02 \text{ plg}^2 < 1.17 \text{ plg}^2 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Este acero longitudinal adicional se reparte en tres lechos en las cuatro esquinas internas de los estribos y verticalmente entre ellos, con una separación no mayor de 12 plg.

Se suponen un tercio en la parte superior $= 1.17/3 = 0.39$ plg^2, $0.39 + 3.52 = 3.91$ plg^2 en la parte inferior y el resto 0.39 plg^2 en medio.

Usamos dos varillas #4 (0.40 plg^2) en la esquina superior, dos varillas #4 en medio y cinco varillas #8 (3.93 plg^2) en la parte inferior, como se muestra en la figura 15.14.

15.10 ECUACIONES PARA EL SI Y EJEMPLO DE PROBLEMA

Las ecuaciones SI necesarias para el diseño de miembros de concreto reforzado, que son diferentes de las necesarias para diseños similares usando unidades comunes en Estados Unidos, se dan a continuación y su uso se ilustra en el ejemplo 15.2.

Los momentos de torsión pueden despreciarse si

$$T_u \leq \frac{\phi\lambda\sqrt{f'_c}}{12}\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \qquad \text{(Sección 11.6.1[}a\text{], ACI)}$$

$$V_c = \frac{\lambda\sqrt{f'_c}}{6}b_w d \qquad \text{(Ecuación 11-3, ACI)}$$

Resistencia máxima por momento de torsión para secciones sólidas

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi\left(\frac{V_c}{b_w d} + \frac{2\sqrt{f'_c}}{3}\right) \qquad \text{(Ecuación 11-18, ACI)}$$

Resistencia máxima por momento de torsión para secciones huecas

$$\frac{V_u}{b_w d} + \frac{T_u p_h}{1.7A_{oh}^2} \leq \phi\left(\frac{V_c}{b_w d} + \frac{2\sqrt{f'_c}}{3}\right) \qquad \text{(Ecuación 11-19, ACI)}$$

La expresión usada para calcular el área requerida de refuerzo torsional necesario para 1 rama de estribo

$$T_n = \frac{2A_oA_tf_{yt}}{s}\cot\theta \qquad \text{(Ecuación 11-21, ACI)}$$

de donde

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_n}{2A_of_{yv}\cot\theta}$$

Área mínima de refuerzo transversal requerido

$$A_v + 2A_t = \frac{1}{16}\sqrt{f'_c}\frac{b_ws}{f_{yt}} \ge \frac{0.33b_ws}{f_{yt}} \qquad \text{(Ecuación 11-23, ACI)}$$

Refuerzo longitudinal adicional requerido por torsión

$$A_\ell = \frac{A_t}{s}p_h\left(\frac{f_{yt}}{f_y}\right)\cot^2\theta \qquad \text{(Ecuación 11-22, ACI)}$$

Área total mínima de refuerzo longitudinal adicional requerido

$$A_{\ell,\text{ mín}} = \frac{5\sqrt{f'_c}A_{cp}}{12f_y} - \frac{A_t}{s}p_h\frac{f_{yt}}{f_y} \qquad \text{(Ecuación 11-24, ACI)}$$

En esta última expresión, el valor de (A_t/s) no debe tomarse menor que $(b_w/6f_{yv})$. Otros requisitos del SI para el diseño del refuerzo por torsión son:

1. Separación máxima permitida para el refuerzo transversal por torsión $= \frac{1}{8}p_h$ o 300 mm o bien $\frac{d}{2}$ o $\frac{d}{4}$ según lo requerido por el diseño por cortante. (11.5.6.1 y 11.4.4 del ACI.)
2. El diámetro de los estribos no debe ser menor que 0.042 veces su separación y no deben usarse estribos más pequeños que #10. (sección 11.5.6.2 del ACI.)
3. Esfuerzos máximos de fluencia f_{yv} o bien $f_{y\ell}$=420 MPa (Sección 11.5.3.4 del ACI)

El ejemplo 15.2 ilustra el diseño del refuerzo por torsión para un miembro usando unidades SI.

EJEMPLO 15.2

Diseñar el refuerzo por torsión para la viga mostrada en la figura 15.15, para la cual $f'_c = 28$ MPa, $f_y = 420$ MPa, $V_u = 190$ kN, $T_u = 30$ kN-m y A_s requerida para M_u es 2 050 mm². Suponer estribos #13 y un recubrimiento libre igual a 40 mm.

SOLUCIÓN **1. ¿Es necesario el refuerzo por torsión?**

$$A_{cp} = (350)(650) = 227\,500 \text{ mm}^2$$

$$p_{cp} = (2)(350 + 650) = 2\,000 \text{ mm}$$

$$\frac{\phi\sqrt{f_c}}{12}\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} = \frac{(0.75)\sqrt{28}}{12}\frac{(227\,500)^2}{2\,000} \qquad \text{[Ecuación 11.5.1}a\text{) del ACI]}$$

$$= 8.558 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm} = 8.56 \text{ kN}\cdot\text{m} < 30 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

∴ Se requiere refuerzo por tensión

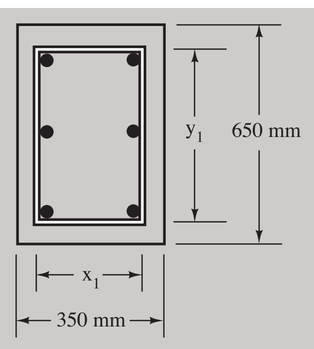


Figura 15.15

2. Cálculo de las propiedades de la sección

Con recubrimiento libre de 40 mm y estribos #13 (diámetro = 12.7 mm)

$$x_1 = 350 - (2)\left(40 + \frac{12.7}{2}\right) = 257.3 \text{ mm}$$

$$y_1 = 650 - (2)\left(40 + \frac{12.7}{2}\right) = 557.3 \text{ mm}$$

$$A_{oh} = (257.3)(557.3) = 143\,393 \text{ mm}^2$$

$$A_o = 0.85A_{oh} = (0.85)(143\,393) = 121\,884 \text{ mm}^2$$

Suponiendo que el refuerzo del fondo consiste en varillas #25 (diámetro = 25.4 mm)

$$d = 650 - 40 - 12.7 - \frac{25.4}{2} = 584.6 \text{ mm}$$

$$p_h = 2(x_1 + y_1) = (2)(257.3 + 557.3) = 1\,629 \text{ mm}$$

3. ¿Es suficientemente grande la sección de concreto como para soportar T_u?

$$V_c = \frac{\lambda\sqrt{f'_c}}{6}b_w d = (1.0)\frac{\sqrt{28}}{6}(350)(584.6) = 180\,449 \text{ N} \qquad \text{(Ecuación 11-3, ACI)}$$

$$= 180.45 \text{ kN}$$

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi\left(\frac{V_c}{b_w d} + \frac{2\sqrt{f'_c}}{3}\right) \qquad \text{(Ecuación 11-18, ACI)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{190 \times 10^3}{350 \times 584.6}\right)^2 + \left(\frac{30 \times 10^6 \times 1\,629}{1.7(143\,393)^2}\right)^2} < 0.75\left(\frac{180.45 \times 10^3}{350 \times 584.6} + \frac{2\sqrt{28}}{3}\right)$$

$$1.678 \text{ N/mm}^2 < 3.307 \text{ N/mm}^2$$

$\therefore$ La sección es suficientemente grande

4. Determinación del refuerzo transversal por torsión requerido

$$T_n = \frac{T_u}{\phi} = \frac{30}{0.75} = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Suponiendo $\theta = 45°$ (de acuerdo con el artículo 11.5.3.6(*a*) del ACI)

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_n}{2A_o f_{yt}\cot\theta} = \frac{40 \times 10^6}{(2)(121\,884)(420)(1.0)} \qquad \text{(Ecuación 11-21, ACI)}$$
$$= 0.391\ \text{mm}^2/\text{mm para 1 rama de estribo}$$

5. Cálculo del área de refuerzo por cortante requerido

$$V_u = 190\ \text{kN} > \frac{1}{2}V_c = \left(\frac{1}{2}\right)(180.45) = 90.22\ \text{kN}$$

∴Se requiere refuerzo por cortante

$$V_s = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi} = \frac{190 - (0.75)(180.45)}{0.75} = 72.88\ \text{kN}$$
$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_y d} = \frac{72.88 \times 10^3}{(420)(584.6)} = 0.297\ \text{mm}^2/\text{mm para 2 ramas de estribo}$$

6. Selección de los estribos

$$\frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} = (2)(0.391) + 0.297 = 1.079\ \text{mm}^2/\text{mm para 1 rama de estribo}$$

Usando estribos del #13 ($A_s = 129$ mm^2)

$$s = \frac{(2)(129)}{1.079} = 239\ \text{mm}$$

Separación máxima permisible de estribos

$$= \frac{p_h}{8} = \frac{1\,629}{8} = 204\ \text{mm}$$

Usar 200 mm

Área mínima de estribo

$$A_v + 2A_t = \frac{1}{16}\sqrt{28}\,\frac{(350)(200)}{420} = 55.11\ \text{mm}^2$$
$$\leq \frac{1}{3}\frac{b_w s}{f_y} = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{(350)(200)}{420} \qquad \text{(Ecuación 11-23, ACI)}$$
$$= 55.56\ \text{mm}^2 < (2)(129) = 258\ \text{mm}^2$$

7. Selección del refuerzo longitudinal por torsión

$$A_1 = \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yt}}{f_y} cot^2\theta = (0.391)(1\,629)\left(\frac{420}{420}\right)(1.0)^2 \qquad \text{(Ecuación 11-22, ACI)}$$
$$= 637\ \text{mm}^2$$

$$\text{Mín}\,A_\ell = \frac{5\sqrt{f'_c}A_{cp}}{12 f_y} - \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yt}}{f_y} \qquad \text{(Ecuación 11-24, ACI)}$$
$$= \frac{(5\sqrt{28})(227\,500)}{(12)(420)} - (0.391)(1\,629)\left(\frac{420}{420}\right)$$
$$= 557\ \text{mm}^2$$

El acero longitudinal adicional debe repartirse en las cuatro esquinas interiores de los estribos y verticalmente entre ellas. Suponga un tercio en la parte superior $= \frac{557}{3} = 186$ mm^2, $186 + 2\,050 = 2\,236$ mm^2 en el fondo y el resto de 186 mm^2 en medio.

Usar dos varillas #13 (258 mm^2) en las esquinas superiores y a la mitad de la altura y cinco varillas #25 (2 550 mm^2) en el fondo.

15.11 EJEMPLO CON COMPUTADORA

EJEMPLO 15.3

Repita el ejemplo 15.1 usando la hoja de cálculo de Excel proporcionada para el capítulo 15

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo de Excel para el capítulo15 y la hoja de trabajo titulada Torsión. Observe que esta hoja tiene unidades estándar de Estados Unidos. Ingrese los valores en todas las celdas sombreadas con amarillo (sombreadas en gris abajo, pero amarillas en la hoja de cálculo). Observe que los resultados son los mismos que los obtenidos en el ejemplo 15.1.

Diseño de cortante y torsión: vigas rectangulares

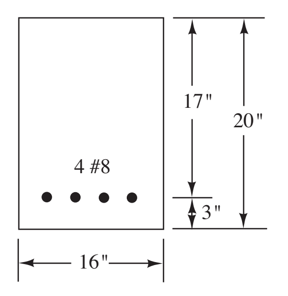
Unidades estándar de Estados Unidos

	V_u =	60	klb				
	T_u =	30	pie-klb				
	N_u =	0	klb				
	f'_c =	4 000	lb/plg^2				
	λ =	1					
	b =	16	plg				
	h =	26	plg				
	recubrimiento =	1.5	plg				
	diámetro del estribo =	0.5	plg				
	A_v =	0.40	plg^2				
	f_{yt} =	60 000	lb/plg^2				
	f_y =	60 000	lb/plg^2				
	ϕ =	0.75					
	A_{cp} =	416.00	plg^2				
	p_{cp}=	84.00	plg				
	Desprecie la torsión si T_u <	97 723	plg-lb =	8.144	pie-klb	< T_u considerar torsión	
	x_1 =	12.50	plg				
	y_1 =	22.50	plg				
	A_{oh} =	281.25	plg^2				
	A_o =	239.06	plg^2				
	d =	23.5	plg				
	p_h =	70.00	plg				
	V_c =	47 561	lb				
	Ec. 11-18 izquierda	246					
	Ec. 11-18 derecha	474	la sección es suficientemente grande				
	A_t/s =	0.0167	plg^2/plg para 2 ramas del estribo				
	$V_u > \phi V_c/2$?	sí, se necesita refuerzo para cortante					
	V_s =	32 439	lb				
	A_v/s =	0.0230	plg^2/plg para 2 ramas del estribo				
	A_{v+t}/s =	0.0565	plg^2/plg para 2 ramas del estribo				
	s =	7.08	plg				
	$s \leq p_h/8$ =	8.75	plg				
	$s \leq 12$ =	12.00	plg				
	s =	7.08	plg				
	Use s =	7.00	plg				
	Ec.11-23 $0.75S_{qrt}(f'_c)bs/f_{yt}$ =	0.089	<A_v – OK				
	A_ℓ=	1.17	plg^2	Seleccione varillas longitudinales adicionales			
	Mín A_ℓ=	1.02	OK				

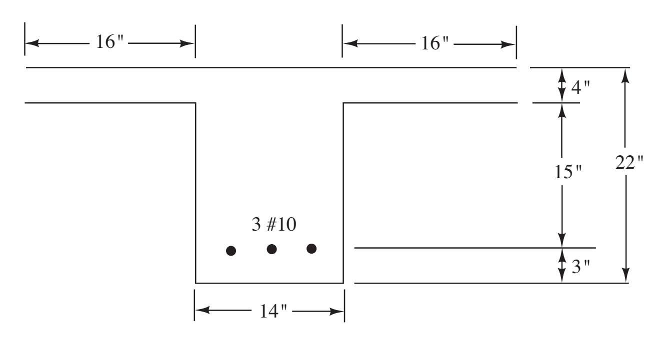
PROBLEMAS

En los problemas 15.1 a 15.3, determine la capacidad de equilibrio por torsión de las secciones si no se usa refuerzo de torsión. f'_c = 4 000 lb/plg^2 y f_y = 60 000 lb/plg^2, concreto de peso normal.

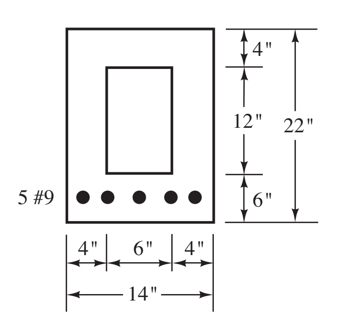
Problema 15.1 (*Resp.:* 5.62 pie-klb.)



Problema 15.2



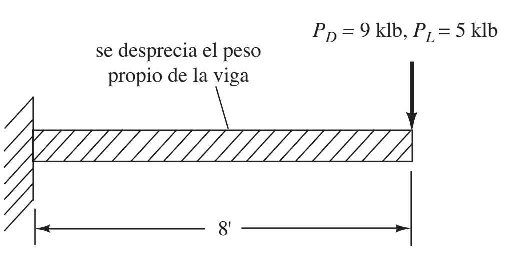
Problema 15.3 (*Resp.:* 5.21 pie-klb.)



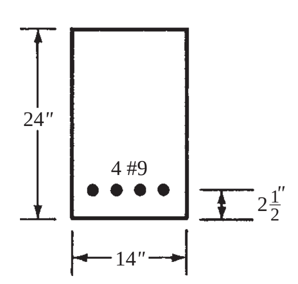
15.4 Repita el problema 15.1 si el ancho se cambia de 16 plg a 12 plg y el peralte de 20 plg a 28 plg.

15.5 Repita el problema 15.3 si f'_c = 3 000 lb/plg^2, concreto ligero con arena. (*Resp.:* 3.83 pie-klb.)

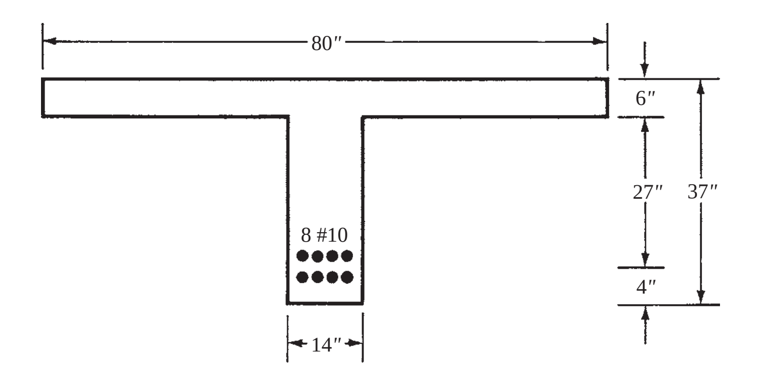
15.6 ¿Cuál es el peralte mínimo teórico total para la viga mostrada si no se usa refuerzo de tensión? La sección transversal no se muestra, pero es rectangular, con b = 20 plg y el peralte debe determinarse. La carga concentrada se localiza en el extremo del voladizo a 8 plg a un lado del ℄ de la viga, f_y = 60 000 lb/plg^2, f'_c = 4 000 lb/plg^2, todo en concreto ligero.



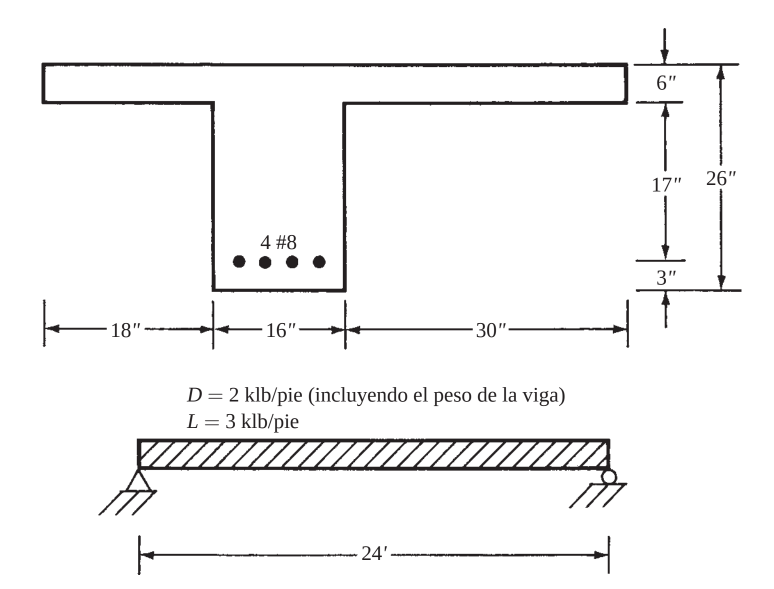
15.7 Si la viga de fachada de concreto reforzado mostrada en la figura acompañante tiene f'_c = 3 000 lb/plg^2 con concreto ligero con arena y f_y = 60 000 lb/plg^2, determine el espaciamiento teórico requerido para estribos #3 a una distancia *d* desde la cara del soporte donde V_u = 32 klb y T_u = 12 pie-klb. Recubrimiento libre = $1\frac{1}{2}$ plg. (*Resp.:* 55.87 pie-klb > 10 pie-klb ∴ se requiere refuerzo por torsión @ 7.74 plg centro a centro.)



15.8 Diseñe el refuerzo de torsión para la viga mostrada en la figura acompañante a una distancia *d* de la cara del apoyo para un momento de torsión de 24 pie-klb, $V_u = 90$ klb, $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2. Recubrimiento libre = 1.50 plg. Use estribos del #4.

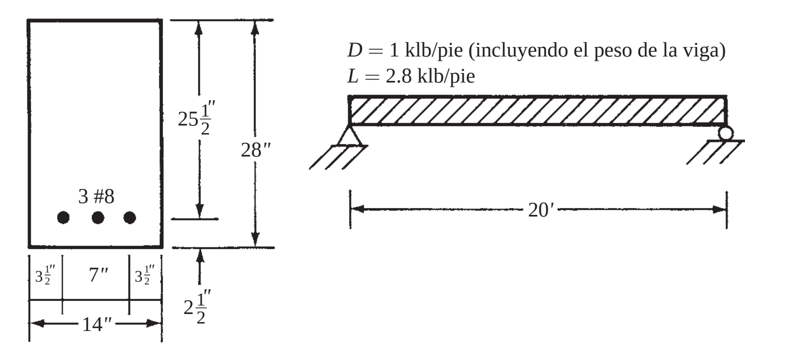


15.9 Determine la separación teórica de estribos cerrados #4 □ a una distancia *d* desde la cara del apoyo para la viga de borde mostrada en la ilustración acompañante si $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2. T_u es igual a 36 pie-klb en la cara del apoyo y se supone que varía a lo largo de la viga proporcionalmente al cortante. Recubrimiento libre = $1\frac{1}{2}$ plg, concreto de peso normal. (*Resp.*: 6.82 plg.)

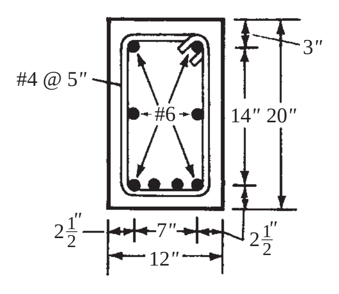


15.10 Una viga de fachada de 12 plg × 22 plg ($d = 19.5$ plg) con un claro simple de 20 pies tiene una losa de 4 plg con 16 plg de ancho a un lado, actuando como patín. Debe soportar una V_u máxima de 60 klb y una T_u máxima de 20 pie-klb en la cara del apoyo. Suponga que estos valores son cero en el ℄ y seleccione estribos #4 si $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2 concreto de peso normal, $f_y = 60\,000$ lb/plg^2 y recubrimiento libre = 1.5 plg.

15.11 Determine la separación teórica de estribos cerrados #4 □ a una distancia *d* desde la cara del apoyo para la viga mostrada si la carga actúa a 6 plg del eje de la viga. Suponga que la torsión es igual a la carga uniforme multiplicada por las 3 plg, $f'_c = 3\,000$ lb/plg², todos son concretos de agregado ligero y $f_y = 60\,000$ lb/plg². Use estribos del #4. Suponga que el valor de la torsión varía desde un máximo en el apoyo a 0 en el centro de la viga, así como el cortante. Suponga un recubrimiento libre de 1.5 plg. (*Resp.:* 8.50 plg.)



15.12 ¿Es adecuada la viga mostrada para resistir un T_u de 15 pie-klb y una V_u de 60 klb si $f'_c = 4\,000$ lb/plg² y $f_y = 60\,000$ lb/plg²? Las varillas mostradas se usan además de las que se proporcionan para el momento de flexión.

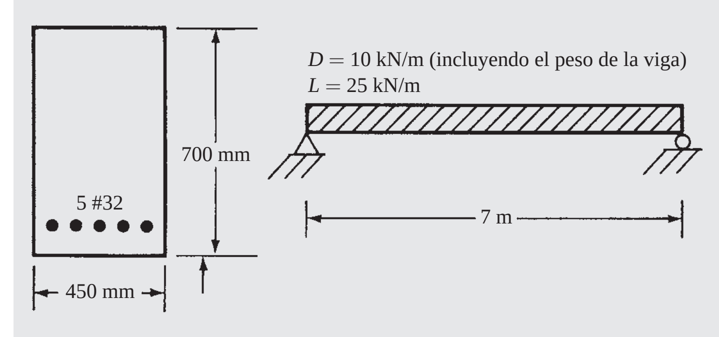


15.13 Usando la hoja de cálculo de Excel para el capítulo 15 determine la separación requerida a una distancia *d* desde el apoyo para el problema 15.7. Use los mismos materiales, pero cambie a agregado totalmente ligero. (*Resp.:* 7.12 plg.)

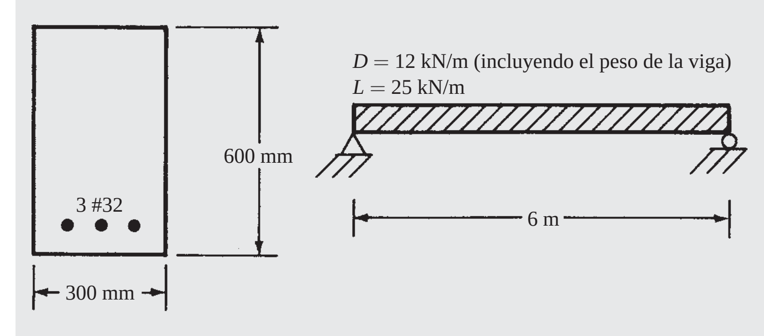
15.14 Repita el problema 15.11 usando estribos cerrados #3, $f'_c = 4\,000$ lb/plg² concreto semiligero y la hoja de cálculo del capítulo 15.

Problemas con unidades del SI

15.15 Determine la separación requerida para los estribos cerrados □ #13 a una distancia *d* desde la cara del apoyo de la viga que se muestra en la figura acompañante, suponiendo que la torsión disminuye de manera uniforme desde el extremo de la viga hasta el ℄. El miembro está sujeto a una carga de servicio muerta de torsión de 34 − kN · m y una carga de servicio viva de torsión de 40 kN × en la cara del apoyo, $f_y = 420$ MPa y $f'_c = 24$ MPa, recubrimiento libre = 40 mm. (*Resp.:* 175 mm.)



15.16 Determine la separación de los estribos a una distancia *d* del apoyo para la viga mostrada, si la carga actúa a 100 mm del eje de la viga. Suponga que la torsión en el apoyo es igual a la carga uniforme multiplicada por 100 mm, $f'_c = 28$ MPa y $f_y = 420$ MPa. Use estribos del #13 y suponga que la torsión y el cortante varían desde un máximo en el apoyo a 0 en el ℄ de la viga. Recubrimiento libre = 40 mm.



16

Losas en dos direcciones, método directo de diseño

16.1 INTRODUCCIÓN

En general, las losas se clasifican como losas en una o en dos direcciones. Las losas cuyas deflexiones ocurren principalmente en una dirección se denominan *losas unidireccionales* [véase la figura 16.1(*a*)]. Las losas en una dirección de claro simple se analizaron en la sección 4.7 de este texto y el diseño de las losas continuas unidireccionales se estudió en la sección 14.7. Cuando las losas están soportadas por columnas dispuestas en hileras, de manera que las losas sufren deflexiones en dos direcciones, se denominan *losas bidireccionales*.

Las losas en dos direcciones pueden reforzarse incorporando vigas entre las columnas, aumentado el espesor de las losas alrededor de las columnas (*ábacos*) y ensanchando las columnas bajo las losas (*capiteles de columna*). Estos casos se muestran en la figura 16.1 y se analizarán en los siguientes párrafos.

Las *placas planas* [figura 16.1(*b*)] son losas sólidas de concreto de espesor uniforme que transfieren las cargas directamente a las columnas sin ayuda de vigas capiteles o ábacos. Las placas planas pueden construirse rápidamente, debido a lo simple de su cimbra y su armado de refuerzo. Requieren las menores alturas totales de piso, para proporcionar un espacio vertical dado y proporcionan la flexibilidad máxima en la disposición de las columnas y las subdivisiones. Casi no obstruyen la entrada de la luz y son de alta resistencia al fuego ya que tienen pocas esquinas agudas donde podría desconcharse el concreto. Las placas planas son probablemente el tipo de losas más usadas actualmente en estructuras de concreto reforzado de varios niveles, como hoteles, moteles, edificios de apartamentos, casas, hospitales y dormitorios.

Las placas planas posiblemente presenten problemas en la transferencia de la fuerza cortante en el perímetro de las columnas. En otras palabras, existe el peligro de que las columnas penetren en las losas. Como resultado, a menudo es necesario aumentar los tamaños de las columnas o de las losas o bien usar *crucetas de cortante*. Las crucetas de cortante consisten en perfiles I o canales de acero colocados en la losa sobre las columnas, como se verá en la sección 16.5 de este capítulo. Si bien este procedimiento puede parecer caro, la cimbra sencilla requerida para las pacas planas compensa ampliamente el costo adicional de las crucetas. Sin embargo, para grandes cargas industriales o claros grandes, se requiere otro tipo de sistema de piso.

Las *losas planas* [figura 16.1(*c*)] incluyen las losas de concreto reforzado en dos direcciones con capiteles, con ábacos o con ambos. Estas losas son muy satisfactorias para cargas pesadas y grandes claros. Aunque la cimbra es más cara que para las placas planas, las losas planas requieren menores cantidades de concreto y refuerzo para las mismas cargas y los mismos claros. Son particularmente económicas para bodegas, estacionamientos y edificios industriales, así como para estructuras similares donde los ábacos o capiteles visibles sean aceptables.

En la figura 16.1(*d*) se muestra una *losa en dos direcciones con vigas*. Este tipo de sistema de piso obviamente se usa donde su costo es menor que el de las losas o placas planas. En otras palabras, cuando las cargas o los claros o ambos son muy grandes, el espesor de la losa y el tamaño de columna requeridos

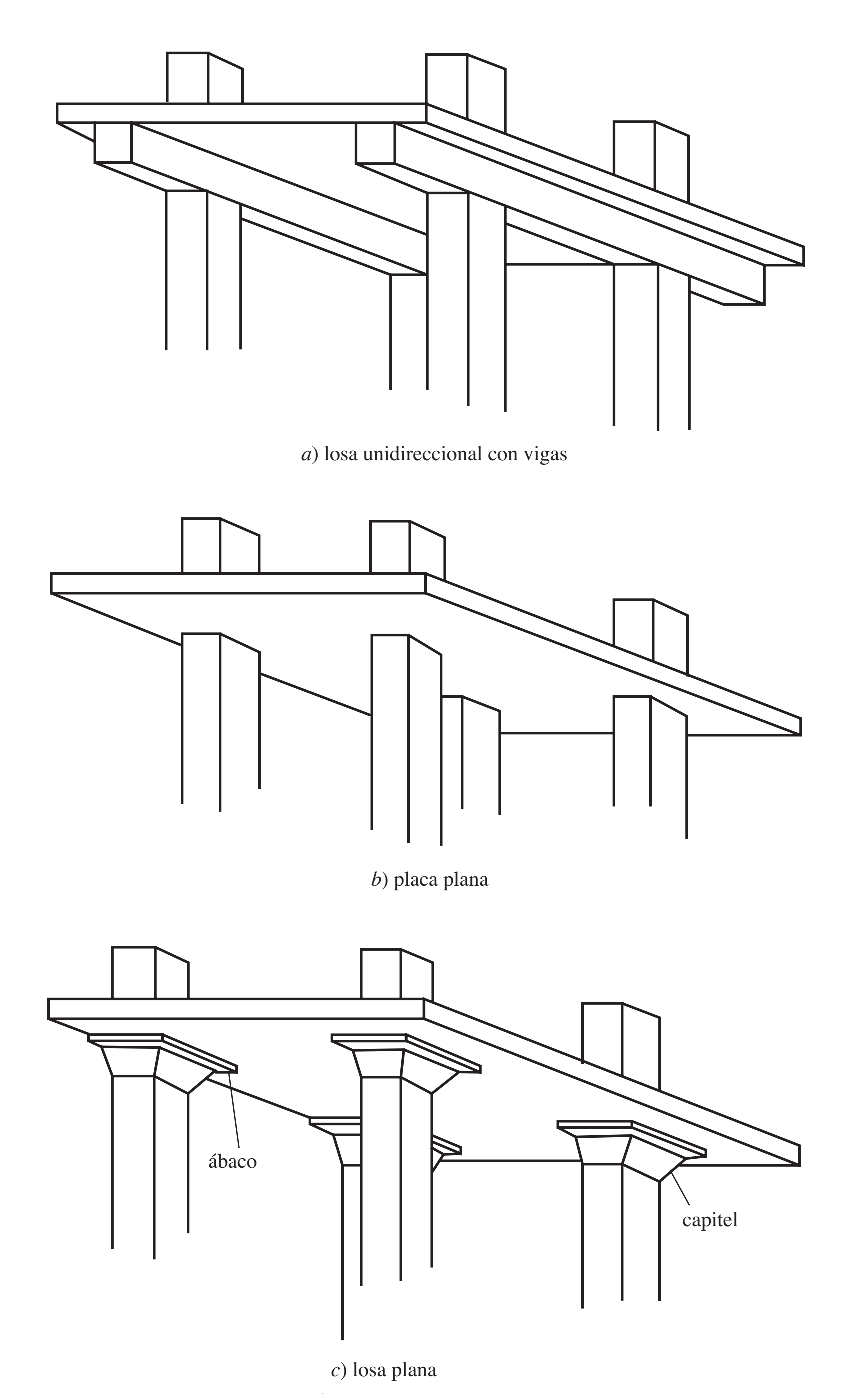
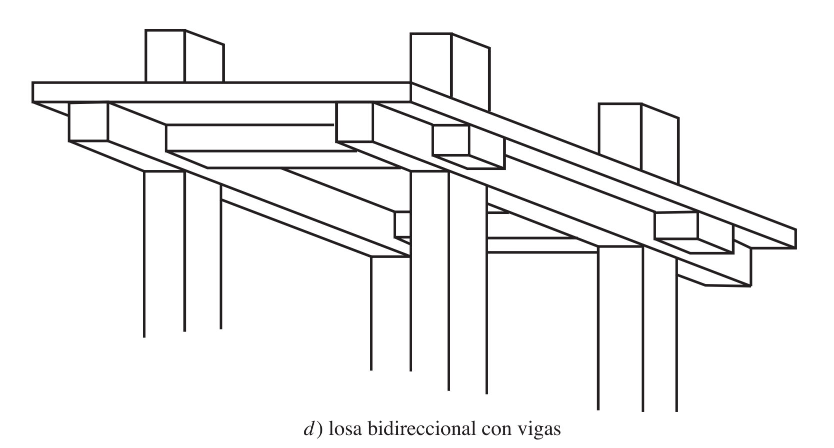


Figura 16.1 Losas. (*Continúa.*)

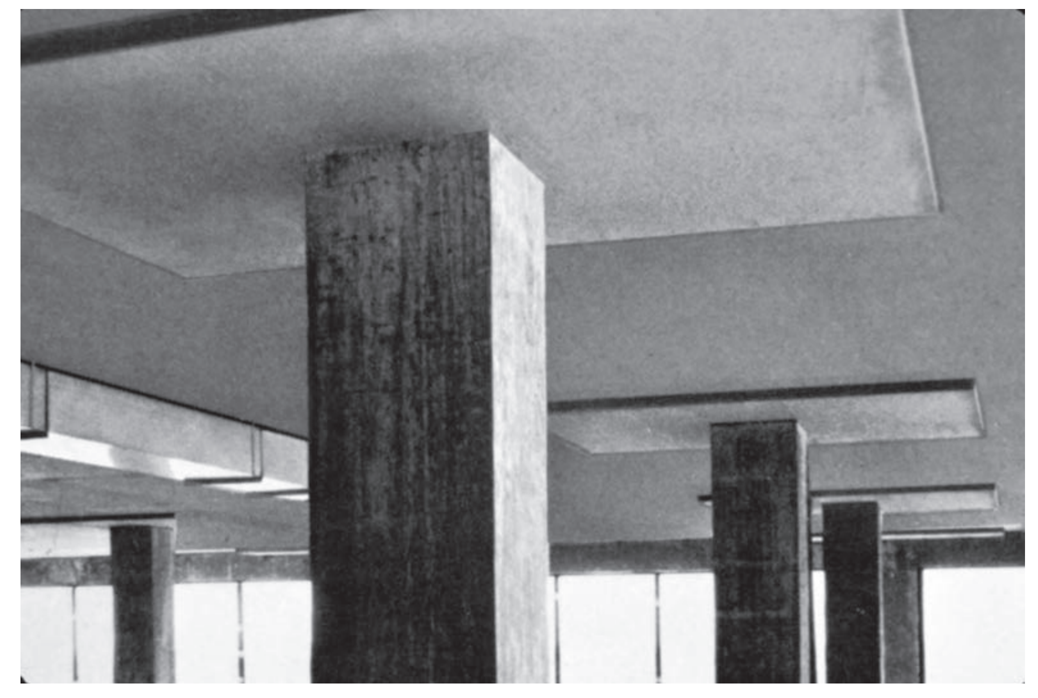


d) losa bidireccional con vigas

Figura 16.1 (*Continuación.*)

para las placas o losas planas son de tal magnitud que es más económico usar losas en dos direcciones con vigas, a pesar del mayor costo de la cimbra.

Otro tipo de sistema de piso es la *losa de casetones*. El piso se construye con base en casetones cuadrados metálicos o de fibra de vidrio y lados ahusados, con espacio entre ellos. Cuando el concreto se coloca sobre y entre los casetones, se obtiene una losa con forma de waffle. Los intervalos o aberturas entre los casetones forman las almas de la viga. Estas almas son bastante profundas y proporcionan grandes brazos de momento para las varillas de refuerzo. En las losas de casetones, el peso del concreto se reduce considerablemente, sin cambiar en forma significativa la resistencia por momento del sistema de piso. Igual que en las losas planas, el cortante puede ser problemático cerca de las columnas. En consecuencia, los pisos de casetones se construyen sólidamente en esas regiones para incrementar la resistencia al corte.



Losa plana con ábacos y sin capiteles en las columnas. (Cortesía de Portland Cement Association.)

16.2 ANÁLISIS DE LOSAS EN DOS DIRECCIONES

Las losas bidireccionales se flexionan bajo las cargas quedando su superficie en forma de plato, de modo que ocurre flexión en las dos direcciones principales. En consecuencia, deben reforzarse en ambas direcciones con lechos de varillas de refuerzo perpendiculares entre sí. Un análisis elástico teórico de tales losas es muy complejo, debido a su naturaleza altamente indeterminada. Se requieren técnicas numéricas tales como el de diferencias finitas o el de elementos finitos, pero estos métodos requieren de software complejo como para ser prácticos para el diseño. Los métodos descritos en este capítulo pueden hacerse a mano o con hojas de cálculo simples y son lo suficientemente exactos para la mayoría de los problemas de diseño.

En realidad, el hecho de que ocurre una gran redistribución de esfuerzos en tales losas bajo grandes cargas hace innecesario el diseño basado en análisis teóricos. En consecuencia, el diseño de losas en dos direcciones se basa generalmente en coeficientes empíricos de momento, los que si bien no predicen exactamente las variaciones de los esfuerzos, conducen al proporcionamiento de losas con factores de seguridad globales satisfactorios. En otras palabras, si se coloca demasiado refuerzo en una parte de la losa y muy poco en alguna otra parte, el comportamiento resultante de la losa probablemente seguirá siendo satisfactorio. *La cantidad total de refuerzo en una losa parece ser más importante que su colocación exacta.*

Debe quedar claro que aunque este capítulo y el siguiente se dedican al diseño de losas en dos direcciones, con base en métodos aproximados de análisis, no se pretende impedir que el proyectista use métodos más exactos. Puede diseñar las losas con base en soluciones numéricas, en análisis de líneas de fluencia o en otros métodos teóricos, siempre que se demuestre claramente que se cumplen todos los criterios necesarios de seguridad y servicio requeridos por el código ACI.

Aunque ha sido la costumbre durante muchos años diseñar con base en análisis aproximados y usar momentos promedio en vez de momentos máximos, las losas en dos direcciones así diseñadas han mostrado tener un comportamiento muy satisfactorio bajo las cargas de servicio. Más aún, han demostrado tener una apreciable capacidad de sobrecarga.

16.3 DISEÑO DE LOSAS EN DOS DIRECCIONES SEGÚN EL CÓDIGO ACI

El código ACI (13.5.1.1) especifica dos métodos para diseñar losas en dos direcciones para cargas de gravedad. Éstos son el método de diseño directo y el método del marco equivalente.

Método de diseño directo

El código (13.6) da un procedimiento con el cual puede determinarse un conjunto de coeficientes de momento. En efecto, el método consiste en un análisis por distribución de momentos de un solo ciclo de la estructura con base en *a*) las rigideces por flexión estimadas de las losas, vigas (si existen) y columnas y *b*) las rigideces por torsión de las losas y vigas (si existen) transversales a la dirección en que los momentos por flexión están siendo determinados. Algunos tipos de coeficientes de momentos se han usado satisfactoriamente por muchos años en el diseño de losas. Sin embargo, no conducen a resultados satisfactorios en losas con dimensiones y patrones de carga asimétricos.

Método del marco equivalente

En este método, una porción de la estructura se considera aislada, como se muestra en la figura 16.2 y se analiza de manera parecida a como se trató el marco del edificio del ejemplo 14.2. En este método se usan las mismas rigideces que se usaron en el método directo de diseño. El método del marco equivalente, que es muy satisfactorio para marcos simétricos, así como para estructuras de dimensiones o cargas no comunes, se presenta en el capítulo 17 de este libro.

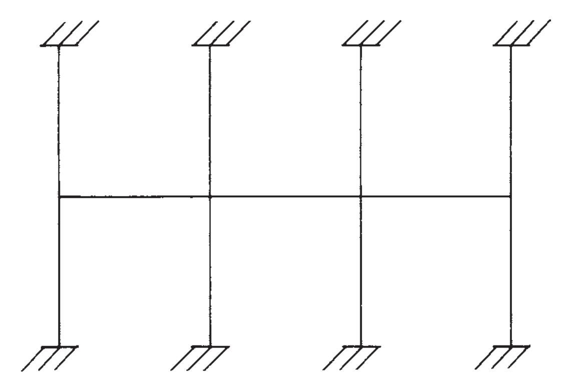


Figura 16.2 Método del marco equivalente.

Diseño para cargas laterales

El código ACI permite una considerable libertad para que el proyectista modele los sistemas de losas en dos direcciones para cargas laterales. El método debe satisfacer el equilibrio y la compatibilidad geométrica y debe concordar razonablemente con los datos de prueba. Los efectos de agrietamiento y los parámetros tales como la relación de alargamiento de la losa y la relación de las dimensiones de claro de columna a losa deben considerarse[1] (sección R13.5.1.2 del ACI).

16.4 FRANJAS DE COLUMNA Y FRANJA CENTRAL

Después de que los momentos de diseño se han determinado por el método de diseño directo o por el método del marco equivalente, se distribuyen a través de cada tablero. Los tableros se dividen en franjas de columna y franja central, como se muestra en la figura 16.3 y se estiman en cada franja los momentos positivos y negativos. La *franja de columna* es una losa con un ancho a cada lado del eje de la columna

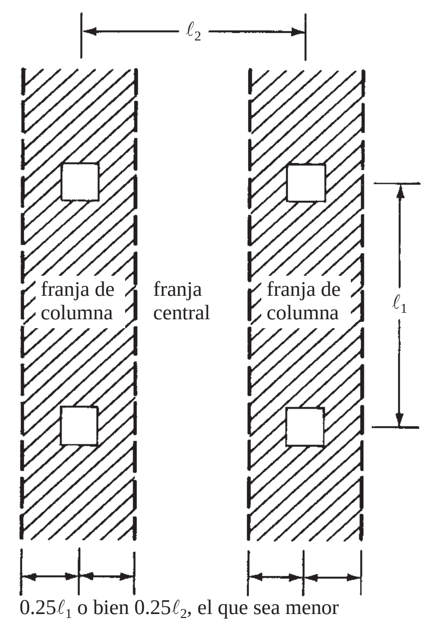
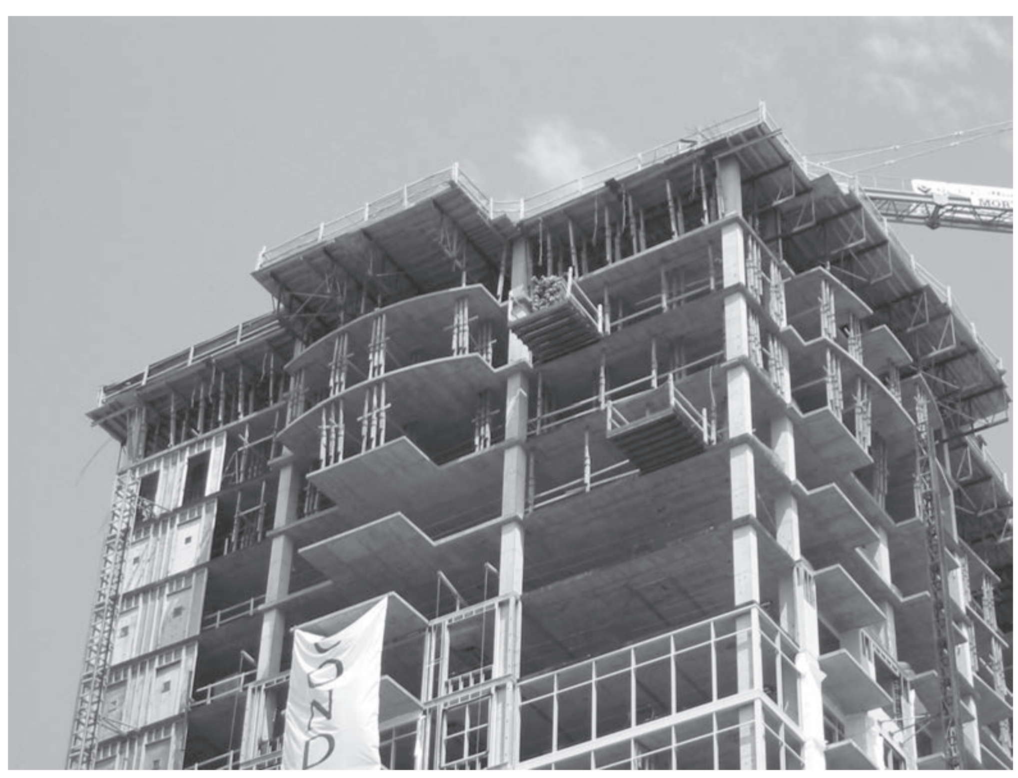


Figura 16.3 Franjas de columna y central.

[1]Varderbilt, M.D. y Corley, W.G., 1983 “Frame Analysis of Concrete Buildings”, *Concrete International: Design and Construction*, V. 5, No. 12, Dic. 1983, págs. 33-43.



Construcción con placa plana: Condominios Pharr Road, Atlanta, GA. (Cortesía del Prof. Larry Kahn, Georgia Institute of Technology.)

igual a $\frac{1}{4}$ de la menor dimensión del tablero, ℓ_1 o ℓ_2. Incluye vigas si éstas existen. La franja central es la parte de la losa entre las dos franjas de columna.

Puede suponerse que la parte de los momentos asignada a las franjas de columna y a la franja central, está uniformemente repartida sobre las franjas. Como se describirá posteriormente en este capítulo, el porcentaje del momento asignado a una franja de columna depende de la rigidez efectiva de esa franja y de la *relación de alargamiento* ℓ_2/ℓ_1 (donde ℓ_1 es la longitud del claro, centro a centro, de los soportes en la dirección en que se están determinando los momentos y ℓ_2 es la longitud del claro, centro a centro, de los soportes en la dirección transversal a ℓ_1). Observe que la figura 16.3 muestra las franjas de columna y franja central solamente en una dirección. Debe realizarse un análisis similar en la dirección perpendicular. El análisis resultante conducirá a los momentos en ambas direcciones.

16.5 RESISTENCIA AL CORTANTE DE LOSAS

En las losas en dos direcciones soportadas por vigas o muros, las fuerzas cortantes se calculan a una distancia d de las caras de los muros o vigas. El valor de ϕV_c es, como en el caso de vigas, $\phi 2\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$. Generalmente, la fuerza cortante no es un problema en este tipo de losas.

En losas y placas planas soportadas directamente por columnas, la fuerza cortante puede ser un factor crítico en el diseño. En casi todas las pruebas de tales estructuras, las fallas se han debido al cortante o tal vez al cortante con torsión. Estas condiciones son especialmente serias alrededor de las columnas externas.

Hay dos tipos de cortante que deben considerarse en el diseño de losas y placas planas. Tales son los mismos dos tipos que se consideraron en las zapatas de columnas: el cortante directo (en un sentido) y

el cortante por penetración (en dos sentidos). Para el análisis del cortante directo, se considera que la losa actúa como una viga ancha entre los apoyos. Las secciones críticas se toman a una distancia d de la cara de la columna o de su capitel. Para el cortante por penetración, la sección crítica se toma a una distancia $d/2$ de la cara de la columna, capitel o ábaco y la resistencia por cortante, igual que en las zapatas, es $\phi 4\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$.

Si los esfuerzos cortantes son demasiado grandes alrededor de las columnas interiores, es posible incrementar la resistencia por cortante de las losas tanto como 75%, usando crucetas de cortante. Una cruceta de cortante, como se define en la sección 11.11.4 del código, consiste en cuatro vigas I o canales, armadas en cruz y colocadas en las losas, como se muestra en la figura 16.4(a). El código establece que el diseño de crucetas de este tipo no es aplicable en columnas exteriores. Por tanto, se requieren diseños especiales y el código no proporciona requisitos específicos. Las crucetas de cortante incrementan la b_o efectiva para el cortante por penetración y también aumentan la resistencia por momento negativo de la losa, como se describe en el código (11.11.4.9). Las varillas de refuerzo por momento negativo en la losa, generalmente se colocan sobre la parte superior de los perfiles de acero, mientras que el refuerzo positivo normalmente se corta al llegar a los perfiles.

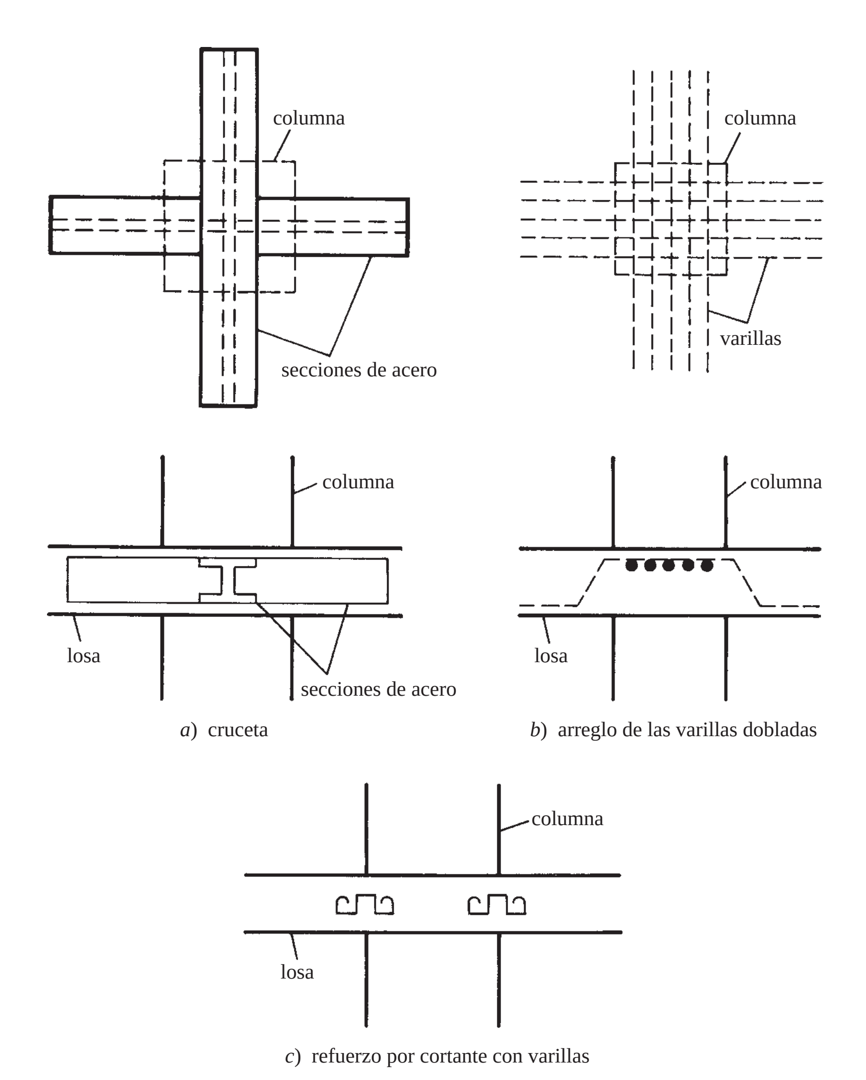


Figura 16.4 Refuerzo por cortante en losas y columnas.

Otro tipo de refuerzo por cortante en losas permitido por el código (11.11.3) implica el uso de grupos de varillas dobladas o alambres. Una posible disposición de tales varillas se muestra en la figura 16.4(*b*). Las varillas se doblan a 45° a través de las grietas potenciales de tensión diagonal y se tienden a lo largo del fondo de las losas, en las distancias necesarias para que desarrollen plenamente su resistencia. Otro tipo de disposición de varillas que podría usarse se tiene en la figura 16.4(*c*). Cuando se usan varillas (o alambres) como refuerzo de cortante, el código (11.11.3.2) establece que la resistencia nominal a cortante por penetración permitida en la sección crítica a una distancia $d/2$ de la cara de la columna, puede incrementarse de $4\sqrt{f_c'}b_od$ a $6\sqrt{f_c'}b_od$.

La principal ventaja de las crucetas de cortante es que alejan de las columnas las secciones críticas por cortante, dando así un mayor perímetro para resistir el cortante, como se ilustra en la figura 16.5. En esta figura, ℓ_v es la longitud del brazo de la cruceta desde el centroide de la carga concentrada o reacción y c_1 es la dimensión de la columna rectangular o columna rectangular equivalente o capitel o ménsula medida en la dirección en que los momentos están siendo considerados. El código (11.11.4.7) establece que la sección crítica por cortante debe cruzar el brazo de la cruceta a una distancia igual a $\frac{3}{4}[\ell_v - (c_1/2)]$ de la cara de la columna, como se muestra en la figura 16.5(*b*). Aunque esta sección crítica debe localizarse de manera que su perímetro sea mínimo, no debe localizarse más cerca de la cara de la columna orillas de capiteles o de ábacos, que $d/2$, en ningún punto. Cuando se proporciona un refuerzo con crucetas de

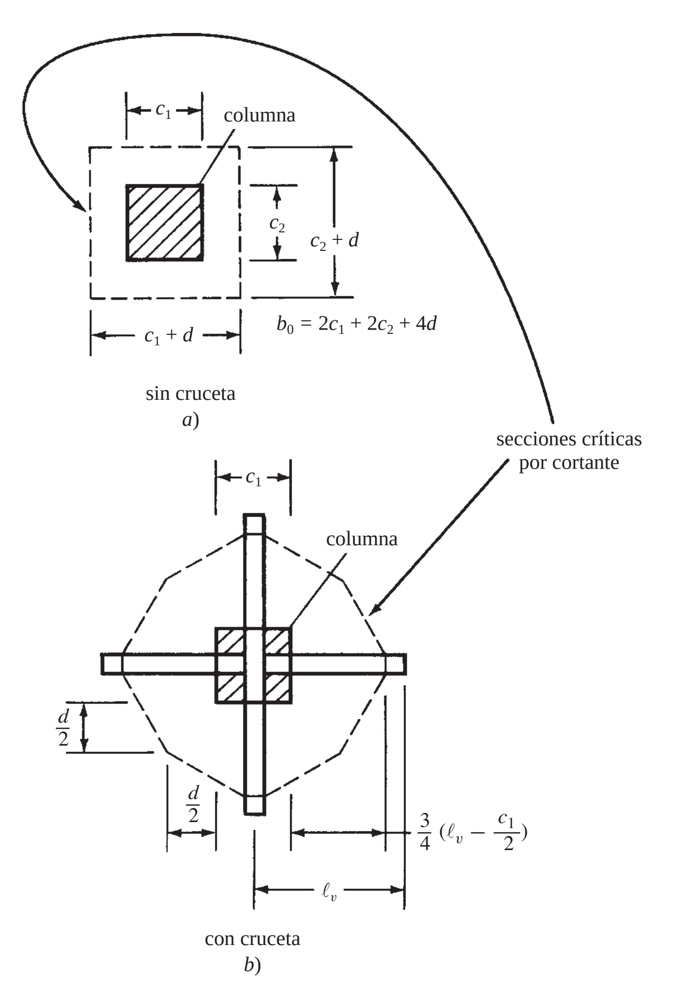


Figura 16.5 Secciones críticas por cortante.

cortante con varillas de refuerzo o perfiles de acero I o canales, la resistencia máxima a cortante puede incrementarse a $7\sqrt{f'_c}b_o d$ a una distancia $d/2$ de la columna. De acuerdo con el código (11.11.4.8), esto sólo se permite si el esfuerzo máximo calculado no excede $4\sqrt{f'_c}b_o d$ a lo largo de la sección crítica por cortante punteada de la figura 16.5(*b*).

En la sección 16.12 el tema de los esfuerzos cortantes se sigue tratando mediante la consideración de la transferencia de momentos y fuerzas cortantes entre losas y columnas. La carga máxima que una losa en dos direcciones puede soportar, suele depender de esta resistencia por transferencia.

16.6 LIMITACIONES AL ESPESOR Y REQUISITOS DE RIGIDEZ

Es obviamente muy importante que los diversos tableros de una losa bidireccional queden a nivel (es decir, con deflexiones razonablemente pequeñas). Las losas delgadas reforzadas en dos direcciones tienen buena resistencia de momento, pero sus deflexiones son con frecuencia grandes. Por ello, sus espesores son cuidadosamente controlados por el código ACI para limitar estas deflexiones. Esto se logra requiriendo que el proyectista *a*) calcule las deflexiones para que queden dentro de ciertos límites o *b*) que use ciertos espesores mínimos especificados en la sección 9.5.3 del código. Los cálculos de deflexiones para losas en dos direcciones son bastante complicados, por lo que la mayoría de los proyectistas usan los valores de espesores mínimos del ACI, que se presentan en los siguientes párrafos de este capítulo.

Losas sin vigas interiores

Para una losa sin vigas interiores con claro entre sus apoyos y que tiene una relación de su claro largo a su claro corto no mayor de 2.0, el espesor mínimo puede tornarse de la tabla 16.1 de este capítulo [tabla 9.5(*c*)] en el código]. Sin embargo, los valores seleccionados de la tabla no deben ser menores que los siguientes valores (ACI 9.5.3.2):

1. Losas sin ábacos en tableros, 5 plg.
2. Espesores de esas losas con ábacos fuera de los tableros, 4 plg.

Tabla 16.1 Espesores mínimos de losas sin vigas interiores.

	Sin ábacos†			Con ábacos†		
	Tableros exteriores		Tableros interiores	Tableros exteriores		Tableros interiores
Esfuerzo de fluencia, f_y, lb/plg²*	Sin vigas de borde	Con vigas de borde‡		Sin vigas de borde	Con vigas de borde‡	
40 000	$\frac{\ell_n}{33}$§	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{40}$	$\frac{\ell_n}{40}$
60 000	$\frac{\ell_n}{30}$	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{36}$
75 000	$\frac{\ell_n}{28}$	$\frac{\ell_n}{31}$	$\frac{\ell_n}{31}$	$\frac{\ell_n}{31}$	$\frac{\ell_n}{34}$	$\frac{\ell_n}{34}$

*Para valores de esfuerzos de fluencia del acero de refuerzo entre los valores dados en la tabla, el espesor mínimo se determinará por interpolación lineal.

†Los ábacos se definen en las secciones 13.3.7 y 13.2.5 del ACI.

‡Losas con vigas entre columnas a lo largo de bordes exteriores. El valor de α_f para la viga de borde no será menor que 0.8.

§Para construcción en dos direcciones ℓ_n es la longitud del claro libre en la dirección larga, medida cara a cara de los apoyos en las losas sin vigas y cara a cara de las vigas u otros apoyos en otros casos.

En la tabla 16.1 se dan algunos de los valores para losas con tableros deprimidos. Para ser clasificado como tablero deprimido, de acuerdo con las secciones 13.3.7 y 13.2.5 del código, un tablero debe *a*) extenderse horizontalmente en cada dirección desde la línea central del soporte no menos que $\frac{1}{6}$ de la distancia, centro a centro, de los apoyos en esa dirección y *b*) proyectarse verticalmente debajo de la losa una distancia no menor que $\frac{1}{4}$ del espesor de aquélla desde el tablero deprimido. En esta tabla, ℓ_n es la longitud del claro libre en la dirección larga de la construcción en dos direcciones, medida cara a cara de los soportes en losas sin vigas y cara a cara de las vigas o de los otros soportes en otros casos.

Con frecuencia las losas se construyen sin vigas interiores entre columnas, pero con vigas de borde alrededor del perímetro del edificio. Estas vigas son de gran ayuda para hacer rígidas las losas y reducir las deflexiones en los tableros exteriores de la losa. Las rigideces de losas con vigas de borde se expresan como una función de α_f como sigue.

A lo largo de este capítulo la letra α_f se usa para representar la relación de la rigidez a flexión $(E_{cb}I_b)$ de una sección de viga, a la rigidez a flexión de la losa $(E_{cs}I_s)$ cuyo ancho es igual a la distancia entre los ejes de los tableros a cada lado de la viga. Si no se usan vigas, como en las placas planas, α será igual a 0. Para losas con vigas entre columnas a lo largo de los bordes exteriores, α para las vigas de borde no debe ser < 0.8, como se indica en una nota al pie de la tabla 16.1.

$$\alpha_f = \frac{E_{cb}I_b}{E_{cs}I_s} \qquad \text{(Ecuación 13-3, ACI)}$$

Donde

E_{cb} = módulo de elasticidad del concreto de la viga

E_{cs} = módulo de elasticidad del concreto de la columna

I_b = momento de inercia total respecto al eje centroidal de una sección formada por la viga y la losa a cada lado de la viga, que se extiende a una distancia igual a la proyección de la viga arriba o debajo de la losa (la que sea mayor) pero sin exceder cuatro veces el espesor de la losa (ACI 13.2.4)

I_s = momento de inercia de la sección total de la losa respecto al eje centroidal e igual a $h^3/12$ veces el ancho de la losa, donde el ancho es el mismo que para α.

EJEMPLO 16.1

Usando el código ACI, determinar el espesor total mínimo permisible requerido para las losas en los tableros ③ y ② para el sistema de piso mostrado en la figura 16.6. Se usan vigas de borde alrededor del perímetro del edificio, que son de 12 plg de ancho y se extienden verticalmente 8 plg debajo de la losa, como se muestra en la figura 16.7. Se extienden también 8 plg dentro de la losa como lo requiere la sección 13.2.4 del ACI. No se usarán ábacos y el concreto en la losa es el mismo que el usado en las vigas de borde. $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN **Para el tablero interior ③**

$$\alpha_f = 0 \text{ (ya que los tableros interiores no tienen vigas perimetrales)}$$

$$1_n = 20 - \frac{16}{12} = 18.67 \text{ pies (distancia libre entre columnas)}$$

$$h \text{ mín de la tabla 16.1} = \frac{\ell_n}{33}$$

$$= \frac{18.67}{33} = 0.566 \text{ pie} = 6.79 \text{ plg}$$

De acuerdo con la sección 9.5.3.2 no puede ser menor que 5 plg — Pruebe con 7 plg

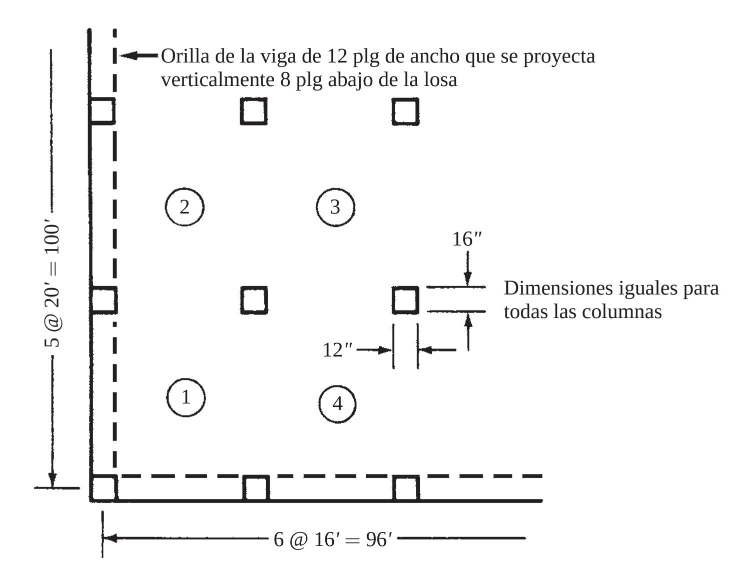


Figura 16.6 Una losa de piso de placa plana.

Para el tablero exterior ②

Suponemos $h = 7$ plg y calculamos α_f con referencia a la figura 16.7(a). El centroide de la sección hachurada de la viga se localiza por estática a 6.55 plg desde la parte superior.

$$I_b = \left(\frac{1}{3}\right)(20)(6.55)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)(12)(8.45)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)(8)(0.45)^3$$

$$= 4\,287 \text{ plg}^4$$

$$I_s = \left(\frac{1}{12}\right)(102)(7)^3 = 2\,915.5 \quad \text{Véase la figura 16.7}(b)$$

$$\alpha = \frac{EI_b}{EI_s} = \frac{(E)(4\,287)}{(E)(2\,915.5)} = 1.47 > 0.8$$

∴ Se trata de una viga de borde como se define en el pie de página de la tabla 16.1.

$$h \text{ mín} = \frac{\ell_n}{33} = \frac{20 - \dfrac{16}{12}}{33} = 0.566 \text{ pie} = 6.79 \text{ plg}$$

Intentar con 7 plg

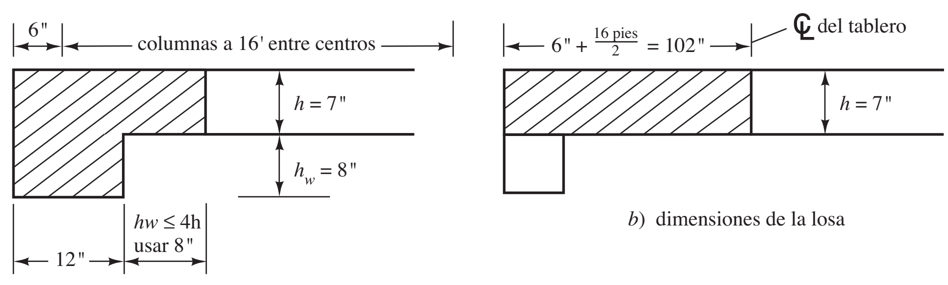


Figura 16.7

Losas con vigas interiores

Para determinar el espesor mínimo de losas con vigas con claros entre sus soportes en todos los lados, debe observarse la sección 9.5.3.3. del código ACI. En las expresiones presentadas ahí, están implícitas las longitudes de los claros, las formas de los tableros, las rigideces a flexión de las vigas si éstas se usan, los esfuerzos de fluencia del acero, etc. En estas ecuaciones se usan los siguientes términos:

ℓ_n = el claro libre en la dirección larga, medido cara a cara, de *a*) las columnas para losas sin vigas y *b*) las vigas para losas con vigas

β = relación del claro libre largo al corto

α_{fm} = valor promedio de las relaciones de las rigideces de viga a losa, en todos los lados de un tablero

El espesor mínimo de las losas o de las otras construcciones en dos direcciones puede obtenerse sustituyendo en las ecuaciones que siguen, que están dadas en la sección 9.5.3.3 del código. En las ecuaciones, la cantidad β se usa para tomar en cuenta el efecto de la forma del tablero sobre su deflexión, mientras que el efecto de vigas (si las hay) está representado por α_{fm}. Si no hay vigas (como en el caso de las losas planas), α_{fm} será igual a 0.

1. Para $\alpha_{fm} \leq 0.2$, los espesores mínimos se obtienen como se hizo para las losas sin vigas interiores, con claros entre sus soportes.

2. Para $0.2 \leq \alpha_{fm} \leq 2.0$, el espesor no debe ser menor que 5 plg o bien

$$h = \frac{\ell_n\left(0.8 + \dfrac{f_y}{200\,000}\right)}{36 + 5\beta(\alpha_{fm} - 0.2)} \qquad \text{(Ecuación 9-12, ACI)}$$

3. Para $\alpha_{fm} > 2.0$, el espesor no debe ser menor que 3.5 plg o bien

$$h = \frac{\ell_n\left(0.8 + \dfrac{f_y}{200\,000}\right)}{36 + 9\beta} \qquad \text{(Ecuación 9-13, ACI)}$$

donde ℓ_n y f_y están en pulgadas y en lb/plg^2, respectivamente.

Para tableros con bordes discontinuos, el código (9.5.3.3d) requiere que se usen vigas de borde, que tengan una relación mínima de rigidez α_f igual a 0.8 o bien, que los espesores mínimos de las losas, determinados con las ecuaciones 9-12 y 9-13 del ACI, se incrementen 10%.

El proyectista puede usar losas de menores espesores que los requeridos por el código ACI descritos en los párrafos anteriores, si se calculan las deflexiones y se encuentra que son iguales a o menores que los valores límite dados en la tabla 9.5(*b*) del código ACI (tabla 6.1 en este texto).

Si se siguen las diversas reglas para el espesor mínimo pero la losa resultante no alcanza a proporcionar la capacidad por cortante requerida para el tamaño de la columna particular, probablemente se requieran capiteles en la columna. Pueden usarse vigas entre las columnas para algunas losas donde se coloquen subdivisiones o cargas de equipo pesado cerca de las líneas de columnas. Un caso muy común de este tipo ocurre si se usan vigas exteriores cuando los muros exteriores son soportados directamente por la losa. Otra situación en que pueden usarse vigas ocurre cuando preocupa la magnitud de las vibraciones de la losa. El ejemplo 16.2 ilustra la aplicación de las reglas para el espesor mínimo de una losa para losa bidireccional con vigas.

EJEMPLO 16.2

Se ha supuesto que la losa en dos direcciones mostrada en la figura 16.8 tiene un espesor de 7 plg. La sección A-A en la figura muestra la sección transversal de la viga. Revise las ecuaciones ACI para determinar si el espesor de la losa es satisfactorio para un tablero interior. $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2, $f_y = 60\,000$ lb/plg^2, concreto de peso normal.

SOLUCIÓN **(Usando el mismo concreto para vigas y losas)**

Cálculo de α_1 para el claro largo (horizontal) para las vigas interiores

$$I_s = \text{momento de inercia total de la losa de 20 pies de ancho}$$

$$= \left(\frac{1}{12}\right)(12 \times 20)(7)^3 = 6\,860 \text{ plg}^4$$

I_b = momento de inercia total I de la sección transversal de la viga T mostrada en la figura 16.8 respecto al eje centroidal = 18 060 plg^4

$$\alpha_1 = \frac{EI_b}{EI_s} = \frac{(E)(18\,060)}{(E)(6\,860)} = 2.63$$

Cálculo de α_2 para vigas interiores largas

$$I_s \text{ para la losa de 24 pies de ancho} = \left(\frac{1}{12}\right)(12 \times 24)(7)^3 = 8\,232 \text{ plg}^4$$

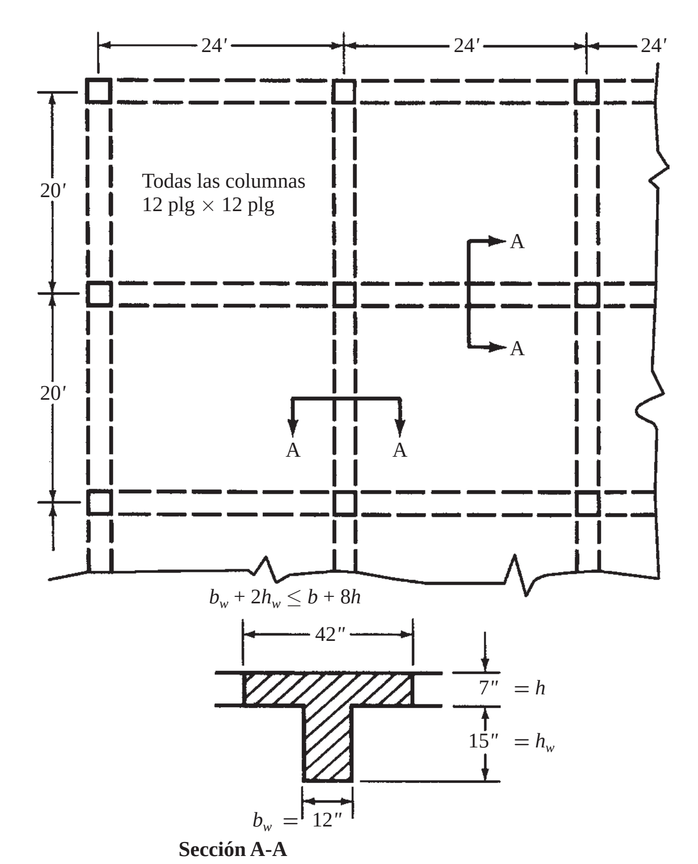


Figura 16.8 Losa en dos direcciones.

$$I_b = 18\ 060 \text{ plg}^4$$

$$\alpha_2 = \frac{(E)(18\ 060)}{(E)(8\ 232)} = 2.19$$

$$\alpha_{fm} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{2.63 + 2.19}{2} = 2.41$$

Determinación del espesor de la losa según la sección 9.5.3.3 del ACI

$$\alpha_{fm} = 2.41 > 2$$ $\therefore$ Use la ecuación 9-13 del ACI

$$h = \frac{\ell_n\left(0.8 + \dfrac{f_y}{200\ 000}\right)}{36 + 9\beta}$$

$$\ell_{n\text{ largo}} = 24 - 1 = 23 \text{ pie}$$

$$\ell_{n\text{ corto}} = 20 - 1 = 19 \text{ pie}$$

$$\beta = \frac{23}{19} = 1.21$$

$$h = \frac{(23)\left(0.8 + \dfrac{60\ 000}{200\ 000}\right)}{36 + (9)(1.21)} = 0.540 \text{ pie} = 6.47 \text{ plg}$$

Usar losa de 7 plg

Observe que por lo general el tablero interior no controla el espesor requerido de la losa. Generalmente, será un tablero de esquina o de borde. El tablero interior se escogió aquí para ilustrar los cálculos y para evitar una complejidad excesiva. Si se hubiera seleccionado un tablero de esquina, cada orilla del tablero habría tenido un α_f diferente.

16.7 LIMITACIONES DEL MÉTODO DIRECTO DE DISEÑO

Para que los coeficientes de momento determinados por el método directo de diseño sean aplicables, el código (13.6.1) establece que deben cumplirse las siguientes limitaciones, a menos que un análisis teórico muestre que la resistencia proporcionada, después de aplicar los factores ϕ apropiados de reducción de capacidad, sea suficiente para soportar las cargas anticipadas y se cumplan todas las condiciones de servicio, tales como los límites en las deflexiones:

1. Tiene que haber por lo menos tres claros continuos en cada dirección.
2. Los tableros deben ser rectangulares, con la longitud del lado mayor de cualquier tablero no mayor que 2.0 veces la longitud del lado menor, midiendo las longitudes de centro a centro de los apoyos.
3. Las longitudes de claros sucesivos en cualquier dirección no deben diferir en más de un tercio del claro más grande.
4. Las columnas no deben estar situadas con una excentricidad mayor que 10% de la longitud del claro en la dirección de la excentricidad desde cualquier eje entre las líneas centrales de columnas sucesivas.
5. La carga viva no factorizada no deberá ser mayor que dos veces la carga muerta no factorizada. Todas las cargas deben ser de gravedad y deben estar distribuidas uniformemente sobre un tablero completo.

6. Si un tablero está soportado en todos sus lados por vigas, la rigidez relativa de esas vigas en las dos direcciones perpendiculares, determinada con la siguiente expresión, no deberá ser menor que 0.2 ni mayor que 5.0.

$$\frac{\alpha_{f1}\ell_2^2}{\alpha_{f2}\ell_1^2}$$

Los términos ℓ_1 y ℓ_2 se mostraron en la figura 16.3.

16.8 DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS EN LOSAS

El momento total M_o que es resistido por una losa es igual a la suma de los momentos máximos negativo y positivo del claro. Es el mismo que el momento total que ocurre en una viga simplemente apoyada. Para una carga uniforme por unidad de área, q_u, es como sigue:

$$M_o = \frac{(q_u\ell_2)(\ell_1)^2}{8}$$

En esta expresión ℓ_1 es la longitud del claro, centro a centro, de soportes en la dirección en la que se toman los momentos y ℓ_2 es la longitud del claro transversal a ℓ_1, medida también entre centros de soportes.

Se ha evidenciado en la práctica y en pruebas, que el momento que realmente se presenta en una losa así, es algo menor que el valor M_o determinado con la expresión anterior. Por esta razón, ℓ_1 se remplaza por ℓ_n, que es el claro libre medido entre las caras de los soportes en la dirección en la que se toman los momentos. El código (13.6.2.5) establece que ℓ_n no debe tomarse menor que 65% del claro ℓ_1, medido centro a centro de los soportes. Si ℓ_1 se remplaza por ℓ_n, la expresión para M_o, que se llama *momento estático,* queda

$$M_o = \frac{(q_u\ell_2)(\ell_n)^2}{8} \qquad \text{(Ecuación 13-4, ACI)}$$

Cuando el momento estático se calcula en la dirección larga, es conveniente escribirlo como $M_{o\ell}$, y en la dirección corta como M_{os}.

A continuación es necesario saber qué proporciones de esos momentos totales son positivas y qué proporciones son negativas. Si una losa está empotrada en ambos extremos de un tablero, la división será como en una viga doblemente empotrada, dos tercios negativos y un tercio positivo, como se muestra en la figura 16.9.

Esta división es razonablemente precisa para los tableros interiores donde la losa es continua sobre varios claros en cada dirección, con claros de iguales longitudes y cargas de iguales tamaños. En efecto,

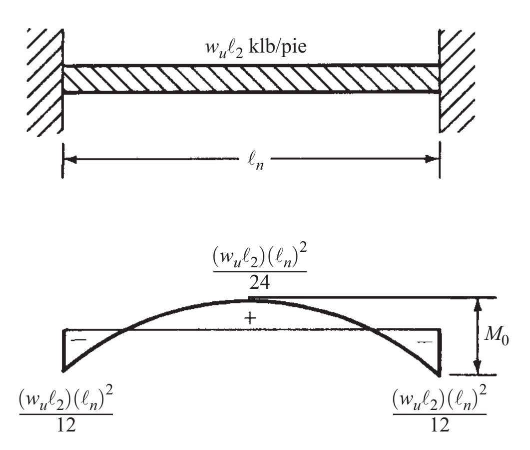


Figura 16.9

la rotación de las columnas interiores se supone pequeña y los valores de momentos de $0.65M_o$ para el momento negativo y de $0.35M_o$ para el momento positivo, son especificados por el código (13.6.3.2). Para los casos en que las longitudes de los claros y las cargas sean diferentes, la proporción de los momentos positivos y negativos puede variar apreciablemente y es aconsejable entonces usar un método de análisis más detallado. El método del marco equivalente (capítulo 17) da buenas aproximaciones para tales situaciones.

Las rigideces relativas de las columnas y las losas de tableros exteriores son de mucha mayor importancia en su efecto sobre los momentos que en el caso de los tableros interiores. Las magnitudes de los momentos son muy sensibles a la cantidad de restricción torsional suministrada en los bordes discontinuos. Esta restricción es proporcionada tanto por la rigidez a flexión de la losa como por la rigidez a flexión de la columna exterior.

Si la rigidez de una columna exterior es pequeña, el momento negativo del extremo será muy cercano a cero. Si la rigidez de la columna exterior es muy grande, los momentos positivo y negativo aún no serán iguales a los de un tablero interior, a menos que se tenga una viga de borde con una rigidez por torsión muy grande que impida en forma considerable la rotación del borde discontinuo de la losa.

Si una viga de 2 pies de ancho se conectara con una columna también de 2 pies de ancho y de rigidez infinita a la flexión en el plano de la viga, la junta se comportaría como un empotramiento perfecto y el momento negativo en la viga sería igual al momento de empotramiento.

Si una losa en dos direcciones de 24 pies de ancho se conectara con esta misma columna de 2 pies de ancho y de rigidez infinita, la condición de rotación nula se presentaría sólo a lo lago de la parte en contacto de la losa y la columna. En el ancho restante de 11 pies de la losa a cada lado de la columna se tendría una rotación variable de valor 0 en la cara de la columna hasta valores máximos a 11 pies en cada lado de la misma. Como resultado de esta rotación, el momento negativo en la cara de la columna tendrá un valor menor que el de empotramiento. Así, la rigidez de la columna exterior es reducida por la rotación de la losa conectada transversalmente a ella.

Para tomar en cuenta el hecho de que la rotación del borde de la losa es diferente a distintas distancias de la columna, las columnas exteriores y la viga de borde de la losa se reemplazan por una columna equivalente que tiene la misma flexibilidad estimada que la columna, más la viga de borde. Puede verse que éste es un procedimiento bastante complicado; por tanto, en vez de requerir un análisis complejo, el código (13.6.3.3) proporciona un conjunto de porcentajes para dividir el momento estático total factorizado en sus partes positiva y negativa en un claro extremo. Estas divisiones, que se muestran en la tabla 16.2, incluyen valores para bordes no restringidos (como cuando la losa está simplemente apoyada sobre un muro de mampostería o de concreto) y para bordes restringidos (como cuando la losa está construida monolíticamente con un muro de concreto muy rígido, de manera que ocurre sólo un giro muy pequeño en la unión de la losa con el muro).

Tabla 16.2 Distribución del momento total en el claro en un claro extremo (código ACI, 13.6.3.3).

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
			Losa sin vigas entre soportes interiores		
	Borde exterior no restringido	Losa con vigas entre todos los soportes	Sin viga de borde	Con viga de borde	Borde exterior totalmente restringido
Momento interior factorizado negativo	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65
Momento factorizado positivo	0.63	0.57	0.52	0.50	0.35
Momento exterior factorizado negativo	0	0.16	0.26	0.30	0.65

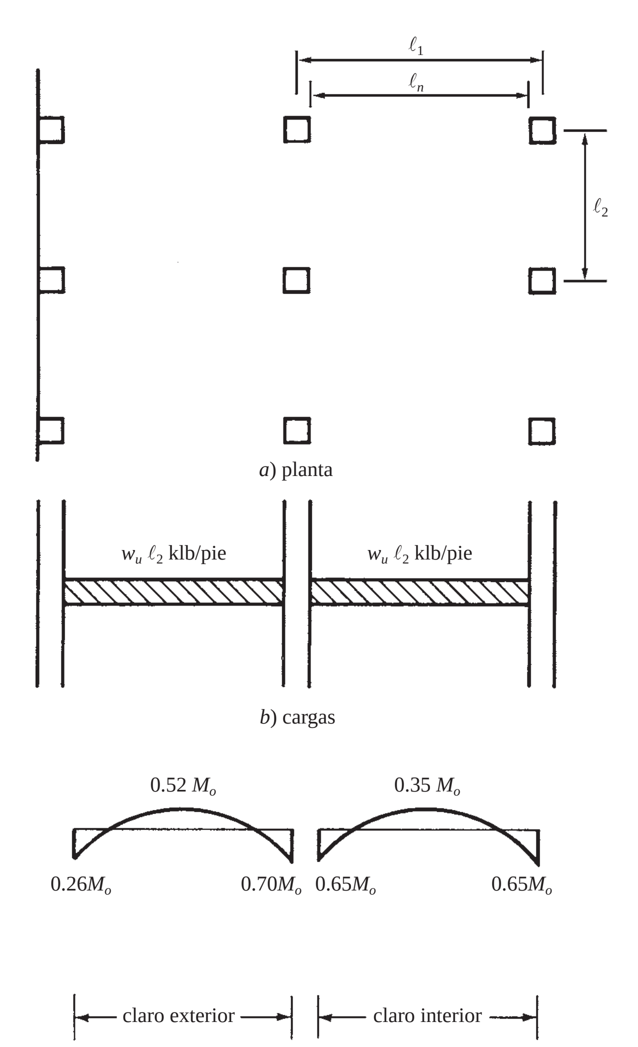


Figura 16.10 Ejemplos de momentos en una placa plana sin vigas de borde.

En la figura 16.10 se muestra la distribución de los momentos totales factorizados para los claros interior y exterior de una placa plana. Se supone que la placa está construida sin vigas entre los soportes interiores y sin vigas de borde.

El siguiente problema es estimar qué proporción de estos momentos es tomada por las franjas de columnas y qué proporción es tomada por las franjas centrales. Para este análisis se considera una placa plana y el momento resistido por la franja de columnas se estima considerando las áreas tributarias mostradas en la figura 16.11.

Para simplificar las operaciones matemáticas, se supone que la carga que va a ser soportada se sitúa dentro de la zona con líneas punteadas mostrada en las partes (*a*) y (*b*) de la figura 16.12. La carga correspondiente se coloca sobre el claro simple y su momento en el centro del claro se determina estimando la porción del momento estático tomado por la franja de columnas.[2]

[2]White, R.N., Gergely, P. y Sexsmith, R.G., 1974, *Structural Engineering*, vol. 3: *Behavior of members and Systems* (Nueva York: John Wiley & Sons), págs. 456-461.

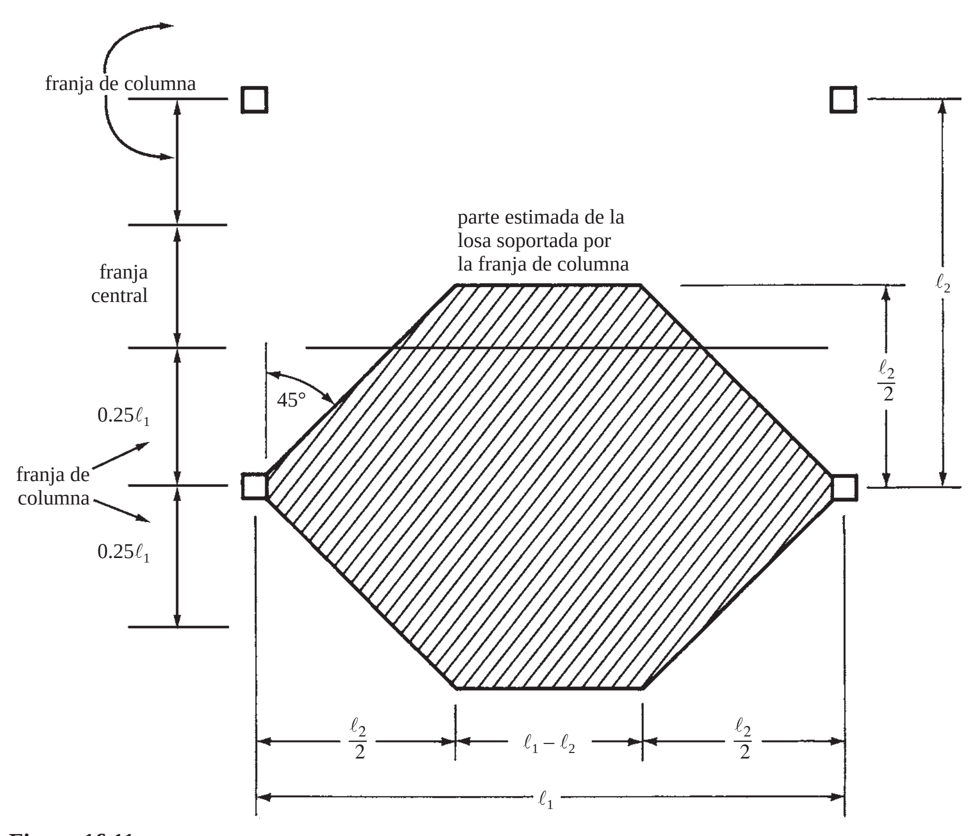


Figura 16.11

En la figura 16.12(*a*), la carga se distribuye uniformemente en una longitud centrada en el claro de la viga ocasionando que el momento se sobrestime un poco, mientras que en la figura 16.12(*b*), la carga se reparte uniformemente de extremo a extremo ocasionando que el momento se subestime. Con base en estas aproximaciones, los momentos estimados en las franjas de columnas de tableros cuadrados varían entre $0.5M_o$ a $0.75M_o$, en donde $M_o =$ suma absoluta de los momentos factorizados positivos y negativos promedio en cada dirección $= q_u\ell_2\ell_n^2/8$. Conforme ℓ_1 se vuelve mayor que ℓ_2, la franja de columnas toma una mayor proporción del momento. En tales casos, entre 60 y 70% de M_o será resistido por la franja de columnas.

Si se esboza la forma deflexionada aproximada de un tablero, se verá que una mayor porción del momento positivo es tomada por la franja central y no por la franja de columnas y viceversa para los momentos negativos. En consecuencia, aproximadamente 60% del M_o positivo y aproximadamente 70% del M_o negativo será resistido presumiblemente por la franja de columnas.[3]

La sección 13.6.4.1 del código establece que la franja de columnas debe proporcionarse para resistir los porcentajes del momento total interior negativo de diseño dados en la tabla 16.3.

En la tabla, α_1 es nuevamente la relación de la rigidez de una sección de viga, a la rigidez de una losa cuyo ancho está comprendido entre los ℄ de tableros adyacentes (si los hay) a cada lado de la viga y es igual a $E_{cb}I_b/E_{cs}I_s$.

La sección 13.6.4.2 del código establece que debe suponerse que la franja de columnas resiste los porcentajes del momento exterior negativo de diseño dados en la tabla 16.4. En esta tabla β_t es la relación

[3]White, Gergely y Sexsmith, *Structural Engineering*, vol. 3: *Behavior of Members and Systems*.

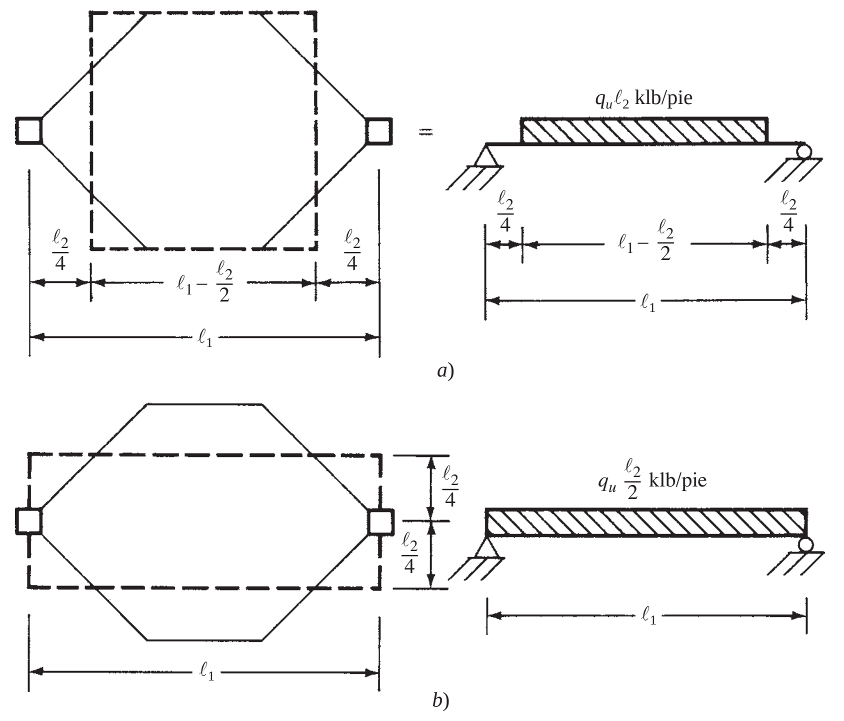


Figura 16.12

Tabla 16.3 Porcentajes del momento interior negativo de diseño que debe resistir la franja de columnas.

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	0.5	1.0	2.0
$\frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1} = 0$	75	75	75
$\frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1} \geq 1.0$	90	75	45

de la rigidez de torsión de una sección de viga de borde, a la rigidez de flexión de ancho de losa igual a la longitud de la viga de centro a centro de los soportes ($\beta_t = E_{cb}C/2E_{cs}I_s$). El cálculo de la constante C de la sección transversal, se describe en la sección 16.11 de este capítulo.

La franja de columnas (sección 13.6.4.4 del código) debe promocionarse para resistir la porción de los momentos positivos dados en la tabla 16.5.

Pueden usarse ecuaciones en lugar de la interpolación en dos direcciones requerida algunas veces por las tablas 16.3, 16.4 y 16.5. En lugar de la tabla 16.3, el porcentaje de momento negativo interior que debe ser resistido por la franja de columnas ($\%^{-}_{\text{col int}}$) puede determinarse mediante

$$\%^{-}_{\text{col int}} = 75 + 30\left(\frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1}\right)\left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$$

Tabla 16.4 Porcentajes del momento exterior negativo de diseño que debe resistir una franja de columnas.

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$		0.5	1.0	2.0
$\frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1} = 0$	β_t 0	100	100	100
	$\beta_t \geq 2.5$	75	75	75
$\frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1} \geq 1.0$	$\beta_t = 0$	100	100	100
	$\beta_t \geq 2.5$	90	75	45

Tabla 16.5 Porcentajes de momento positivo de diseño que debe resistir la franja de columnas.

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	0.5	1.0	2.0
$\frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1} = 0$	60	60	60
$\frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1} \geq 1.0$	90	75	45

El porcentaje del momento exterior negativo de diseño resistido por la franja de columnas ($\%^-_{\text{col ext}}$) dado en la tabla 16.4 puede encontrarse mediante

$$\%^-_{\text{col ext}} = 100 - 10\beta_t + 12\left(\frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1}\right)\left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$$

Y finalmente, para el momento positivo de diseño ya sea en un claro interior o en un claro exterior (tabla 16.5), el porcentaje resistido por la franja de columnas ($\%^+$) es

$$\%^+ = 60 + 30\left(\frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1}\right)\left(1.5 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$$

En las tres ecuaciones anteriores, si $\beta_t > 2.5$, use 2.5 y si $\alpha_{f1}\ell_2/\ell_1 > 1$, use 1.

En la sección 13.6.5, el código requiere que a la viga se le asigne 85% del momento de la franja de columnas si $\alpha_{f1}(\ell_2/\ell_1) \geq 1.0$. Si $\alpha_{f1}(\ell_2/\ell_1)$ tiene un valor entre 1.0 y 0, el momento asignado a la viga se determina por interpolación lineal entre 85 y 0%. La parte del momento no asignado a la viga se asigna a la losa en la franja de columnas.

Finalmente, el código (13.6.6) requiere que la porción de los momentos de diseño no resistidos por las franjas de columnas sean asignados a la correspondiente franja media central. Tal franja media se diseñará para resistir la totalidad de los momentos asignados a sus dos medias franjas centrales.

16.9 DISEÑO DE UNA PLACA INTERIOR PLANA

En esta sección se diseña una placa interior plana por el método directo de diseño. El procedimiento especificado en el capítulo 13 del código ACI es aplicable no sólo a placas planas, sino también a losas planas, a losas planas con casetones y a losas planas bidireccionales con vigas. Los pasos necesarios para efectuar los diseños se resumen brevemente al final de este párrafo. El orden de los pasos puede tener que variarse algo para los diferentes tipos de diseño de losas. Puede usarse el método directo de diseño o el método del marco equivalente para determinar los momentos de diseño. Los pasos de diseño son los siguientes:

1. Estimar el espesor de losa cumpliendo los requisitos del código.
2. Determinar el espesor requerido por cortante.
3. Calcular los momentos estáticos totales que tienen que resistirse en las dos direcciones.
4. Estimar los porcentajes de los momentos estáticos que son positivos y negativos y repartir los valores resultantes entre las franjas de columnas y central.
5. Seleccionar el refuerzo.

El ejemplo 16.3 ilustra este método de diseño aplicado a una placa plana.

EJEMPLO 16.3

Diseñar una placa interior plana para la estructura considerada en el ejemplo 16.1. Esta placa se muestra en la figura 16.13. Supóngase una carga viva de servicio igual a 80 lb/pie^2, una carga muerta de servicio igual a 110 lb/pie^2 (incluyendo el peso de la losa), $f_y = 60\ 000$ lb/plg^2, $f'_c = 3\ 000$ lb/plg^2, concreto de peso normal y altura de las columnas igual a 12 pies.

SOLUCIÓN **Estimar el espesor de la losa**

Cuando se revisa el cortante, la losa de 7 plg que se estimó en el ejemplo 16.1 no es suficiente. Una alternativa es incrementar f'_c a un valor mayor que 3 000 lb/plg^2, el cual es una resistencia bastante baja. Sin embargo, incrementaremos el espesor de la losa. Los cálculos para la losa de 7 plg de espesor son los mismos que los que siguen para el espesor de losa de 7.5 plg, con la excepción del cambio de espesor de la losa.

$\therefore$Probar con una losa de $7\frac{1}{2}$ plg

Determinar el espesor requerido por cortante

Usando d para el cortante igual al promedio estimado de los valores d en las dos direcciones obtenemos

$$d = 7.50'' - \frac{3''}{4} \text{ recubrimiento} - 0.50'' = 6.25''$$

$$q_u = (1.2)(110) + (1.6)(80) = 260 \text{ lb/pie}^2$$

Revisar el cortante directo o cortante de viga (rara vez controla en los sistemas de piso de dos direcciones)

Usando las dimensiones mostradas en la figura 16.14 obtenemos

$$V_{u1} = (8.81)(260) = 2\ 291 \text{ lb para un ancho de } 12''$$

$$\phi V_c = \phi 2\lambda\sqrt{f'_c}bd$$

$$= (0.75)(1.0)(2\sqrt{3\ 000})(12)(6.25)$$

$$= 6\ 162 \text{ lb} > 2\ 291 \text{ lb}$$

OK

Revisar el cortante por penetración alrededor de la columna

$$b_o = (2)(16 + 6.25) + (2)(12 + 6.25) = 81''$$

$$V_{u2} = \left[(20)(16) - \left(\frac{16 + 6.25}{12}\right)\left(\frac{12 + 6.25}{12}\right)\right](0.260)$$

$$= 82.47 \text{ klb} = 82\ 470 \text{ lb}$$

$$\phi V_c = (0.75)(1.0)(4\sqrt{3\ 000})(81)(6.25)$$

$$= 83\ 185 \text{ lb} > 82\ 470 \text{ lb}$$

OK

Use $h = 7\frac{1}{2}''$

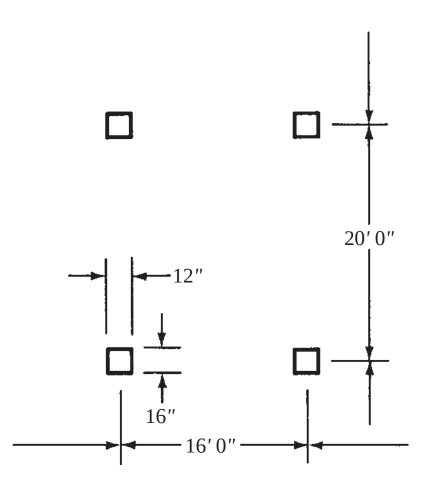


Figura 16.13 Tablero interior de la estructura de placa plana del ejemplo 16.1.

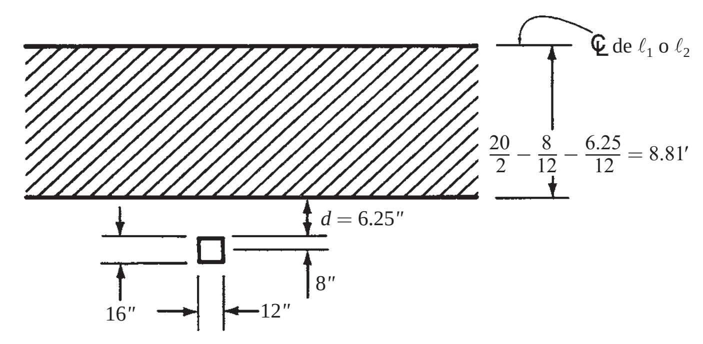


Figura 16.14

Calcular los momentos estáticos en las direcciones larga y corta

$$M_{o\ell} = \frac{q_u \ell_2 \ell_n^2}{8} = \frac{(0.260)(16)\left(20 - \frac{16}{12}\right)^2}{8} = 181.2 \text{ pie-klb}$$

$$M_{os} = \frac{q_u \ell_1 \ell_n^2}{8} = \frac{(0.260)(20)\left(16 - \frac{12}{12}\right)^2}{8} = 146.2 \text{ pie-klb}$$

Asignar los momentos estáticos a las franjas de columnas y franja central y seleccionar el refuerzo
El momento estático se divide en momentos positivo y negativo de acuerdo con el artículo 13.6.2 del ACI. Ya que éste es un tablero interior, el 65% del momento estático total es negativo y el 35% es positivo. Véase también el lado derecho de la figura 16.10(*c*). Si este ejemplo fuera un claro extremo, entonces el momento estático total se dividiría en valores positivo y negativo de acuerdo con la tabla 16.2.

El siguiente paso es dividir los momentos determinados en el párrafo anterior entre las franjas de columnas y la central. Nuevamente, como éste es un tablero interior, es aplicable la tabla 16.3. Como $\alpha_{f1} = 0$ (no hay vigas interiores), 75% del momento va a la franja de columnas. Este valor es independiente de ℓ_2/ℓ_1 para el caso en el cual no hay vigas interiores. El 25% restante del momento se asigna a la franja central, la mitad en cada lado de la franja de columnas. Se usa la tabla 16.5 para determinar qué tanto del momento positivo total se asigna a la franja de columnas. En este caso, como $\alpha_{f1} = 0$, 60% va a la franja de columnas y el restante 40% se asigna a la franja central, cada mitad en un lado de la franja de columnas.

Estos cálculos pueden arreglarse convenientemente, como en la tabla 16.6. Esta tabla es muy similar a la que se usa para el diseño de la losa continua en una dirección del capítulo 14. Para ayudar en la interpretación de la tabla 16.6, se estudiarán los resultados numéricos de la primera columna. El primero es la determinación de M_u. En este cálculo se usa el factor 0.65 del artículo 13.6.2 del ACI y el factor 0.75 de la tabla 16.3, ambos aplicados al momento estático total de 181.2 pie-klb. La división de este valor de $M_u = -88.4$ pie-klb entre $\phi bd^2 (\phi = 0.9,\ b = 8 \text{ pies} = 96 \text{ plg},\ d = 6.5 \text{ plg})$ conduce a $M_u/\phi bd^2 = 290.6$ lb/plg^2. De la tabla A12, $\rho = 0.00516$ (por interpolación). *El área del acero de refuerzo en la franja de columnas es* $A_s = \rho bd = 0.00516(96)(6.5) = 3.22$ plg^2. Se escoge una selección de varilla de 17 varillas del #4, teniendo un A_s total $= 3.34$ plg^2. Los conceptos restantes en la tabla 16.6 siguen un procedimiento similar.

Al seleccionar de las tablas los diferentes porcentajes de momentos para las franjas de columnas e intermedias de esta losa observe que $\alpha_f = 0$.

En la solución del ejemplo 16.3 observará que los valores de $M_u/\phi bd^2$ algunas veces son muy pequeños y de este modo muchos de los valores de ρ no se sitúan en la tabla A.12 (véase el apéndice). Para tales casos los autores usan el mínimo por temperatura y contracción de $0.0018bh$.

En realidad, el refuerzo por temperatura incluye varillas arriba y en el fondo de la losa. En la región de momento negativo, algunas de las varillas de acero positivo se han extendido hacia la región de soporte y están también disponibles como acero de temperatura y contracción. Si se desea, estas varillas positivas pueden traslaparse en vez de ser cortadas en el soporte.

La selección de las varillas de refuerzo es el paso final en el diseño de esta placa plana. La figura 13.3.8 del código (dada aquí como la figura 16.15) muestra las longitudes mínimas de las varillas de refuerzo para losas de placas planas y losas planas con ábacos. Esta figura muestra que parte del refuerzo positivo debe llevarse hasta la zona de los soportes.

Tabla 16.6

	Claro largo (d estimada = 6.50″)				Claro corto (d estimada = 6.00″)			
	Franja de columna (8′)		Franja central (8′)		Franja de columna (8′)		Franja central (12′)	
	−	+	−	+	−	+	−	+
M_u	(0.65)(0.75)(181.2) = −88.4 pie-klb	(0.35)(0.60)(181.2) = +38.1	(0.65)(181.2) −88.4 = −29.4 pie-klb	(0.35)(181.2) −38.1 = +25.3 pie-klb	(0.65)(0.75)(146.2) = −71.3 pie-klb	(0.35)(0.60)(146.2) = +30.7 pie-klb	(0.65)(146.2) −71.3 = −23.8 pie-klb	(0.35)(146.2) −30.7 = +20.5 pie-klb
$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	290.6 lb/plg^2	125.2 lb/plg^2	97.6 lb/plg^2	83.2 lb/plg^2	275.1 lb/plg^2	118.4 lb/plg^2	61.2	52.7 lb/plg^2
ρ*	0.00516bd	0.00214bd	0.0018bh	0.0018bh	0.00486bd	0.00202bd	0.0018bh	0.0018bh
A_s	3.22 plg^2	1.34 plg^2	1.30 plg^2	1.30 plg^2	2.80 plg^2	1.16 plg^2	1.94 plg^2	1.94 plg^2
Varillas seleccionadas	17 #4	7 #4	7 #4	7 #4	15 #4	6 #4	10 #4	10 #4

*Los valores no deberán ser menores que los mínimos por temperatura y contracción de 0.0018bh.

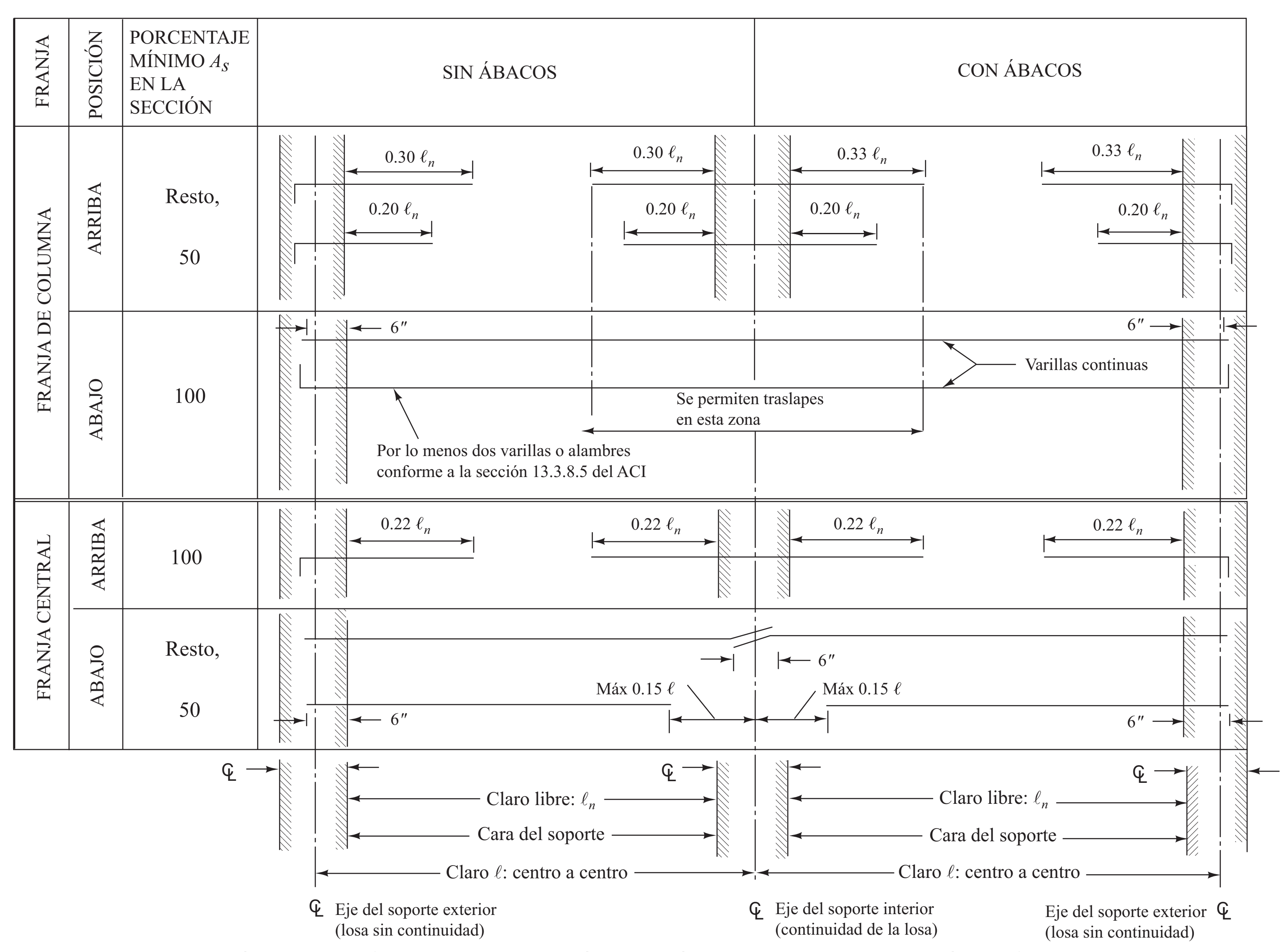


Figura 16.15 Extensiones mínimas para el refuerzo en losas sin vigas (véase la sección 12.11.1 del ACI, para la extensión del refuerzo en los soportes).

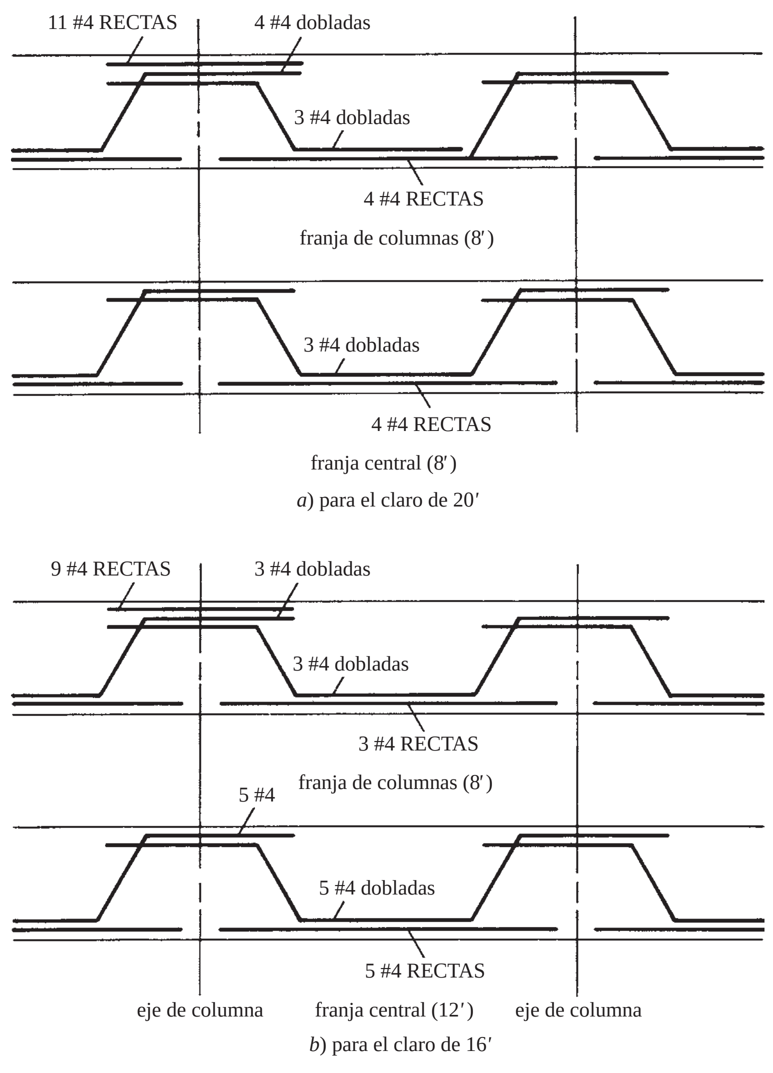


Figura 16.16

Las varillas seleccionadas para esta placa plana se muestran en la figura 16.16. En este ejemplo se usan varillas dobladas, pero podrían haberse usado también varillas rectas. Entre los proyectistas existe la tendencia de usar más varillas rectas que varillas dobladas en las losas.

16.10 COLOCACIÓN DE LAS CARGAS VIVAS

Los momentos en una losa continua de piso son afectados considerablemente por las diferentes posiciones o patrones de las cargas vivas. Sin embargo, el procedimiento usual es calcular los momentos estáticos totales, suponiendo que todos los tableros están sometidos a carga viva plena. Cuando se usan patrones de carga diferentes, los momentos pueden cambiar tanto que es posible que ocurra un sobreesfuerzo en la losa.

La sección 13.7.6.2 del código establece que si una carga viva variable no factorizada no excede en tres cuartas partes la carga muerta no factorizada o si es de un tipo tal que todos los tableros quedan

cargados simultáneamente, es permisible suponer que la carga viva total sobre el área entera causará valores máximos del momento en todo el sistema de la losa.

Para otras condiciones de carga puede suponerse (de acuerdo con la sección 13.7.6.3 del ACI) que el momento positivo máximo en el centro de un tablero ocurrirá cuando tres cuartas partes de toda la carga viva factorizada se coloque sobre el tablero en estudio y sobre tableros alternos. Puede suponerse además que el momento máximo negativo en un soporte ocurrirá cuando tres cuartas partes de la carga viva factorizada se coloquen sólo sobre los claros adyacentes.

El código permite el uso del factor de tres cuartos porque los momentos absolutos máximos positivo y negativo, no pueden ocurrir simultáneamente bajo una sola condición de carga y también porque es posible alguna redistribución de momentos antes de que ocurra la falla. Si bien el resultado de este procedimiento puede ser algún sobreesfuerzo local, se considera que la capacidad última del sistema después de la redistribución, será suficiente para resistir en cada tablero las cargas muertas y vivas totales factorizadas.

El momento determinado como se describió en el último párrafo, no debe ser menor que los momentos obtenidos cuando las cargas vivas factorizadas se coloquen en cada tablero (13.7.6.4, ACI).

16.11 ANÁLISIS DE LOSAS EN DOS DIRECCIONES CON VIGAS

En esta sección los momentos se determinan por el método de diseño directo para un tablero exterior de una losa en dos direcciones con vigas. El problema de ejemplo presentado en esta sección puede ser tan complicado como cualquier otro que pueda surgir sobre placas planas, losas planas o losas en dos direcciones con vigas usando el método de diseño directo.

Los requisitos del código son tan extensos y complejos que en el ejemplo 16.4 que sigue, los pasos y secciones apropiados del código se presentan con todo detalle. El proyectista en funciones debería poseer una copia del *Manual de Diseño CRSI* ya que las tablas contenidas ahí son de gran ayuda en el diseño de losas.

EJEMPLO 16.4

Determinar los momentos negativo y positivo requeridos para el diseño del tablero exterior de una estructura de losa en dos direcciones con vigas, mostrada en la figura 16.17. La losa soportará una carga viva de 120 lb/pie^2 y una carga muerta de 100 lb/pie^2, incluido el peso propio de la losa. Las columnas son de 15 plg $\times$ 15 plg y 12 pies de altura. La losa estará soportada por vigas a lo largo del eje de columnas con la sección transversal mostrada. Calcular el espesor de la losa y revisar el esfuerzo cortante si $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN

1. Revisión de las restricciones del código ACI (13.6.1). Estas restricciones, que se estudiaron en la sección 16.7 de este libro, se satisfacen. Los primeros cinco de estos criterios se satisfacen fácilmente por inspección. El sexto requiere los siguientes cálculos.

2. Espesor mínimo requerido por el código (9.5.3)

a) Suponemos $h = 6$ plg

b) Proyección efectiva del patín de la viga del eje de columnas según lo especifica el código (13.2.4)

$$= 4h_f = (4)(6) = 24'' \text{ o } h - h_f = 20 - 6 = \underline{\underline{14''}}$$

c) Momentos de inercia totales de las vigas T. Los siguientes valores son los momentos totales de inercia de las vigas de borde e interiores calculados, respectivamente, en relación con sus ejes centroidales. Muchos proyectistas usan valores aproximados para estos momentos de inercia, I_s, con resultados casi idénticos

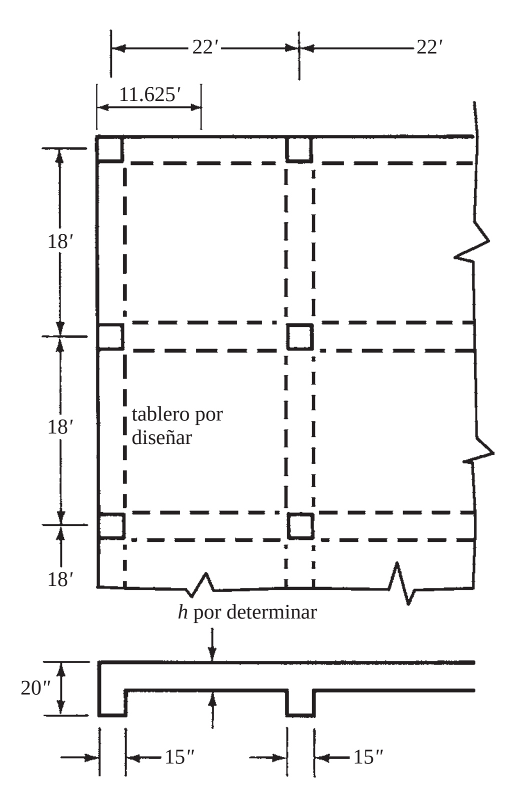


Figura 16.17

para los espesores de las losas. Una práctica común es usar 2 veces el momento de inercia total del alma (usando un peralte que va de la parte superior de la losa al fondo del alma) en vigas interiores y 1.5 veces el momento de inercia total del alma en vigas de borde.

$$I \text{ para vigas de borde} = 13\,468 \text{ plg}^4$$

$$I \text{ para vigas interiores} = 15\,781 \text{ plg}^4$$

d) Calculamos los valores α (donde α es la relación de la rigidez de la sección de la viga a la rigidez de una losa cuyo ancho está comprendido entre los ejes de los tableros adyacentes, si existen, a cada lado de la viga).

Para la viga de borde $\left(\text{ancho} = \frac{1}{2} \times 22 + \frac{7.5}{12} = 11.625 \text{ pies}\right)$

$$I_s = \left(\frac{1}{12}\right)(12 \times 11.625)(6)^3 = 2\,511 \text{ plg}^4$$

$$\alpha_f = \frac{13\,468}{2\,511} = 5.36$$

Para la viga interior de 18 pies (con ancho de losa de 22 pies)

$$I_s = \left(\frac{1}{12}\right)(12 \times 22)(6)^3 = 4\,752 \text{ plg}^4$$

$$\alpha_f = \frac{15\,781}{4\,752} = 3.32$$

Para la viga interior de 22 pies (con ancho de losa de 18 pies)

$$I_s = \left(\frac{1}{12}\right)(12 \times 18)(6)^3 = 3\,888 \text{ plg}^4$$

$$\alpha_f = \frac{15\,781}{3\,888} = 4.06$$

$$\alpha_f \text{ promedio} = \alpha_{fm} = \frac{5.36 + 3.32 + (2)(4.06)}{4} = 4.20$$

$$\beta = \text{relación del claro largo al claro corto} = \frac{22 - \frac{15}{12}}{18 - \frac{15}{12}} = 1.24$$

e) Ahora que hemos determinado los valores de α_f en las dos direcciones perpendiculares, ahora podemos revisar la sexta y última limitación para el uso del método de diseño directo (13.6.1.6, ACI).

$$\frac{\alpha_{f1}\ell_2^2}{\alpha_{f2}\ell_1^2} = \frac{4.06(18)^2}{3.32(22)^2} = 0.818$$

Como este valor se encuentra entre 0.2 y 5.0, esta condición se satisface. Observe que las direcciones que se designan como ℓ_1 y ℓ_2 son arbitrarias. Si ℓ_1 se hubiera usado como la dirección corta, el cálculo anterior simplemente se invertiría y la relación habría sido 1.22 en vez de 0.818. Este valor también habría estado entre los límites de 0.2 y 5.0.

f) Límites de grosor según la sección 9.5.3 del código

$$\ell_n = 22.0 - \frac{15}{12} = 20.75 \text{ pies}$$

Como $\alpha_{fm} > 2.0$, usar la ecuación 9-13 del ACI.

$$h = \frac{\ell_n\left(0.8 + \frac{f_y}{200\,000}\right)}{36 + 9\beta}$$

$$= \frac{(12)(20.75)\left(0.8 + \frac{60\,000}{200\,000}\right)}{36 + (9)(1.24)} = 5.81 \text{ plg} \leftarrow$$

h no debe ser menor que 3.5 plg (según la sección 9.5.3.3(c) del ACI)

Intentar con $h = 6$ plg (el cortante se verificará después)

3. Momentos para la dirección del claro corto centrado en el eje de columnas interiores

$$q_u = (1.2)(100) + (1.6)(120) = 312 \text{ lb/pie}^2$$

$$M_o = \frac{(q_u\ell_2)(\ell_n)^2}{8} = \frac{(0.312)(22)(16.75)^2}{8} = 241 \text{ pie-klb}$$

a) Dividiendo este momento estático de diseño en porciones negativa y positiva, según la sección 13.6.3.2 del código

momento negativo de diseño = (0.65)(241) = −157 pie-klb

momento positivo de diseño = (0.35)(241) = +84 pie-klb

b) Asignar estos momentos interiores a franjas de columna y viga, según la sección 13.6.4 del código

$$\frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{22}{18} = 1.22$$

$$\alpha_{f1} = \alpha_f \text{ en la dirección del claro corto} = 3.32$$

$$\alpha_{f1}\frac{\ell_2}{\ell_1} = (3.32)(1.22) = 4.05$$

La porción del momento negativo interior que va a ser resistido por la franja de columna, según la tabla 16.3 de este capítulo, por interpolación es $(0.68)(-157) = -107$ pie-klb. Este resultado también puede obtenerse de la ecuación

$$\%^-_{\text{col int}} = 75 + 30\left(\frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1}\right)\left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right) = 75 + 30(1)\left(1 - \frac{22}{18}\right) = 68.3\%$$

$$M^-_{\text{col int}} = 0.683(157) = 107 \text{ pie-klb}$$

Observe que como $\alpha_{f1}\ell_2/\ell_1 = 4.05 > 1$, se usó un valor de 1 en la ecuación anterior.

De estos -107 pie-klb se asigna 85% a la viga (artículo 13.6.5 del código) o sea -91 pie-klb y 15% a la losa o sea -16 pie-klb. El momento negativo restante, 157 – 107 = 50 pie-klb, se asigna a la franja central.

La porción del momento positivo interior que va a ser resistido por la franja de columna, según la tabla 16.5 de este capítulo, por interpolación es: $(0.68)(+84) = +57$ pie-klb. El valor de 68% también se puede obtener de la ecuación de la tabla 16.5. De estos 57 pie-klb, se asignan 85% a la viga (código 13.6.5) o sea $+48$ pie-klb y 15% a la losa o sea $+9$ pie-klb. El momento positivo restante, 84 – 57 = 27 pie-klb, va a la franja central.

4. Momentos para la dirección del claro corto, centrando en la viga de borde

$$M_o = \frac{(q_u 1_2)(1_n)^2}{8} = \frac{(0.312)(11.625)(16.75)^2}{8} = 127 \text{ pie-klb}$$

a) Dividiendo este momento estático de diseño en porciones negativa y positiva, según la sección 13.6.3.2 del código

momento negativo de diseño = (0.65)(127) = −83 pie-klb

momento positivo de diseño = (0.35)(127) = +44 pie-klb

b) Asignando estos momentos exteriores a franjas de columna y viga, según la sección 13.6.4 del código

$$\frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{22}{18} = 1.22$$

$$\alpha_{f1} = \alpha_{f1} \text{ para la viga de borde} = 5.36$$

$$\alpha_{f1}\frac{\ell_2}{\ell_1} = (5.36)(1.22) = 6.54$$

5. La porción del momento negativo exterior que va a ser resistido por la franja de columna, según la tabla 16.4 de este capítulo, por interpolación es $(0.68)(-83) = -56$ pie-klb. De estos -56 pie-klb se asigna 85% a la viga (código 13.6.5) o sea -48 pie-klb y 15% a la losa o sea -8 pie-klb. El momento negativo restante, $83 - 56 = -27$ pie-klb, se asigna a la franja central.

La porción del momento exterior positivo que va a ser resistido por la franja de columna, según la tabla 16.5 o la ecuación para la tabla 16.5, es $(0.68)(+44) = +30$ pie-klb. De estos 30 pie-klb se asignan 85% a la viga o sea $+26$ pie-klb y 15% a la losa o sea $+5$ pie-klb. El momento positivo restante, $44 - 30 = +14$ pie-klb, se asigna a la franja central.

En la tabla 16.7 se presenta un resumen de los momentos en el claro corto.

6. Momentos en la dirección del claro largo

$$M_o = \frac{(q_u\ell_2)(\ell_n)^2}{8} = \frac{(0.312)(18)(20.75)^2}{8} = 302.3 \text{ pie-klb}$$

Tabla 16.7 Momentos en el claro corto (pie-klb).

	Momentos en franja de columna		Momentos en la franja central de la losa
	Viga	Losa	
Franja interior losa-viga			
Negativo	–91	–16	–50
Positivo	+48	+9	+30
Franja exterior losa-viga			
Negativo	–48	–9	–27
Positivo	+26	+5	+16

a) De la tabla 16.2 de este capítulo (código 13.6.3.3.) para un claro extremo con vigas entre soportes interiores:

$$\text{Momento negativo interior factorizado} = 0.70M_o = -(0.70)(302.3) = -212 \text{ pie-klb}$$

$$\text{Momento positivo factorizado} = 0.57M_o = +(0.57)(302.3) = 172 \text{ pie-klb}$$

$$\text{Momento negativo exterior factorizado} = 0.16M_o = -(0.16)(302.3) = -48 \text{ pie-klb}$$

Estos momentos factorizados pueden modificarse 10% de acuerdo con la sección 13.6.7 del código, pero esta reducción se desprecia aquí.

b) Asignación de estos momentos a las franjas de columna y viga

$$\frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{18}{22} = 0.818$$

$$\alpha_{f1} = \alpha_{f1} \text{ para la viga de } 22' = 4.06$$

$$\alpha_{f1}\frac{\ell_2}{\ell_1} = (4.08)(0.818) = 3.32$$

A continuación se da una expresión para β_t. Es la relación de la rigidez a torsión de la sección de una viga de borde, a la rigidez a flexión de una losa de ancho igual a la longitud del claro de la viga medido entre centros de soportes.

$$\beta_t = \frac{E_{cb}C}{2E_{cs}I_s}$$

La ecuación contiene un término C, que es una propiedad del área de la sección transversal del brazo de torsión, al estimar la resistencia a torsión.

$$C = \Sigma\left(1 - 0.63\frac{x}{y}\right)\frac{x^3y}{3}$$

donde x es la longitud del lado corto de cada rectángulo y y es la longitud del lado largo de cada rectángulo. La viga exterior considerada aquí se describe en la sección 13.2.4 del código ACI y se muestra en la figura 16.18, junto con el cálculo de C. La sección transversal de la viga puede dividirse en rectángulos de otra manera, pero la configuración mostrada conduce al mayor valor de C.

$$\beta_t = \frac{E_{cb}C}{2E_{cs}I_s} = \frac{(E_c)(12\ 605)}{(2)(E_c)(3\ 888)} = 1.62$$

La porción del momento interior negativo de diseño asignado a la franja de columnas, de la tabla 16.3, por interpolación o mediante la ecuación es $(0.80)(-212) = -170$ pie-klb. De estos -170 pie-klb se asigna 85% a la viga (13.6.5 del código) o sea -145 pie-klb y 15% a la losa o sea -26 pie-klb. El momento negativo restante, $-212 + 170 = -42$ pie-klb, se asigna a la franja central.

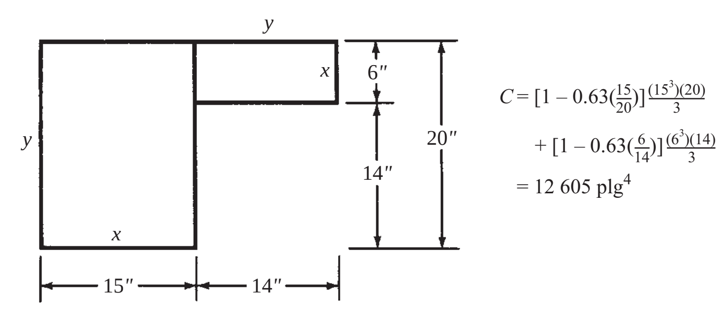


Figura 16.18 Evaluación de *C*.

La porción del momento positivo de diseño que debe resistir la franja de columnas, de acuerdo con la tabla 16.5, es $(0.80)(172) = +138$ pie-klb. De estos 138 pie-klb se asigna 85% a la viga o sea $(0.85)(138) = 117$ pie-klb y 15% a la losa o sea $+21$ pie-klb. El momento positivo restante, $172 - 138 = 34$ pie-klb, se asigna a la franja central.

La porción del momento negativo exterior asignado a la franja de columna se obtiene por media interpolación doble de la tabla 16.4 y es $(0.86)(-48) = -42$ pie-klb. De estos -42 pie-klb se asigna 85% a la viga o sea -36 pie-klb y 15% a la losa o sea -6 pie-klb. El momento negativo restante, -6 pie-klb, se asigna a la franja central.

En la tabla 16.8 se presenta un resumen de los momentos del claro largo.

7. Revisión de la resistencia por cortante en la losa a una distancia *d* de la cara de la viga. Se supone que la fuerza cortante es producida por la carga sobre el área tributaria mostrada en la figura 16.19, considerando una franja de 12 plg de ancho como se indica.

$$d \text{ promedio} = h - \text{recubrimiento} - \text{un diámetro de la varilla} = 6.00 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 4.75 \text{ plg}$$

Tabla 16.8 Momentos en el claro largo (pie-klb).

	Momentos en franja de columna		Momentos en la franja central de la losa
	Viga	Losa	
Negativo interior	–145	–26	–42
Positivo	+117	+21	+34
Negativo exterior	–36	–6	–6

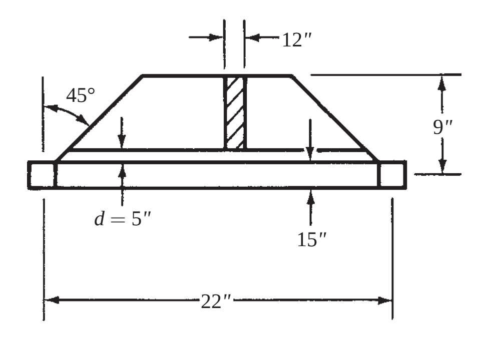


Figura 16.19

$$V_u = (0.312)\left(9 - \frac{7.5}{12} - \frac{4.75}{12}\right) = 2.49 \text{ klb} = 2\,490 \text{ lb}$$

$$\phi V_c = (0.75)(1.0)(2\sqrt{3\,000})(12)(4.75) = 4\,684 \text{ lb} > 2\,490 \text{ lb} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

16.12 TRANSMISIÓN DE MOMENTOS Y CORTANTES ENTRE LOSAS Y COLUMNAS

En muchas ocasiones la carga máxima que una losa en dos direcciones puede soportar, depende de la resistencia de la unión entre la columna y la losa. No sólo se transfiere la carga por cortante de la losa a la columna a través de un área alrededor de la columna, sino que también por medio de momentos que tienen que transferirse. La situación con los momentos es generalmente más crítica en las columnas exteriores.

Si existen momentos que deben transferirse, éstos ocasionarán esfuerzos cortantes en las losas, como se describirá en esta sección. Además, deben considerarse las fuerzas cortantes que resultan de la transferencia de los momentos en el diseño del refuerzo lateral de las columnas (es decir, estribos y espirales), como se indica en la sección 11.10.1 del código.

Cuando las columnas soportan losas sin vigas (es decir, losas o placas planas), la situación de la transferencia de carga entre las losas y las columnas es extremadamente *crítica*. Tal vez si no se diseñan las áreas y posiciones exactas del refuerzo por flexión correctamente para toda la losa, la redistribución inelástica de los momentos (artículo 13.6.7 del ACI) todavía permita que el sistema se comporte adecuadamente; pero si el diseño de la resistencia por cortante es incorrecto, los resultados pueden ser catastróficos.

La gravedad del problema se muestra en la figura 16.20, donde puede verse que si no hay viga de fachada, el momento total de la losa exterior tiene que transferirse a la columna. La transferencia se efectúa tanto por flexión como por fuerza cortante excéntrica, esta última localizada a una distancia de aproximadamente $d/2$ de la cara de la columna.

La sección 13.6.3.6 del código establece que para la transferencia de momento entre la losa y el borde de la columna, el momento por carga de gravedad por transferirse, deberá ser de $0.3M_o$ (donde M_o es el momento estático factorizado).

Cuando las cargas de gravedad, las cargas de viento, las cargas sísmicas u otras fuerzas laterales ocasionan la transferencia de un momento desbalanceado entre una losa y una columna, una parte del momento igual a $\gamma_f M_u$ será transferido por flexión, de acuerdo con la sección 13.5.3.2 del ACI. Con base

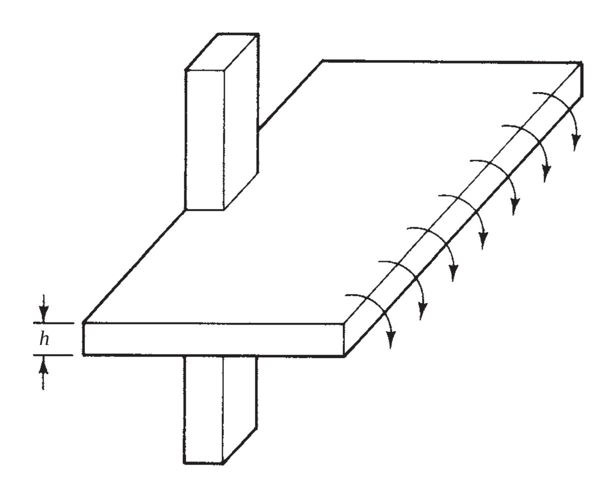


Figura 16.20

en pruebas y en la experiencia, se debe considerar que esta transferencia tiene lugar dentro de un ancho efectivo de losa entre las líneas que están situadas a 1.5 veces el espesor de la losa o del ábaco, en las caras opuestas externas de la columna o capitel. El valor de γ_f debe tomarse igual a

$$\gamma_f = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}} \qquad \text{(Ecuación 13-1, ACI)}$$

Con referencia hecha a la figura 16.21, b_1 es la longitud del perímetro por cortante $(c_1 + d)$ que es perpendicular al eje de flexión y b_2 es la longitud del perímetro por cortante $(c_2 + d)$ paralelo al eje de flexión. Además, c_1 es el ancho de la columna perpendicular al eje de flexión, mientras que c_2 es el ancho de la columna paralelo al eje de flexión.

El resto del momento desbalanceado, llamado $\gamma_v M_u$ por el código, debe transferirse por excentricidad del cortante respecto al centroide de la sección crítica.

$$\gamma_v = 1 - \gamma_f \qquad \text{(Ecuación 11-39, ACI)}$$

A partir de esta información, los esfuerzos cortantes debidos a la transferencia de momento por excentricidad del cortante varían linealmente respecto al centroide de la sección crítica descrita en el último párrafo y deben sumarse a las fuerzas cortantes usuales factorizadas. (En otras palabras, se tiene el caso usual de cortante por penetración, además de una torsión debida a la transferencia del momento que incrementa el cortante.) Los esfuerzos de corte resultantes no deben exceder a $\phi V_n = \frac{\phi V_c}{b_o d}$ para miembros sin refuerzo para cortante ni a $\phi V_n = \frac{\phi(V_c + V_s)}{b_o d}$ para miembros con refuerzo para cortante que no sean crucetas de cortante. V_c en las dos ecuaciones anteriores es el menor valor de las ecuaciones 11-33, 11-34 u 11-35 del ACI (sección 12.6 de este libro).

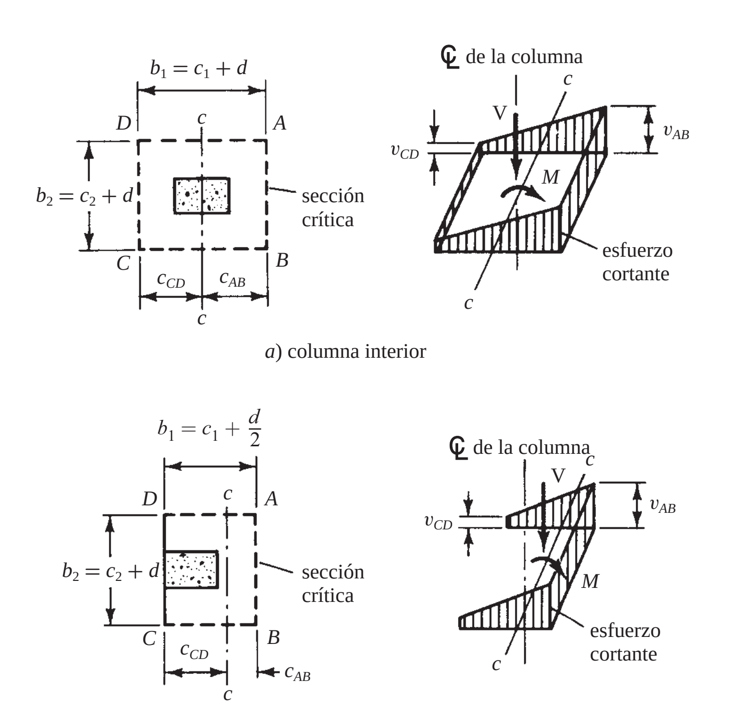


Figura 16.21 Distribución supuesta del esfuerzo cortante. (Figura R11.11.7.2 del ACI.)

Los esfuerzos combinados se calculan con las expresiones que siguen, haciendo referencia a la figura 16.21 y al comentario R11.11.7.2 del ACI:

$$v_u \text{ a lo largo de } AB = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\gamma_v M_u c_{AB}}{J_c}$$

$$v_u \text{ a lo largo de } CD = \frac{V_u}{A_c} - \frac{\gamma_v M_u c_{CD}}{J_c}$$

En estas expresiones, A_c es el área de concreto a lo largo de la sección crítica supuesta. Por ejemplo, para la columna interior de la figura 16.21(a), es igual a $(2a + 2b)d$ y para la columna de borde de la figura 16.21(b), es igual a $(2a + b)d$.

J_c es una propiedad análoga al momento polar de inercia respecto al eje z-z de las áreas de cortante localizadas alrededor de la periferia de la sección crítica. Primero se localiza el centroide del área A_f de cortante tomando momentos. El centroide se muestra con las distancias c_{AB} y c_{CD} en ambas partes (a) y (b) de la figura 16.21. Luego se calcula el valor de J_c para las áreas de cortante. Para la columna interior de la parte (c) es

$$J_c = d\left[\frac{a^3}{6} + \frac{ba^2}{2}\right] + \frac{ad^3}{6}$$

y para la columna de borde de la parte b) es

$$J_c = d\left[\frac{2a^3}{3} - (2a + b)(c_{AB})^2\right] + \frac{ad^3}{6}$$

El ejemplo 16.5 muestra los cálculos de la transferencia de la fuerza cortante y el momento para una columna exterior.

El comentario (R11.11.7.3) establece que la sección crítica descrita para la acción en dos direcciones de losas localizada a $d/2$ del perímetro de la columna, es apropiada para el cálculo de los esfuerzos cortantes causados por la transferencia del momento, aun cuando se usen crucetas de cortante. Las secciones críticas serán entonces diferentes entre sí para el cortante directo y el de penetración, debido a la transferencia del momento.

El refuerzo total que se proporcionará en la franja de columnas debe incluir un refuerzo adicional concentrado sobre la columna, para resistir la parte del momento flexionante transferido por flexión = $\gamma_f M_u$.

EJEMPLO 16.5

Para la losa plana de la figura 16.22, calcular el acero negativo requerido en la franja de columna para el borde exterior indicado. Revísese también la losa para transferencia de momento y cortante en la columna exterior; $f'_c = 3\,000$ lb/plg², $f_y = 60\,000$ lb/plg² y carga viva = 100 lb/pie². Se ha seleccionado ya una losa de 8 plg con d = 6.75 plg

SOLUCIÓN **1.** Calcular w_u y $M_{o\ell}$.

$$w_d = \left(\frac{8}{12}\right)(150) = 100 \text{ lb/pie}^2$$

$$w_\ell = 100 \text{ lb/pie}^2$$

$$w_u = (1.2)(100) + (1.6)(100) = 280 \text{ lb/pie}^2$$

$$M_{o\ell} = \frac{q_u \ell_2 \ell_n^2}{8} = \frac{(0.280)(18)(18.75)^2}{8} = 221.5 \text{ pie-klb}$$

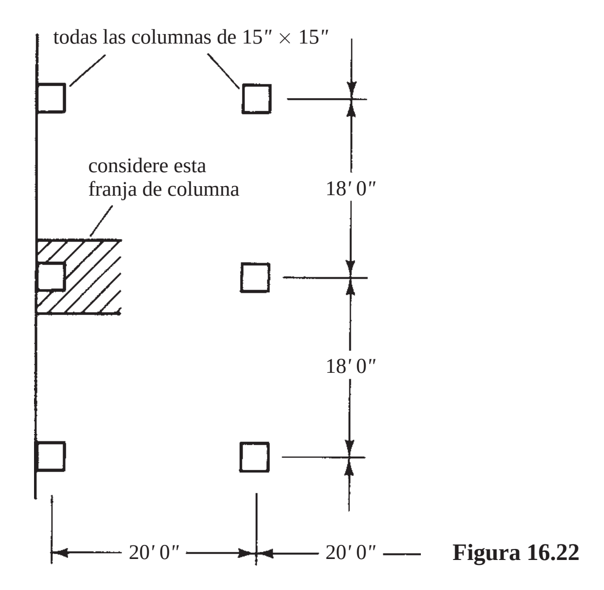


Figura 16.22

2. Determinar el momento negativo exterior de acuerdo con la sección 13.6.3.3.

$$-0.26M_{o\ell} = -(0.26)(221.5) = 57.6 \text{ pie-klb}$$

$$\text{Ancho de la franja de columna} = (0.50)(18) = 9' - 0'' = 108''$$

3. La sección 13.6.4.2 del ACI muestra que 100% del momento negativo exterior debe ser resistido por la franja de columna.
4. Diseño del acero de la franja de columna.

$$\frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{(12)(57\,600)}{(0.9)(108)(6.75)^2} = 156.1$$

$$\rho = 0.0027 \text{ de la tabla A.12 del apéndice}$$

$$A_s = (0.0027)(108)(6.75) = 1.97 \text{ plg}^2$$

Usar 10 #4

5. Diseñar la transferencia de momento.
   a) El código (13.5.3.2) establece que deben agregarse varillas adicionales sobre la columna en un ancho = ancho de columna + $(2)(1.5h) = 15 + (2)(1.5 \times 8) = 39''$.
   b) El refuerzo adicional requerido sobre las columnas debe diseñarse para un momento = $\gamma_f M_u$. En la ecuación 13-1 del ACI que sigue, b_1 y b_2 son las dimensiones laterales del perímetro b_o en la sección 11.11.1.2 del ASCI (véase la figura 16.21). En este caso $b_1 = c_1 + d/2 = 15 + 6.75/2 = 18.375$ plg. En la dirección perpendicular, $b_2 = c_2 + d = 15 + 6.75 = 21.75$ plg.

$$\gamma_f = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{18.375}{21.75}}} = 0.62 \qquad \text{(Ecuación 13-1, ACI)}$$

$$\gamma_f M_u = (0.62)(57.6) = 35.7 \text{ pie-klb}$$

   c) Agréguense cuatro varillas #4 en el ancho de 39″ y revísese si la situación de transferencia de momento es satisfactoria. Para resistir los 35.7 pie-klb, tenemos ahora las cuatro varillas #4 recién añadidas más

cuatro #4. Este número de varillas se obtiene tomando la relación de 39″/108″ veces 10 varillas para obtener 3.6 varillas y redondeando a cuatro. El número total de varillas agregadas para el diseño de la franja de columnas es ocho varillas #4 (1.60 plg^2).

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{(1.57)(60)}{(0.85)(3)(39)} = 0.947''$$

$$\phi M_n = M_u = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right)$$

$$= \frac{(0.9)(1.57)(60)\left(6.75 - \frac{0.947}{2}\right)}{12}$$

$$= 44.3 \text{ pie-klb} > 35.7 \text{ pie-klb} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

6. Calcule el esfuerzo cortante combinado en la columna exterior debido al cortante y a la transferencia de momento.

a) La sección 13.6.3.5 del ACI requiere que se transfiera un momento de $(0.3M_o)(\gamma_v)$ de la losa a la columna por excentricidad de cortante. El momento total que debe transferirse es $0.3(M_o) = 0.3(221.5) =$ 66.45 pie-klb.

b) Fracción del momento desbalanceado tomado por excentricidad del cortante $= \gamma_v(0.3M_o)$.

$$\gamma_v = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{18.375}{21.75}}} = 0.38$$

$$\gamma_v M_n = (0.38)(66.45) = 25.25 \text{ pie-klb}$$

c) Cálculo de las propiedades de la sección crítica por cortante (figura 16.23).

$$A_c = (2a + b)d = (2 \times 18.375 + 21.75)(6.75) = 394.875 \text{ plg}^2$$

$$c_{AB} = \frac{(2)(18.375)(6.75)\left(\frac{18.375}{2}\right)}{394.875} = 5.77 \text{ plg}$$

$$J_c = d\left[\frac{2a^3}{3} - (2a + b)(c_{AB})^2\right] + \frac{ad^3}{6}$$

$$= 6.75\left[\frac{(2)(18.375)^3}{3} - (2 \times 18.375 + 21.75)(5.77)^2\right] + \frac{(18.375)(6.75)^3}{6}$$

$$= 15\,714 \text{ plg}^4$$

Figura 16.23

d) Calcular la fuerza cortante por carga de gravedad que ha de transferirse a la columna exterior.

$$V_u = \frac{q_u \ell_1 \ell_2}{2} = \frac{(0.280)(18)(20)}{2} = 50.4 \text{ klb}$$

e) Esfuerzos combinados.

$$\begin{aligned} v_u &= \frac{V_u}{A_c} + \frac{\gamma_v M_n c_{AB}}{J_c} \\ &= \frac{50\,400}{394.875} + \frac{(12 \times 25\,250)(5.77)}{15\,714} \\ &= 128 + 111 = 239 \text{ lb/plg}^2 \\ &> 4\sqrt{3\,000} = 219 \text{ lb/plg}^2 \end{aligned}$$

No sirve

∴ Es necesario tomar una o más de las siguientes medidas: incrementar el peralte de la losa, usar un concreto de mayor resistencia, usar un ábaco o instalar una cruceta de cortante.

Momentos factorizados en columnas y muros

Si existe una carga desbalanceada en dos claros adyacentes, el resultado será un momento adicional en la conexión de las paredes y columnas a las losas. El código (13.6.9.2) proporciona la ecuación aproximada listada al final de este párrafo para considerar los efectos de tales situaciones. Esta ecuación en particular se obtuvo para dos claros adyacentes, uno mayor que el otro. Se supuso que el claro mayor estaba cargado con carga muerta más media carga viva y que se aplicó sólo carga muerta al claro menor.

$$M_u = 0.07[(q_{du} + 0.5q_{\ell u})\ell_2 \ell_n^2 - q_{Du'} \ell_2'(\ell_n')^2] \qquad \text{(Ecuación 13-7, ACI)}$$

En esta expresión, q'_{du}, ℓ'_2 y ℓ'_n son para el claro corto. El valor resultante aproximado debe usarse en columnas interiores para la transferencia del momento desbalanceado por carga de gravedad, a menos que se use un análisis teórico más exacto.

16.13 ABERTURAS EN LOS SISTEMAS DE LOSAS

De acuerdo con el código (13.4) pueden usarse aberturas en los sistemas de losas si se proporciona una resistencia adecuada y si se satisfacen todas las condiciones de servicio del ACI, incluyendo las deflexiones.

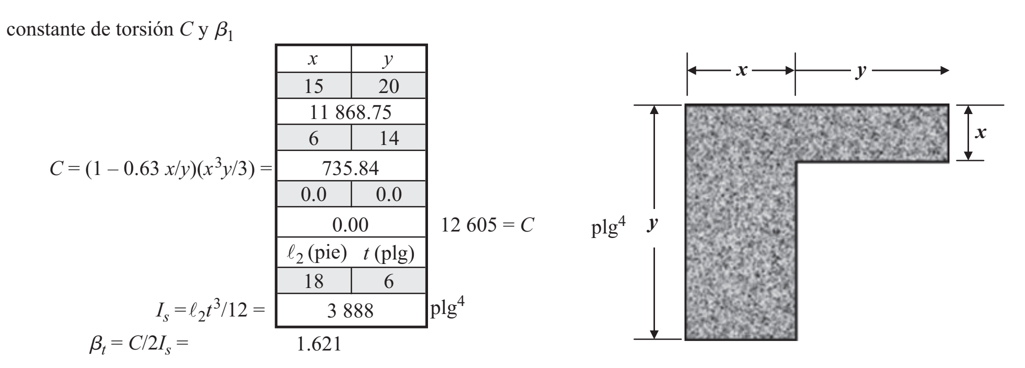
1. Si las aberturas se localizan en el área común a la intersección de las franjas centrales, será necesario proporcionar la misma cantidad total de refuerzo en la losa que se usaría si no tuviera una abertura.
2. Para aberturas en la intersección de las franjas de columnas, el ancho de las mismas no deberá ser mayor que un octavo del ancho de la franja de columna en cualquier claro. Una cantidad de refuerzo igual al interrumpido por la abertura, debe colocarse en los lados de ésta.
3. Las aberturas en un área común a una franja de columna y a una franja central, no deben interrumpir más de un cuarto del refuerzo de cualquier franja. Una cantidad de refuerzo igual a la interrumpida se debe colocar alrededor de los lados de la abertura.
4. Deben cumplirse los requisitos de cortante de la sección 11.11.6 del código.

16.14 EJEMPLOS CON COMPUTADORA

EJEMPLO 16.6

Use la hoja de cálculo de Excel del capítulo 16 para resolver el problema 16.4.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo de Excel proporcionada para el capítulo 16 y abra la hoja de trabajo Losas en dos direcciones. Ingrese los valores solamente para las celdas sombreadas en amarillo. Observe que deben ingresarse valores para β_t y α_{f1}. Para obtener β_t, abra la hoja de trabajo Constante de torsión C. Ingrese los valores en las celdas sombreadas en amarillo.



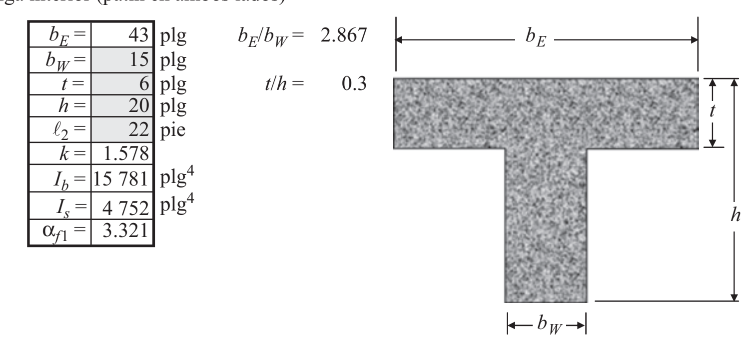
constante de torsión C y β_1

	x	y	
	15	20	
	11 868.75		
	6	14	
$C = (1 - 0.63\, x/y)(x^3y/3) =$	735.84		
	0.0	0.0	
	0.00		12 605 = C plg^4
	ℓ_2 (pie)	t (plg)	
	18	6	
$I_s = \ell_2 t^3/12 =$	3 888		plg^4
$\beta_t = C/2I_s =$	1.621		

Si hay patines en ambos lados del alma, puede ingresarse un tercer valor de x y y. En este caso, sus valores son cero.

El valor de *af* se obtiene de la hoja de trabajo Alfa viga T. Los resultados de los cálculos de α_f en el paso 2(d) del ejemplo 16.4 se muestran en seguida.

viga interior (patín en ambos lados)



$b_E =$	43	plg	$b_E/b_W =$	2.867
$b_W =$	15	plg		
$t =$	6	plg	$t/h =$	0.3
$h =$	20	plg		
$\ell_2 =$	22	pie		
$k =$	1.578			
$I_b =$	15 781	plg^4		
$I_s =$	4 752	plg^4		
$\alpha_{f1} =$	3.321			

viga de borde

$b_E =$	29	plg	$b_E/b_W =$	1.933
$b_W =$	15	plg		
$t =$	6	plg	$t/h =$	0.3
$h =$	20	plg		
$\ell_2 =$	22	pie		
$k =$	1.347			
$I_b =$	13 468	plg^4		
$I_s =$	2 511	plg^4		
$\alpha_{f1} =$	5.363			

Los otros valores α_f se obtienen simplemente cambiando ℓ_2 de 22 a 18 pies. Regrese a la hoja de trabajo del ejemplo 16.6 e ingrese $\beta_t = 1.62$ y $\alpha_{f1} = 3.32$. Ahora determine de la tabla 16.2 qué caso (del 1 al 5) es aplicable a

su ejemplo. En esta situación, el caso (2) es aplicable ya que hay vigas entre todos los apoyos. Ingrese 0.16, 0.57 y 0.70 en las celdas sombreadas en el renglón 11. Además de la información determinada en el ejemplo 16.4, la hoja de cálculo también determina el área requerida del acero de refuerzo en toda la losa.

Losa en dos direcciones

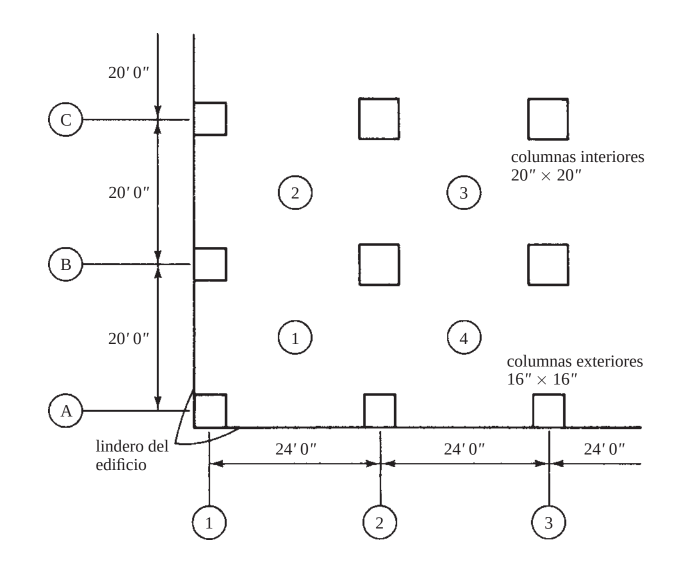
ancho, plg	54	32.5	43	32.5	54
	Momentos en el claro exterior (pie-klb)			Claro interior (pie-klb)	
% de M_o de la tabla 16.2	16.00	57.00	70.00	65.0	35.0
Momento total en ….(pie-klb)	48.36	172.29	211.58	196.47	105.79
Momento en la franja de columnas	42.24	138.61	170.22	158.07	85.11
Porción de viga	35.90	117.82	144.69	134.36	72.35
Losa de la franja de columnas	6.34	20.79	25.53	23.71	12.77
Momento en la franja central	6.13	33.67	41.35	38.40	20.68
Viga $R_n = M_u/\rho_{bd}{}^2$	104.20	119.29	419.96	389.97	73.25
ρ	0.00177	0.00204	0.00770	0.00709	0.00124
$A_s = \rho_{bd}$, plg^2	0.47	1.53	2.02	1.86	0.93
Losa de la franja de columnas R_n =	57.60	189.03	232.14	215.56	116.07
ρ	0.00097	0.00328	0.00406	0.00376	0.00198
A_s - plg^2 la mitad a cada lado de la viga en la losa de la franja de columnas	0.702	1.012	1.255	1.161	0.702
Losa de la franja central R_n =	33.52	184.26	226.28	210.12	113.14
ρ	0.00056	0.00319	0.00396	0.00366	0.00193
A_s - plg^2 (la mitad en cada franja central)	1.167	1.637	2.029	1.877	1.167

ℓ_1 =	22	pie (claro del eje central)
ℓ_2 =	18	pie (claro transversal)
c_1 =	15	plg columna
c_2 =	15	plg dimensión
t =	6	plg (espesor de losa)
d_s =	4.75	plg ("d" de la losa)
ℓ_n =	20.75	pie (claro libre)
b_w =	15	plg (ancho del alma de la viga)
h =	20	plg (peralte de la viga)
b_{eff} =	43	plg
y =	7.487	plg
I_g =	15 781	plg^4
I_s =	3 888	plg^4
d_b =	17.5	plg ("d" de la viga)
f'_c =	3	klb/plg^2
f_y =	60	klb/plg^2
m =	23.53	
w_D =	100	lb/pie^2
w_L =	120	lb/pie^2
w_u =	312	lb/pie^2
M_{ol} =	302.3	pie-klb
β_t =	1.62	no mayor que 2.5
α_{f1} =	4.06	
$\alpha_{f12}l/\ell_1$ =	1.00	
T & S %	0.0018	

La parte del claro de borde de la hoja de cálculo se formula para los claros de borde (parte 4 del ejemplo 16.4). Ingrese la información de la misma manera que para la parte superior de la hoja de trabajo.

PROBLEMAS

16.1 Usando el código ACI, determine el espesor mínimo requerido para los tableros ① y ③ del piso de placa plana mostrado en la figura acompañante. No se usarán vigas de borde a lo largo de los bordes exteriores del piso. $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2. (*Resp.:* 9.07″ y 8.12″.)



16.2 Suponga que el sistema de piso del problema 16.1 va a soportar una carga viva de servicio de 80 lb/pie^2 y una carga muerta de servicio de 60 lb/pie^2, además de su propio peso. Si las columnas son de 10 pies de longitud, determine el espesor requerido para una placa plana interior para el tablero 3.

16.3 Repita el problema 16.2 para el tablero ① en la estructura del problema 16.1. Incluya el espesor requerido por cortante en una dirección y en dos direcciones. (*Resp.:* Use una losa de 10 plg.)

16.4 Determine el refuerzo requerido en la franja de columnas y en las franjas centrales para la línea de columnas Ⓑ en el problema 16.1. Use un espesor de losa de 10 plg y varillas del #6. Determine las separaciones teóricas y las separaciones prácticas en el tablero exterior (de la línea de columnas ① a la ② y en el tablero interior (de la línea de columnas ② a la ③.

16.5 Use la hoja de trabajo de placas planas de la hoja de cálculo del capítulo 16 para trabajar el problema 16.4. (*Resp.:* $A_s = 6.53$ plg^2 en la franja de columnas en la línea de columnas ② ∴ use varillas #6 a 8 plg en la parte superior de la losa.)

17

Losas en dos direcciones, método del marco equivalente

17.1 DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS PARA MIEMBROS NO PRISMÁTICOS

La mayor parte de los problemas de distribución de momentos que hasta ahora hemos tratado, han tenido que ver con miembros prismáticos en los cuales se usaron factores de transporte de $\frac{1}{2}$, momentos de empotramiento para cargas uniformes de $w_u\ell^2/8$, factores de rigidez I/ℓ, etc. Si se tienen miembros no prismáticos, como los de la viga continua en la figura 17.1, entonces ninguno de los valores anteriores es aplicable.

Los factores de transporte, los momentos de empotramiento, etc., se pueden obtener mediante varios métodos, tales como el de área-momento y el de la analogía de la columna.[1] Sin embargo, existen tablas en donde pueden obtenerse muchos de estos valores. Las tablas A.16 a A.20 del apéndice A abarcan la mayor parte de los casos encontrados con el método del marco equivalente.

Antes de estudiar el método del marco equivalente, balancearemos en el ejemplo 17.1 un conjunto de momentos de empotramiento supuestos para la viga no prismática mostrada en la figura 17.1. El propósito del autor al presentar este ejemplo es mostrar al lector cómo puede aplicarse la distribución de momentos al análisis de estructuras que constan de miembros no prismáticos.

EJEMPLO 17.1

Para el miembro no prismático continuo de la figura 17.1 se han supuesto los factores de transporte (C.O.: *carry-over*), los factores de rigidez (K) y los momentos de empotramiento (FEM: *fixed-end moments*), mostrados en la figura 17.2. Balancee estos momentos por la distribución de momentos. Posteriormente, se mostrará en el ejemplo 17.2 cómo determinar estos factores para sistemas de losas de dos direcciones. El propósito de este ejemplo es demostrar el método de distribución de momentos cuando se trata de miembros no prismáticos.

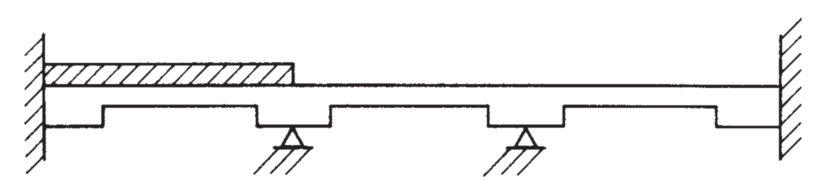


Figura 17.1

[1]McCormac, J.C., 1984, *Structural Analysis*, 4a. ed. (Nueva York: Harper & Row), págs. 333-334, 567-582.

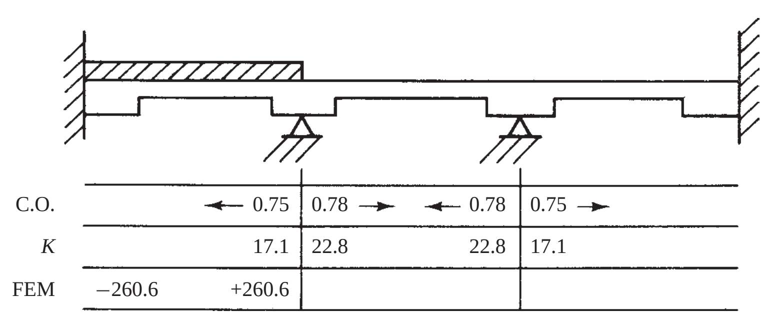
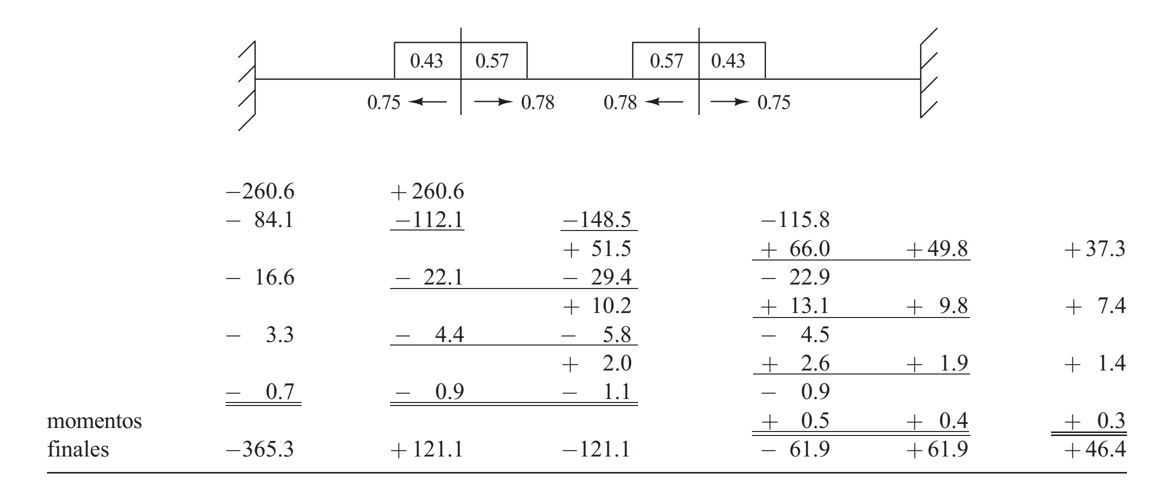


Figura 17.2

SOLUCIÓN



17.2 INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DEL MARCO EQUIVALENTE

Con el ejemplo anterior, el autor espera que el lector haya adquirido una idea general del tipo de cálculos que tendrá que realizar cuando emplee el método del marco equivalente. Se considerará y se analizará por distribución de momentos una parte de un edificio con losas en dos direcciones. Los miembros viga-losa de esta parte de la estructura no serán prismáticos, debido a las columnas, vigas, ábacos, etc., de que constan. Serán entonces muy similares a la viga de la figura 17.1 y los analizaremos de la misma manera.

La única diferencia entre el método directo de diseño y el método del marco equivalente está en la determinación de los momentos longitudinales en los claros del marco rígido equivalente. En tanto que el método directo de diseño implica un ciclo de distribución de momentos, el método del marco equivalente implica varios ciclos de distribución normal de momentos. Los momentos de diseño obtenidos por cualquiera de los dos métodos se distribuyen de la misma manera en las franjas de columnas que en las franjas centrales.

Recordemos que el intervalo en que el método directo de diseño puede aplicarse, está limitado a una razón máxima de la carga viva a la muerta de 2 a 1, y a una razón máxima del claro longitudinal al claro transversal de 2 a 1. Además, las columnas no deben estar descentradas más de 10% de la longitud del claro en la dirección de la excentricidad respecto a cada eje entre las líneas centrales de columnas sucesivas. En el método del marco equivalente no hay tales limitaciones. Esto resulta muy importante,

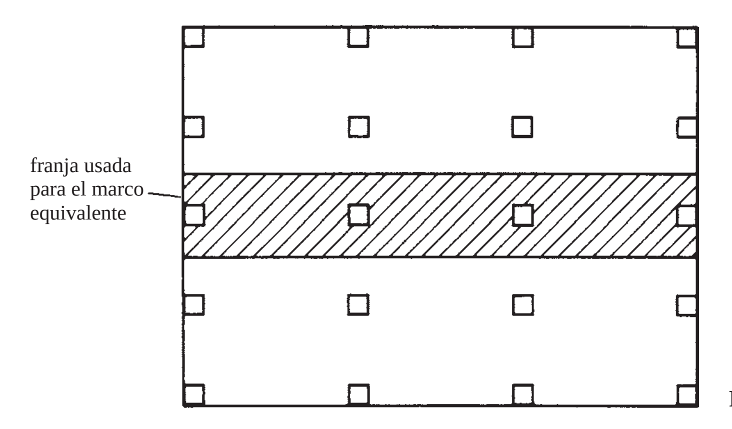


Figura 17.3 Viga de losa.

puesto que muchos sistemas de pisos no cumplen las limitaciones especificadas en el método directo de diseño.

El análisis por cualquiera de los dos métodos dará casi los mismos momentos en aquellas losas que satisfacen los requisitos del método directo de diseño. En tal caso es más sencillo usar el método directo de diseño.

El método del marco equivalente implica el análisis elástico de un marco estructural que consiste en una fila de columnas equivalentes y de losas horizontales con una longitud de un tablero y con un ancho transversal igual a la distancia entre las líneas centrales de los tableros a cada lado de las columnas en consideración. Por ejemplo, puede extraerse para su análisis la franja sombreada del sistema de piso mostrado en la figura 17.3, y la combinación de losa y viga puede analizarse de modo que actúe como un elemento de viga como parte de un marco estructural (véase también la figura 17.4). Esta hipótesis modela en forma aproximada el comportamiento real de la estructura. Es una manera razonablemente exacta para calcular momentos en el marco estructural completo, los cuales pueden entonces distribuirse a la losa y a las vigas. Este proceso se desarrolla en ambas direcciones. Es decir, se hace en la franja sombreada en la figura 17.3 y en todas las franjas paralelas a ésta. Luego, se desarrolla en franjas que son perpendiculares a estas franjas, de ahí el término de sistema de piso en dos direcciones.

Para las cargas verticales, cada piso, junto con las columnas arriba y debajo de éste, se analiza por separado. En este análisis los extremos alejados de las columnas se consideran empotrados. La figura 17.4 muestra una viga de losa típica equivalente, tal como se describe en este capítulo.

Si se tiene un gran número de tableros, el momento en un nodo de una viga de losa puede obtenerse satisfactoriamente suponiendo que el miembro está empotrado a dos tableros de distancia. Esta simplifi-

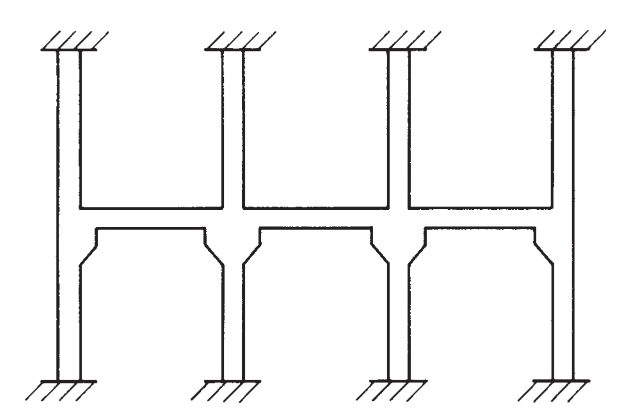


Figura 17.4 Marco equivalente para la franja sombreada de las figura 17.3 por carga vertical.

cación es permisible porque las cargas verticales en un tablero, sólo afectan apreciablemente las fuerzas en ese tablero y en los adyacentes a cada lado.

Para cargas laterales es necesario considerar un marco equivalente que se extienda sobre toda la altura del edificio, porque las fuerzas en un miembro en particular son afectadas por las fuerzas laterales de todos los pisos arriba del considerado. Cuando se consideren fuerzas laterales, será necesario analizar el marco respecto a éstas, y combinar los resultados con los análisis por cargas de gravedad (artículo 13.5.1.3 del código ACI).

El marco equivalente consta de la losa horizontal, de las vigas con claros en la dirección del marco considerado, de las columnas u otros miembros que den apoyo vertical arriba y abajo de la losa, y de cualquier parte de la estructura que permita la transferencia de momentos entre los miembros verticales y horizontales. Se ve que habrá una marcada diferencia entre la transmisión de momentos, cuando una columna proporciona esta transferencia y cuando existe un muro de concreto reforzado monolítico sobre toda la longitud del marco. En los casos intermedios se deben estimar las rigideces a torsión de los miembros, tales como las vigas de borde.

Deben cumplirse los mismos espesores de losa mínimos del ACI que para el método directo de diseño. Los peraltes deben revisarse por cortante en las columnas y en otros apoyos, como lo especifica la sección 11.12 del código. Una vez calculados los momentos, es necesario revisar la transferencia del cortante por momento en los apoyos.

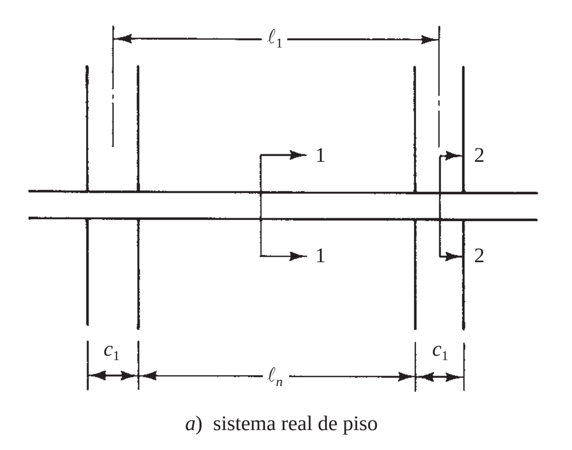
El análisis del marco se hace para la carga viva total de diseño aplicada en todos los claros, a menos que la carga viva existente no factorizada de diseño exceda 0.75 veces la carga muerta no factorizada (artículo 13.7.6 del código ACI). Cuando la carga viva es mayor que 0.75 veces la carga muerta, se usa un patrón de carga con tres cuartas partes de la carga viva para calcular los momentos y las fuerzas cortantes.

Se supone que el momento máximo positivo en el centro de un claro ocurre cuando se aplican las tres cuartas partes de la carga total de diseño en ese tablero y en los claros alternos. Se supone que el momento máximo negativo en la losa en un apoyo, ocurre cuando se aplican las tres cuartas partes de la carga viva total de diseño sólo en los tableros adyacentes. Los valores así obtenidos no deben ser menores que los calculados, suponiendo una carga viga plena en todos los claros.

17.3 PROPIEDADES DE LAS VIGAS LOSAS

Las partes del marco son las losas, vigas, ábacos, columnas, etc. Nuestro primer objetivo es calcular las propiedades de las vigas losas y de la columnas (es decir, los factores de rigidez, los factores de distribución, los factores de transporte y los momentos de empotramiento). Para simplificar este trabajo, el código ACI (13.7.3.1) permite que las propiedades de los miembros del marco se basen en sus momentos de inercia totales y no en sus secciones transformadas o agrietadas. A pesar del uso de las dimensiones totales de los miembros, los cálculos implicados en la determinación de las propiedades de los miembros no prismáticos es aún un trabajo laborioso, y por tanto, veremos que el uso de las tablas existentes es de gran ayuda.

Las figuras 17.5 y 17.6 presentan croquis de estructuras de losas en dos direcciones, junto con los marcos equivalentes que se usarán para su análisis. En la figura 17.5(*a*) se muestra una losa plana con columnas. Las secciones transversales de la estructura se muestran en la parte (*b*) de la figura para la losa, y en la parte (*c*) para la columna. En la parte (*d*) se muestra el marco equivalente que se usará para los cálculos numéricos. En esta figura, E_{cs} es el módulo de elasticidad de la losa de concreto. En la sección 2-2 se muestra una sección ficticia que tendrá una rigidez aproximadamente equivalente a la de la losa y de la columna reales. Se da también una expresión para el I de la sección equivalente. En esta expresión, c_2 es el ancho de la columna en una dirección perpendicular a la dirección del claro, y ℓ_2 es el ancho de la viga losa. El momento de inercia total en la cara del apoyo, se calcula y se divide entre $(1 - c_2/\ell_2)^2$. Esto aproxima el defecto del gran incremento en peralte proporcionado por la columna en la distancia en que la losa y la columna están en contacto.



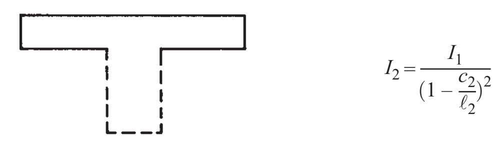
a) sistema real de piso

h

ℓ_2

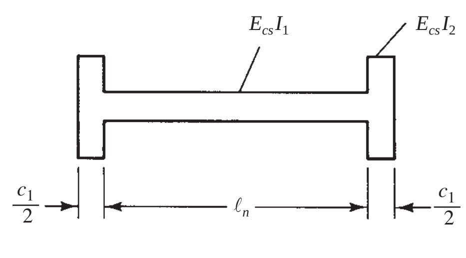
$$I_1 = (\tfrac{1}{12})(\ell_2)(\ell_n)^3$$

b) sección 1-1



$$I_2 = \frac{I_1}{(1 - \frac{c_2}{\ell_2})^2}$$

c) sección equivalente 2-2

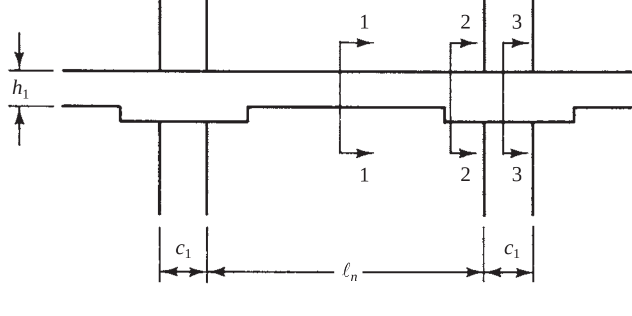


d) diagrama de rigidez de viga losa equivalente

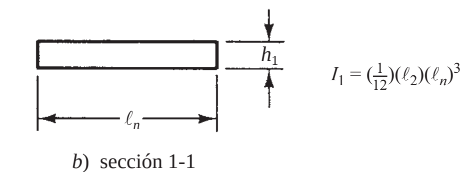
Figura 17.5 Sistema de losa sin vigas.

En la figura 17.6 se muestran croquis similares y valores de *I* para una losa con ábacos. La figura 13.7.23 del comentario ACI de 1983, muestra esta información para sistemas de losas con vigas y para sistemas de losas con capiteles de columnas.

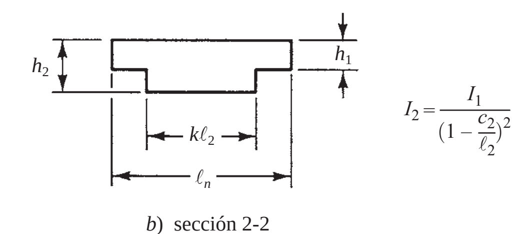
Con el diagrama de rigidez equivalente de vigas losas, es posible usar el método de la viga conjugada, el de la analogía de la columna o algún otro método, para calcular factores de rigidez, factores de



a) sistema real de piso

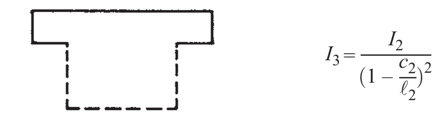


b) sección 1-1



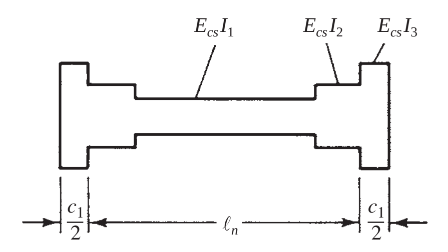
$$I_2 = \frac{I_1}{(1 - \frac{c_2}{\ell_2})^2}$$

b) sección 2-2



$$I_3 = \frac{I_2}{(1 - \frac{c_2}{\ell_2})^2}$$

d) sección equivalente 3-3



e) diagrama de rigidez de viga losa equivalente

Figura 17.6 Sistemas de losa con ábacos.

distribución, factores de transporte y momentos de empotramiento que se usarán en la distribución de momentos. Las tablas A.16 a la A.20 del apéndice A de este texto dan los valores tabulados de estas propiedades para diferentes sistemas de losas. Los ejemplos numéricos de este capítulo hacen uso de esta información.

17.4 PROPIEDADES DE COLUMNAS

Se supone que la longitud de una columna va del punto medio del espesor de la losa de un piso, al punto medio del espesor de la losa en el siguiente piso. Para cálculos de rigideces, los momentos de inercia de las columnas se basan en sus dimensiones totales. Así, si se tienen capiteles, el efecto de sus dimensiones debe usarse para esas partes de las columnas. Las columnas se suponen infinitamente rígidas dentro del espesor de las losas.

La figura 17.7 ilustra un ejemplo de columna junto con su diagrama de rigidez de columna. Se muestran diagramas similares para otras columnas (como cuando se tienen ábacos, capiteles, etc.), en la figura 13.7.4 del comentario ACI de 1983.

Con un diagrama de rigidez de columna, la rigidez por flexión K_c de la columna puede determinarse con el método de la viga conjugada o con otros métodos. En la tabla A.20 del apéndice de este texto se dan valores de K_c para varios casos típicos de columnas.

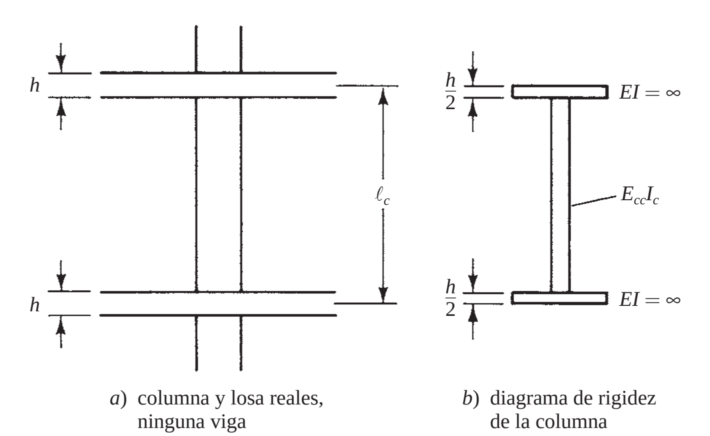
Al aplicar la distribución de momentos a un marco particular, necesitamos las rigideces de la viga de losa, de los miembros a torsión y de la columna equivalente, para poder calcular los factores de distribución. Con este fin son necesarios la columna equivalente, la viga de losa equivalente y los miembros a torsión en un nodo en particular.

En nuestro análisis haremos referencia a la figura 17.8, donde se supone que se tiene una columna arriba y otra abajo del nodo considerado. Así, se supone que la rigidez de la columna (K_c) incluye la rigidez de la columna superior (K_{ct}) y la de la columna inferior (K_{cb}). Entonces, $\Sigma K_c = K_{ct} + K_{cb}$. De manera similar, se supone que la rigidez torsional total es igual a la de los miembros a torsión en ambos lados del nodo ($\Sigma K_t = K_{t1} + K_{t2}$). Para un marco exterior, el miembro a torsión estará localizado en un solo lado.

Se determinó la siguiente expresión aproximada para la rigidez (K_t) del miembro a torsión, usando un análisis tridimensional para varias configuraciones de la losa (R13.7.5 del ACI).

$$K_t = \Sigma \frac{9E_{cs}C}{\ell_2\left(1 - \dfrac{c_2}{\ell_2}\right)^3}$$

En esta fórmula, C debe determinarse con la siguiente expresión dividiendo la sección transversal del miembro a torsión en partes rectangulares y sumando los valores de C de las diferentes partes.



a) columna y losa reales, ninguna viga

b) diagrama de rigidez de la columna

Figura 17.7

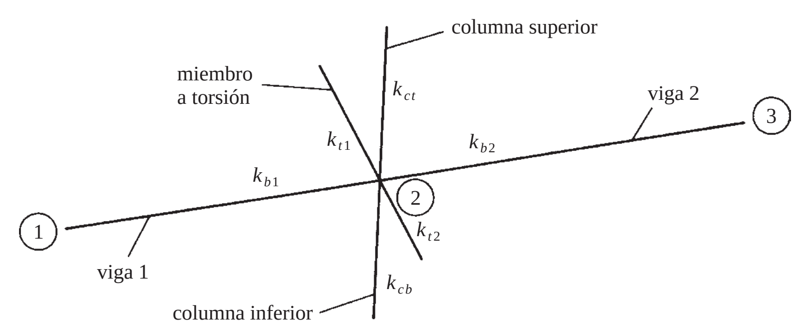


Figura 17.8

$$C = \Sigma\left(1 - 0.63\frac{x}{y}\right)\frac{x^3y}{3} \qquad \text{(Ecuación 13-6, ACI)}$$

Si no hay una viga unida a la columna considerada, se usará como viga efectiva una parte de la losa igual al ancho de la columna o capitel. Si una viga está conectada a la columna, se supondrá una viga T o una L con patines de anchos iguales a la proyección de la viga arriba o debajo de la losa, pero no mayor que cuatro veces el espesor de la losa.

La flexibilidad de la columna equivalente es igual al recíproco de su rigidez, como sigue:

$$\frac{1}{K_{ec}} = \frac{1}{\Sigma K_c} + \frac{1}{\Sigma K_t}$$

$$\frac{1}{K_{ec}} = \frac{1}{K_{ct} + K_{cb}} + \frac{1}{K_c + K_t}$$

Si despejamos de esta expresión la rigidez equivalente de la columna y multiplicamos por K_c, se obtiene:

$$K_{ec} = \frac{(K_{ct} + k_{cb})(k_t + k_t)}{(k_{ct} + k_{cb}) + (k_t + k_t)}$$

Un examen de esta breve deducción muestra que la flexibilidad a torsión del nodo columna losa, reduce la capacidad del nodo para transmitir momentos.

Después de que se obtiene el valor de K_{ec}, los factores de distribución pueden calcularse como sigue; con referencia nuevamente a la figura 17.8:

$$\text{DF para la viga 2-1} = \frac{K_{b1}}{K_{b1} + K_{b2} + K_{ec}}$$

$$\text{DF para la viga 2-3} = \frac{K_{b2}}{K_{b1} + K_{b2} + K_{ec}}$$

$$\text{DF para la columna superior} = \frac{K_{ec}/2}{K_{b1} + K_{b2} + K_{ec}}$$

17.5 EJEMPLO DE PROBLEMA

El ejemplo 17.2 ilustra la determinación de los momentos en una estructura de placa plana por medio del método del marco equivalente.

EJEMPLO 17.2

Usando el método del marco equivalente, determinar los momentos de diseño para la franja sombreada de la estructura de placa plana que se muestra en la figura 17.9 si f'_c = 4 000 lb/plg^2, f_y = 60 000 lb/plg^2, y (carga muerta no factorizada) q_D = 120 lb/pie^2 y (carga viva no factorizada) q_L = 82.5 lb/pie^2. Longitud de las columnas = 9′6″.

SOLUCIÓN

1. Determinamos el espesor requerido por las limitaciones de peralte (9.5.3) del ACI. Suponemos que esto ya se ha hecho y que se ha seleccionado una losa con h = 8″ (d = 6.75″).

2. Revisamos el cortante directo para la columna exterior

$$q_u = 1.2q_D + 1.6q_L = 1.2(120) + 1.6(82.5) = 276 \text{ lb/pie}^2$$

$$V_u \text{ para un ancho de } 12'' = (0.276)\left(11.0 - \frac{7.5}{12} - \frac{6.75}{12}\right) = 2.708 \text{ klb/pie}$$

$$\phi V_c = \frac{(0.75)(2)(1.0)(\sqrt{4\,000})(12)(6.75)}{1\,000} = 7.684 \text{ klb/pie} > 2.708 \text{ klb/pie} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

3. Revisamos el cortante en dos direcciones alrededor de las columnas interiores

$$V_u = \left[(18)(22) - \left(\frac{15 + 6.75}{12}\right)^2\right](0.276) = 108.39 \text{ klb}$$

$$\phi V_c = \frac{(0.75)(4)(1.0)(\sqrt{4\,000})(4)(15 + 6.75)(6.75)}{1\,000} = 111.42 \text{ klb} > 108.39 \text{ klb} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

4. Usando las tablas del apéndice, determinamos los factores de rigidez y los momentos de empotramiento para los claros de 22 pies

$$I_s = \frac{\ell_2 h^3}{12} = \frac{(12 \times 18)(8)^3}{12} = 9\,216 \text{ plg}^4$$

$$E_{cs} = 3.64 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2 \text{ de la tabla A.1 del apéndice}$$

Con referencia a la tabla A.16 del apéndice, observe que los valores de C son dimensiones de las columnas como se muestra en las figuras que acompañan a las tablas A.16 a A.19 del apéndice. Los valores son bastante difíciles de leer.

$$C_{1A} = C_{2A} = C_{1B} = C_{2B} = 15'' = 1.25'$$

$$\frac{C_{1A}}{\ell_1} = \frac{1.25}{22.0} = 0.057$$

$$\frac{C_{1B}}{\ell_1} = \frac{1.25}{22.0} = 0.057$$

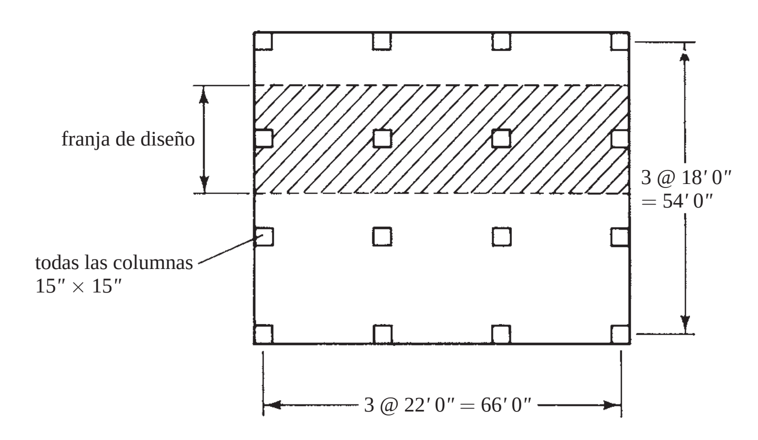


Figura 17.9

Interpolando en la tabla (observando que *A* es para el extremo cercano y *B* para el alejado). Los valores de la tabla son muy aproximados.

$$k_{AB} = 4.17$$

$$k_{AB} = \frac{4.17E_{cs}I_s}{\ell_1} = \frac{(4.17)(3.64 \times 10^6)(9\,216)}{(12)(22)}$$

$$= 529.9 \times 10^6 \text{ plg-lb}$$

$$\text{FEM}_{AB} = \text{FEM}_{BA} = 0.084 q_u \ell_2 \ell_1^2$$

$$= (0.084)(0.276)(18)(22)^2 = 202 \text{ pie-klb}$$

$$C_{AB} = C_{BA} = \text{factor de transporte}$$

$$= 0.503$$

5. Se determina la rigidez de la columna

$$I_c = \left(\frac{1}{12}\right)(15)(15)^3 = 4\,219 \text{ plg}^4$$

$$E_{cc} = 3.64 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2$$

Usando la tabla A.20 del apéndice,

$$\ell_n = 9'6'' = 9.50 \text{ pies}$$

$$\ell_c = 9.50 - \frac{8}{12} = 8.833 \text{ pies}$$

$$\frac{\ell_n}{\ell_c} = \frac{8.833}{9.50} = 0.930 = \frac{\ell_u}{\ell_c}$$

Con referencia a la figura dada con la tabla A.20,

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{4} = 1.00$$

$$k_{AB} = 4.81 \text{ por interpolación}$$

$$K_c = \frac{4.81 E_{cc} I_c}{H} = \frac{(4.81)(3.64 \times 10^6)(4\,219)}{(9.5)(12)}$$

$$= 648 \times 10^6 \text{ plg-lb}$$

$$C_{AB} = 0.55 \text{ por interpolación}$$

6. Se determina la rigidez torsional de la sección de la losa (véase la figura 17.10)

$$C = \Sigma\left(1 - 0.63\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x^3 y}{3}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{0.63 \times 8}{15}\right)\left(\frac{8^3 \times 15}{3}\right)$$

$$= 1\,700 \text{ plg}^4$$

$$K_t = \frac{9E_{cs}C}{\left[\ell_2\left(1 - \frac{c_2}{\ell_2}\right)^3\right]} = \frac{(9)(3.64 \times 10^6)(1\,700)}{\left[(12)(18)\left(1 - \frac{15}{(12)(22)}\right)^3\right]} = 307.3 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2$$

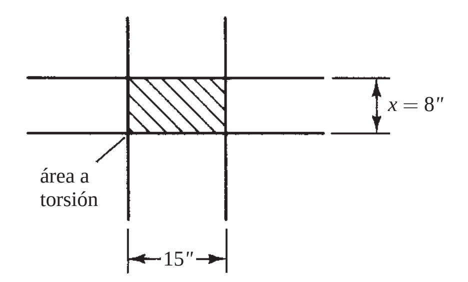


Figura 17.10

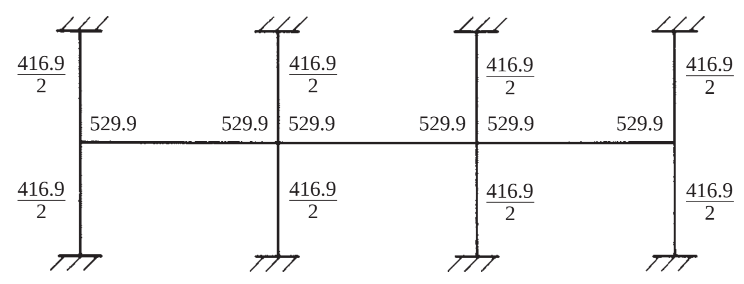


Figura 17.11

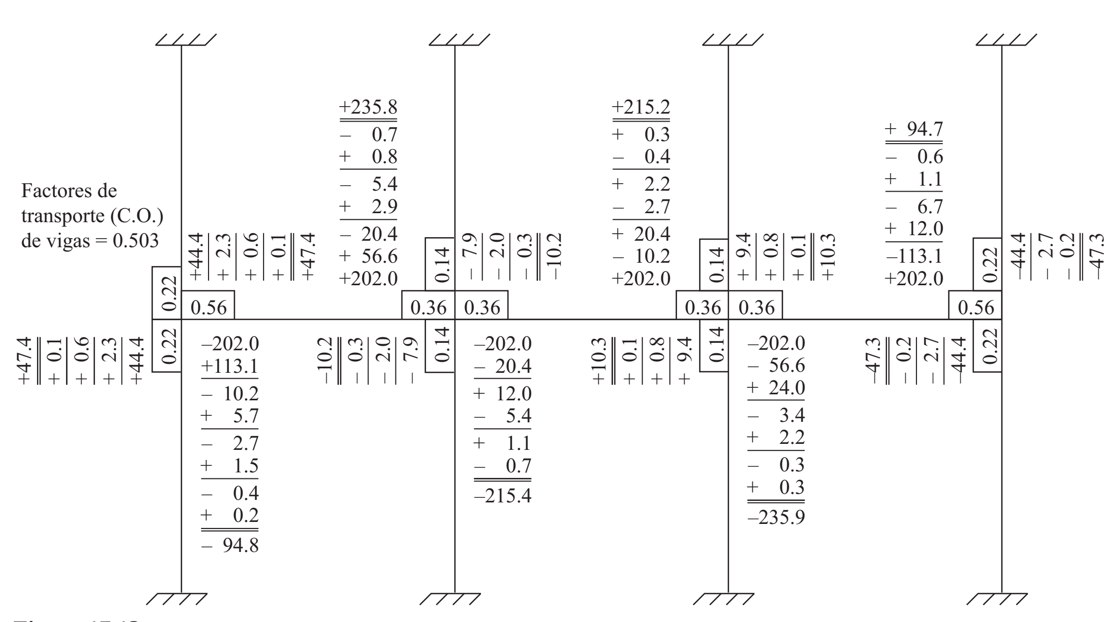


Figura 17.12

7. Cálculo de K_{ec}, la rigidez de la columna equivalente

$$K_{ec} = \frac{\Sigma K_c \Sigma K_t}{\Sigma K_c + \Sigma K_t} = \frac{(2 \times 648.0)(2 \times 307.3)}{2 \times 648.0 + 2 \times 307.3}$$

$$= 416.9 \times 10^6 \text{ plg-lb}$$

En la figura 17.11 se muestra un resumen de los valores de las rigideces.

8. Calculamos luego los factores de distribución y los momentos balanceados (véase la figura 17.12): El autor no muestra momentos en las partes superior e inferior de las columnas, pero esto podría hacerse fácilmente multiplicando los momentos balanceados de las columnas en los nodos con las losas, por el factor de transporte para las columnas, que es de 0.55.

En la figura 17.13 se da un resumen de los valores de los momentos para el ejemplo 17.2. Los momentos positivos mostrados en cada claro se suponen iguales a los momentos en el centro del claro de una viga simple, más el promedio de los momentos negativos en los extremos. Esto es correcto si los momentos extremos de un claro en particular son iguales, y es aproximadamente correcto si los momentos son desiguales. Para el claro 1,

$$^{+}M = \frac{(0.276)(18)(22)^2}{8} - \left(\frac{94.8 + 235.8}{2}\right) = 135.3 \text{ pie-klb}$$

Los momentos negativos mostrados en las figuras 17.12 y 17.13 se calcularon en los ejes de los apoyos. En tales apoyos, la sección transversal de la viga losa es muy grande, debido a la presencia de la columna. Sin embargo, en la cara de la columna la sección transversal es mucho menor y el código (13.7.7) estipula que debe diseñarse refuerzo negativo para el momento en esa posición. (Si la columna no es rectangular, se reemplaza por una columna cuadrada con la misma área total y el momento se calcula en la cara de la columna ficticia.) Como la relación de carga muerta a carga viva no factorizadas es menor que 0.75, la sección 13.7.6.2 del ACI permite un solo análisis con carga viva para todos los claros. No se requiere ningún análisis de patrón de cargas.

Los momentos de diseño mostrados en la figura 17.14 se determinaron dibujando el diagrama de fuerza cortante y calculando el área de ese diagrama entre el eje de cada apoyo y la cara de la columna.

Para columnas interiores, la sección crítica (para las franjas de columnas y la franja media) se debe tomar en la cara de los apoyos, pero no a una distancia mayor que $0.175\ell_1$ desde el centro de la columna. En los apoyos exteriores con ménsulas o capiteles, el momento usado en el claro perpendicular al borde se calcula a una distancia de la cara del elemento de apoyo, no mayor que la mitad de la proyección de la ménsula o del capitel más allá de la cara del elemento de apoyo.

En algunas ocasiones, el total de los momentos de diseño (es decir, el momento positivo más el promedio de los momentos negativos de extremo) obtenidos por el método del marco equivalente para un claro puede ser mayor que $M_o = q_u\ell_2\ell_n^2/8$ tal como se usó en el capítulo 16. Si esto ocurre, el código (13.7.7.4) permite una reducción proporcional en esos momentos, de manera que su suma sea igual a M_o.

17.6 ANÁLISIS CON COMPUTADORA

El *método del marco equivalente* fue desarrollado con la intención de que el método de distribución de momentos se usara en el análisis estructural. En realidad, el método es tan complicado que no resulta satisfactorio usarlo con cálculos manuales. Sin embargo, es posible usar computadoras y programas

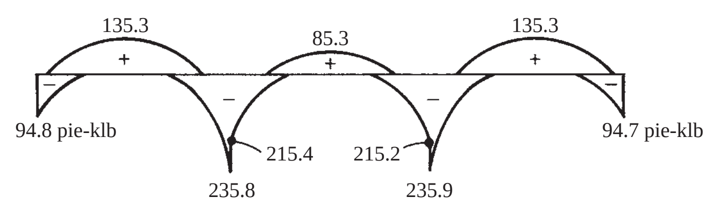
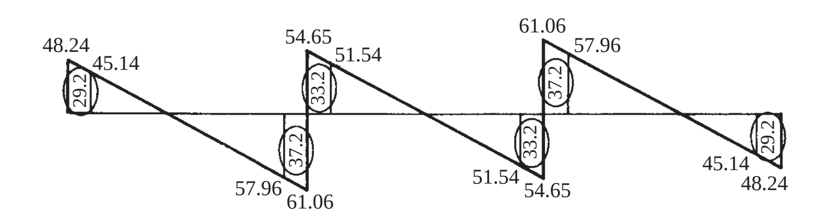


Figura 17.13

0.276 × 18 = 4.968 klb/pie

↑54.65 54.65 ↑↑54.65 54.65 ↑↑54.65 54.65↑
↓ 6.41 6.41 ↑ ↑ 6.41 6.41↓
↑48.24 61.06 ↑↑54.65 54.65 ↑↑61.06 48.24↑



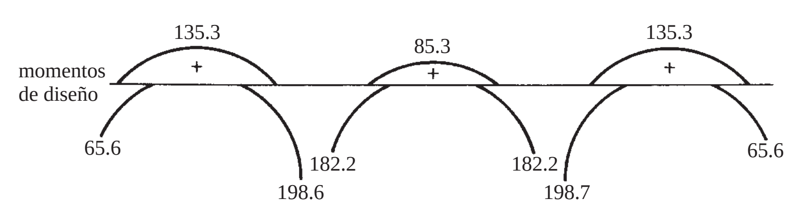


Figura 17.14

de análisis de marcos planos si la estructura se modela apropiadamente. (En otras palabras, debemos establecer varios puntos nodales en la estructura para tomar en cuenta los momentos de inercia variables a lo largo de los ejes de los miembros.) Existen en el mercado varios programas de computadora escritos especialmente para esos marcos. Uno de los más conocidos es el ADOSS (análisis y diseño de sistemas de pisos de concreto) que fue elaborado por la Portland Cement Association. Los momentos mostrados en la figura 17.14 pueden ingresarse en la hoja de cálculo Excel del capítulo 16, Losa en dos direcciones, en las celdas 12C a 122G para tableros interiores y 45C a 45G para tableros de borde.

17.7 EJEMPLOS CON COMPUTADORA

EJEMPLO 17.3

Use la hoja de cálculo Excel proporcionada en el capítulo 17 para resolver el ejemplo 17.2.

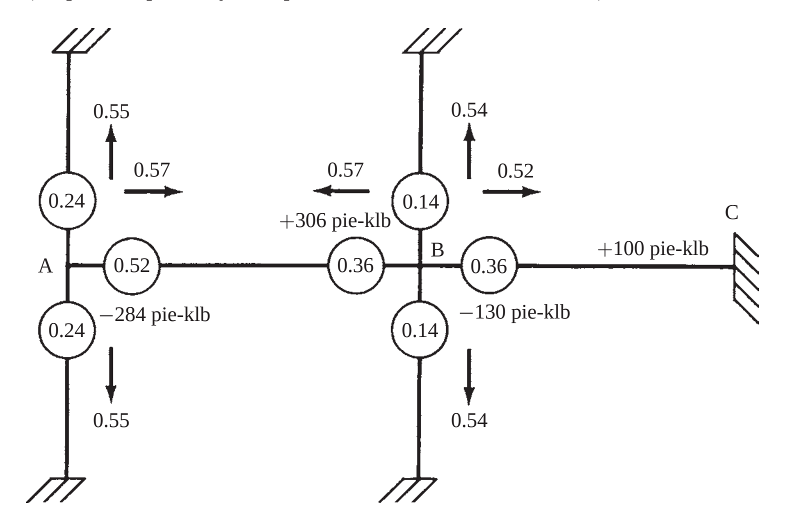
SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo Excel del capítulo 17 y abra la hoja de trabajo de Distribución de momentos. Ingrese valores solamente para las celdillas sombreadas en amarillo. Los resultados de la distribución de momentos se muestran en la parte inferior de cada columna. Observe que concuerdan con los del ejemplo 17.2.

Distribución de momentos para que el usuario ingrese los factores de distribución y de transporte y los momentos de extremo

Nodo	A	B		C		D
Miembro	*AB*	*BA*	*BC*	*CB*	*CD*	*DC*
Factor de distribución	0.56	0.36	0.36	0.36	0.36	0.56
Momento de extremo	−202	202	−202	202	−202	202
Transporte	0.503	0.503	0.503	0.503	0.503	0.503
Balance	113.12	0	0	0	0	−113.12
Transporte	0.000	56.899	0.000	0.000	−56.899	0.000
Balance	0.000	−20.484	−20.484	20.484	20.484	0.000
Transporte	−10.303	0.000	10.303	−10.303	0.000	10.303
Balance	5.770	−3.709	−3.709	3.709	3.709	−5.770
Transporte	−1.866	2.902	1.866	−1.866	−2.902	1.866
Balance	1.045	−1.716	−1.716	1.716	1.716	−1.045
Transporte	−0.863	0.526	0.863	−0.863	−0.526	0.863
Balance	0.483	−0.500	−0.500	0.500	0.500	−0.483
Transporte	−0.252	0.243	0.252	−0.252	−0.243	0.252
Balance	0.141	−0.178	−0.178	0.178	0.178	−0.141
Transporte	−0.090	0.071	0.090	−0.090	−0.071	0.090
Balance	0.050	−0.058	−0.058	0.058	0.058	−0.050
Transporte	−0.029	0.025	0.029	−0.029	−0.025	0.029
Balance	0.016	−0.020	−0.020	0.020	0.020	−0.016
	−94.78	236.00	−215.26	215.26	−236.00	94.78

PROBLEMAS

17.1 Determine los momentos de extremo para las vigas y columnas del marco mostrado, para el cual los momentos de empotramiento, los factores de transporte y los factores de distribución (en círculos) ya han sido calculados. Use el método de distribución de momentos. (*Resp.:* 44.9 pie-klb y 21.0 pie-klb en las bases de columnas.)



17.2 Repita el problema 16.4 usando el método del marco equivalente en lugar del método de diseño directo.

17.3 Use la hoja de cálculo del capítulo 17 para determinar los momentos de extremo en los miembros *AB* y *BC* del problema 17.1. (*Resp.:* $M_{AB} = -163.6$ pie-klb, $M_{BA} = 307.2$ pie-klb, $M_{BC} = -229.7$ pie-klb, $M_{CB} = 48.1$ pie-klb.)

18

Muros

18.1 INTRODUCCIÓN

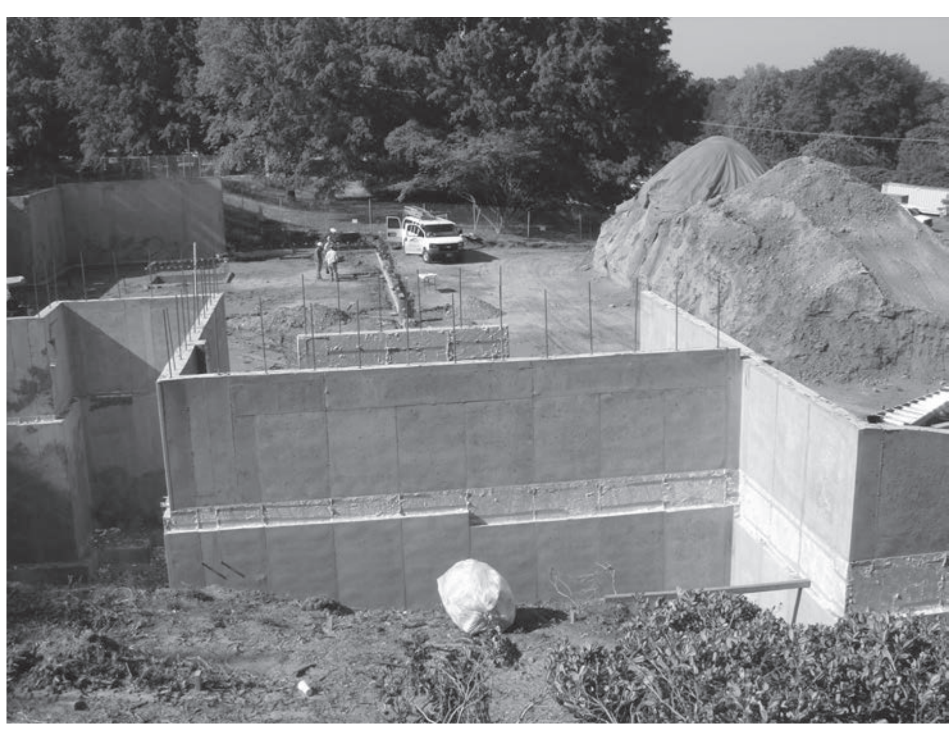
Antes del advenimiento de la construcción con marcos durante el siglo XIX, la mayoría de los muros eran del tipo de carga. Sin embargo, desde las postrimerías de 1800, los muros no portantes se han vuelto muy comunes, ya que otros miembros de la estructura pueden usarse para darles estabilidad. Como consecuencia, tenemos en la actualidad muros que sirven para todo tipo de fines, tales como los muros de retención, los muros de sótanos, los muros divisorios, los muros cortafuegos, etc. Estos muros pueden o no ser del tipo de carga.

En este capítulo se considerarán los siguientes tipos de muros de concreto: muros no portantes, muros de carga y muros de cortante (éstos pueden ser de carga o no portantes).

18.2 MUROS NO PORTANTES

Los muros no portantes son aquellos que soportan sólo su propio peso y tal vez algunas cargas laterales. Dentro de éstos se encuentran los muros de retención, los muros de fachadas y algunos muros de sótanos. Para los muros no portantes, el código ACI proporciona varias limitaciones específicas que se enumeran al final de este párrafo. Los valores dados para las cantidades mínimas de refuerzo y para los espesores de muros no tienen que cumplirse si se demuestra, por medio de un análisis estructural, que los valores menores son satisfactorios (14.2.7). Los números dados en paréntesis son los de las secciones ACI.

1. El espesor de un muro no portante no debe ser menor que 4″ o que 1/30 de la distancia mínima entre los miembros que le proporcionen soporte lateral (14.6.1).
2. La cantidad mínima de refuerzo vertical, como porcentaje del área total de concreto, es 0.0012 para varillas corrugadas del #5 o menores, con f_y por lo menos igual a 60 000 lb/plg^2, 0.0015 para otras varillas corrugadas y 0.0012 para malla soldada lisa o corrugada no mayor que la *W*31 o la *D*31, es decir, de $\frac{5}{8}$ plg de diámetro (14.3.2).
3. El refuerzo vertical no tiene que rodearse con estribos, a menos que el porcentaje de refuerzo vertical sea mayor que 0.01 veces el área total de concreto o que el refuerzo vertical no se requiera como refuerzo de compresión (14.3.6).
4. La cantidad mínima de refuerzo horizontal, como porcentaje del área total de concreto, es 0.0020 para varillas corrugadas del #5 o menores con $f_y \geq 60\,000$ lb/plg^2, 0.0025 para otras varillas corrugadas y 0.0020 para malla soldada lisa o corrugada no mayor que la *W*31 o la *D*31 (14.3.3).
5. La separación del refuerzo vertical y horizontal no debe exceder tres veces el espesor del muro, o 18 plg (14.3.5).



Muro de contención con espesor de muro en dos pasos, Universidad de Clemson, 2008.

6. El refuerzo de muros de más de 10 plg de espesor (sin incluir los muros de sótano) debe colocarse en dos capas, como sigue: una capa que contenga entre un medio y dos tercios del refuerzo total se colocará en la superficie exterior a no menos de 2 plg ni a más de un tercio del espesor del muro desde la superficie exterior; la otra capa se colocará a no menos de $\frac{3}{4}$ plg ni a más de un tercio del espesor del muro desde la superficie interior (14.3.4).
7. Para muros con espesor de menos de 10 plg, el código no especifica dos capas de acero, pero para controlar la contracción es aconsejable poner una capa sobre la cara visible de los muros y una sobre su lado no esforzado, con cimentaciones de 10 pies o más de altura.
8. Además del refuerzo especificado en los párrafos anteriores, deben proporcionarse por lo menos dos varillas del #5 en muros que tengan dos capas de refuerzo en ambas direcciones, y una varilla del #5 en muros que tengan una sola capa de refuerzo en ambas direcciones, alrededor de todas las aberturas de ventanas, puertas y similares. Estas varillas deben anclarse para el desarrollo de f_y a tensión en las esquinas de las aberturas (14.3.7).
9. Para muros colados en la obra, el área de refuerzo entre el muro y la zapata no debe ser menor que el refuerzo mínimo vertical del muro dado en 14.3.2 (15.8.2.2).
10. Para muros precolados, no presforzados, el refuerzo debe diseñarse de acuerdo con los requisitos anteriores de esta lista, así como con los requisitos de los capítulos 10 o 14 del código, excepto que el área del refuerzo horizontal y vertical no debe ser menor que 0.001 veces el área transversal total del muro. Además, la separación del refuerzo no debe ser mayor que 5 veces el espesor del muro o 30 plg en muros interiores, o 18 plg en muros exteriores (16.4.2).

18.3 MUROS DE CONCRETO DE CARGA. MÉTODO EMPÍRICO DE DISEÑO

La mayoría de los muros de concreto en edificios consta de muros de carga que soportan no sólo cargas verticales, sino también algunos momentos laterales. Como resultado de la considerable rigidez en su plano, desempeñan un papel importante en la resistencia a las fuerzas de viento y de los sismos.

Los muros de carga con secciones transversales rectangulares sólidas se pueden diseñar como columnas verticales sometidas a carga axial y flexión, o bien mediante un método empírico dado en la sección 14.5 del código. El método empírico sólo puede usarse si la resultante de todas las cargas factorizadas se sitúa dentro del tercio medio del muro (es decir, la excentricidad debe ser igual o menor que un sexto del espesor del muro). *Cualquiera que sea el método que se use de los dos, el diseño debe satisfacer los requisitos mínimos dados en la sección anterior de este capítulo para muros no portantes.*

Esta sección está dedicada al método empírico de diseño, que se puede aplicar a muros verticales relativamente cortos con cargas aproximadamente concéntricas. El código (14.5.2) proporciona una fórmula empírica para calcular la resistencia de diseño por carga axial de muros con secciones transversales rectangulares sólidas con e menor que un sexto del espesor del muro. Si los muros tienen secciones transversales no rectangulares (como los paneles para muro con costillas) y/o si e es mayor que un sexto del espesor del muro, deberá emplearse un procedimiento racional de diseño para columnas sometidas a carga axial y flexión (14.4 del código).

El uso práctico de la fórmula empírica para muros que se da al final de este párrafo, es para muros relativamente cortos con momentos pequeños. Cuando se tienen cargas laterales, la e excederá rápidamente a un sexto del espesor del muro. El número 0.55 en la ecuación es un factor de excentricidad que ocasiona que la ecuación dé una resistencia aproximadamente igual a la que se obtendría con el procedimiento de carga axial y flexión del capítulo 10 del código, si la excentricidad fuese $h/6$.



Muros de cimentación de treinta y dos pies de alto para el MCI Mid-Continent Data Center en Omaha, Nebraska. (Cortesía de Economy Forms Corporation.)

$$\phi P_{nw} = 0.55\phi f_c' A_g \left[1 - \left(\frac{k\ell_c}{32h}\right)^2\right] \quad \text{(Ecuaciones 14-1, ACI)}$$

En donde

$\phi = 0.65$
$A_g =$ área total de la sección del muro (plg^2)
$\ell_c =$ distancia vertical entre apoyos (plg)
$h =$ espesor total del miembro (plg)
$k =$ factor de longitud efectiva determinado de acuerdo con los valores dados en la tabla 18.1.

Tabla 18.1 Factores de longitud efectiva para muros de carga (14.5.2).

1. Muros soportados arriba y abajo contra translación lateral y	
a) Restringidos contra rotación en uno o ambos extremos (arriba y/o abajo)	0.80
b) Sin restricción contra rotación en ambos extremos	1.0
2. Para muros no soportados contra translación lateral	2.0

Se dan a continuación otros requisititos del ACI para muros de carga de concreto diseñados con la fórmula empírica.

1. El espesor de los muros no debe ser menor que 1/25 de la altura o longitud soportadas, rigiendo el menor valor, ni menor que 4 plg (14.5.3.1).

2. El espesor de los muros exteriores de sótanos y muros de cimentación no debe ser menor que $7\frac{1}{2}$ plg (14.5.3.2).

3. La longitud horizontal de un muro que puede considerarse efectiva para cada carga concentrada, no debe exceder al menor de la distancia centro a centro entre cargas o del ancho de apoyo más cuatro veces el espesor del muro. Este requisito puede pasarse por alto si se demuestra por medio de un análisis detallado que un valor mayor puede ser satisfactorio (14.2.4).

4. Los muros de carga deben anclarse a los elementos que los intersectan, como los pisos o techos, o deben anclarse a columnas, pilas, zapatas, contrafuertes y muros intersectantes (14.2.6).

El método empírico es fácil de aplicar, ya que sólo tiene que efectuarse un cálculo para determinar la resistencia por carga axial del diseño del muro. El ejemplo 18.1 siguiente, ilustra el diseño de un muro de carga con un momento pequeño.[1]

EJEMPLO 18.1

Usando la fórmula empírica 14-1 del ACI, diseñar un muro de carga de concreto para soportar un grupo de vigas de techo precoladas de concreto, separadas entre sí a 7′ 0″, como se muestra en la figura 18.1. El ancho de apoyo de cada viga es de 10″. Se considera que el muro estará restringido lateralmente arriba y abajo, y además lo estará contra rotaciones en su base; por tanto, $k = 0.8$. Despreciar el peso del muro. Otros datos: $f_c' = 3\,000$ lb/plg^2, $f_y = 60\,000$ lb/plg^2, reacción de las vigas, $D = 30$ klb, $L = 18$ klb.

[1]En los ejemplos de problemas presentados en este capítulo, los autores han seguido los procedimientos generales usados en las *Notes on ACI 318-05 Building Code Requirements for Structural Concrete* 2005. B. G. Rabbat, ed. (Skokie, IL: Portland Cement Association), págs. 21-19 a 21-20.

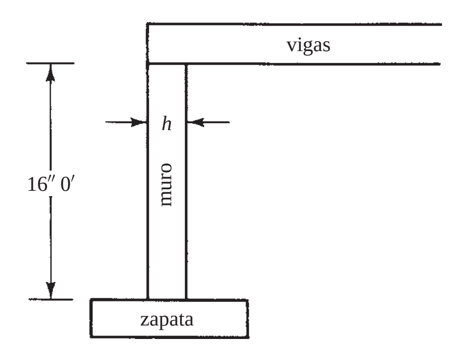


Figura 18.1

SOLUCIÓN

1. Determinar el espesor mínimo del muro (14.5.3.1)

a) $h = \left(\frac{1}{25}\right)(12 \times 16) = 7.68'' \leftarrow$ Ensayamos 8″

b) $h = 4''$

Cálculo de las reacciones factorizadas de las vigas

$$P_u = (1.2)(30) + (1.6)(18) = 64.8 \text{ klb}$$

2. ¿Es satisfactoria la resistencia por apoyo del muro de concreto para las reacciones de las vigas (10.17.1)?

$$\phi(0.85 f'_c A_1) = (0.65)(0.85)(3)(8 \times 10)$$
$$= 132.6 \text{ klb} > 64.8 \text{ klb} \quad \text{OK}$$

3. Longitud horizontal de muro que se considera eficaz para soportar cada carga concentrada (14.2.4)

a) Separación centro a centro de vigas $7'\ 0'' = 84''$

b) Ancho de apoyo $+4h = 10 + (4)(8) = 42'' \leftarrow$

4. Resistencia de diseño del muro

$$\phi P_{nw} = 0.55 \phi f'_c A_g \left[1 - \left(\frac{k \ell_c}{32h}\right)^2\right] \quad \text{(Ecuación 14-1, ACI)}$$

$$= (0.55)(0.65)(3)(8 \times 42)\left[1 - \left(\frac{0.80 \times 12 \times 16}{32 \times 8}\right)^2\right]$$

$$= 230.6 \text{ klb} > 64.8 \text{ klb} \quad \text{OK}$$

5. Selección del refuerzo (14.3.5, 14.3.2 y 14.3.3)

$$\text{Separación máxima} = (3)(8) = 24'' \text{ o } \underline{18''}$$

$$A_s \text{ vertical} = (0.0012)(12)(8) = 0.115 \text{ plg}^2/\text{pie} \quad \#4 \text{ @ } 18''$$

$$A_s \text{ horizontal} = (0.0020)(12)(8) = 0.192 \text{ plg}^2/\text{pie} \quad \#4 \text{ @ } 12''$$

Aunque el código no es específico en este aspecto, sería prudente proporcionar continuidad del refuerzo vertical del muro hasta la zapata. Generalmente esto se logra usando una varilla con gancho ahogada en la zapata del muro que esté traslapada con las varillas verticales del muro. Si se hubiera usado un valor de $k = 1$ en este ejemplo, no habría habido ninguna hipótesis de continuidad en la base del muro. Todavía sería necesario asegurar que se suministre una capacidad adecuada de cortante en la base del muro.

18.4 MUROS DE CONCRETO SOPORTANTES DE CARGA. DISEÑO RACIONAL

Los muros de carga de concreto reforzado se pueden diseñar como columnas mediante el método racional del capítulo 10 del código, ya sea que la excentricidad sea menor o mayor que $h/6$ (deben diseñarse racionalmente si $e > h/6$). En cualquier caso deben cumplirse los requisitos de refuerzo mínimo vertical y horizontal de la sección 14.3 del código.

El diseño de muros como columnas es difícil, a menos que se disponga de ayudas de diseño. Existen varias ayudas de esta clase para muros, que han sido editadas por la Portland Cement Association, pero el proyectista puede preparar sus propias ayudas de diseño, tales como los diagramas de interacción de carga axial y momento flexionante. Los diseños pueden complicarse por el hecho de que los muros a menudo se clasifican como "columnas largas", con el resultado de que tienen que cumplirse los requisitos de esbeltez de la sección 10.10 del código. En la sección 14.8 del ACI se expone un procedimiento alternativo para muros esbeltos.

Los muros muy esbeltos son bastante comunes, especialmente en la construcción de muros inclinados hacia arriba. La Portland Cement Association dispone de una ayuda de diseño que es especialmente útil para estos casos.[2]

Los diagramas de interacción estudiados en la sección 10.6 de este texto pueden usarse para diseñar muros con acero en dos capas y sujetos a flexión fuera del plano en combinación con cargas axiales. Sin embargo, la relación de refuerzo se limita a 0.01, a menos que el refuerzo para compresión esté ligado lateralmente (sección 14.3.6 del ACI), lo cual es impráctico en muchos casos. Las gráficas 2 a 5 del apéndice A son aplicables a muros que tengan dos capas de acero. Sin embargo, los valores de γ para estas gráficas pueden ser demasiado grandes, especialmente para muros más delgados. El ejemplo 18.2 ilustra cómo usar estas ayudas de diseño al diseñar muros.

EJEMPLO 18.2

Diseñar un muro de cimentación de concreto reforzado que tenga las siguientes condiciones: $\ell = 15$ pies entre apoyos laterales, la altura del relleno también es de 15 pies, $P_D = 520$ lb/pie lineal para $e = 2$ plg, $P_L = 250$ lb por pie lineal para $e = 2$ plg. Suponga que la base tiene un pasador.

$f'_c = 4\,000$ lb/plg^2, concreto con agregado de peso normal, acero de refuerzo de Grado 60

Propiedades del suelo, $k_a = 0.40$, $\gamma = 100$ lb/pie^3

SOLUCIÓN Suponiendo que el muro está simplemente apoyado tanto arriba como abajo, la presión del suelo ejercida sobre el muro aumenta linealmente desde cero en la parte superior del relleno hasta $k_{a\ell}$ en la base. El momento máximo de flexión[3] es

$$M_H = 0.064\,\mathrm{k}_a \gamma \ell^3 = (0.064)(0.4)(100)(15)^3$$

$$= 8\,640 \text{ pie-lb/pie} = 103\,680 \text{ plg-lb/pie}$$

El momento máximo[3] ocurre a $0.577\ell = 8.66$ pies desde la parte superior del muro. Observe que las cargas axiales excéntricas causan una reducción de momento. En el caso de carga axial muerta, el momento en la parte superior del muro es $P \times e = 520(2) = 1\,040$ plg-lb/pie. Este momento varía linealmente desde cero en la base del muro, de modo que en la posición del momento máximo del suelo, su valor es $1\,040(8.66)/15 = 600$ plg-lb/pie. El mismo análisis aplicado a la carga viva conduce a un momento de 288 plg-lb/pie. En este caso la reducción es pequeña (menor que 3%) y podría ignorarse. En la posición del momento máximo de flexión, las cargas axiales son

$P_D = 520 + 8.66(150)(8)(12)/144 = 1\,386$ lb/pie lineal (suponiendo un espesor de muro de 8 plg). $P_L = 250$ lb/pie lineal.

En la siguiente tabla se muestran tres combinaciones de carga aplicables a esta situación junto con los valores de K_n y R_n usados conjuntamente con la gráfica 2 del apéndice A.

[2]Portland Cement Association, 1980. Tilt-Up Load Bearing Walls–A Design Aid., EBO74D (Skokie, IL), 28 páginas.
[3]McCormac, J.C., Structural Analysis: Using Classical and matrix Methods, 4a. ed. (Hoboken, NJ: John Wiley & Sons), págs. 104-106.

	P_D	P_L	P_H	M_D	M_L	M_H	P_U	M_U	$K_n = P_U/\phi f'_c A_g$	$R_n = M_U/\phi f'_c A_g h$	ρ_t
No factorizado	1 386	250	0	600	288	103 680					
$U = 1.4D$	1.4			1.4			1 940	840	0.0056	0.0003	< 0.01
$U = 1.2D + 1.6L + 1.6H$	1.2	1.6	1.6	1.2	1.6	1.6	2 063	167 069	0.0060	0.0604	0.01
$U = 0.9D + 1.6H$	0.9		1.6	0.9		1.6	1 247	166 428	0.0036	0.0602	0.01

Hay tan poca diferencia entre la segunda y la tercera cargas que la diferencia en ρ_t no se distingue cuando se lee la gráfica. También, se usó un valor de $\phi = 0.9$ porque cuando se lee la gráfica es obvio que los puntos de control están debajo de la línea para $\varepsilon_t = 0.005$. Usando el valor resultante de ρ_t, $A_{st} = \rho_t bh = 0.010(12)(8) = 0.96$ plg^2/pie, la mitad en cada caso (0.48 plg^2/pie). De la tabla A.6, seleccione #5 @ $7\frac{1}{2}$ plg centro a centro verticalmente en ambas caras. Se seleccionó el tamaño de varilla del #5 porque el recubrimiento requerido aumenta para varillas más grandes de $1\frac{1}{2}$ a 2 plg. Debe proporcionarse refuerzo horizontal de acuerdo con el artículo 14.3.3*b*) del ACI, $A_s \geq 0.0025bh = 0.0025(12)(8) = 0.24$ plg^2/pie. Seleccione #4 @ 18 plg centro a centro horizontalmente en ambas caras. Como este muro tiene un espesor menor a 10 plg, el artículo 14.3.4 del ACI permite que el refuerzo se ponga en una sola capa. Sin embargo, la gráfica 2 se basa en tener acero en dos capas separadas una distancia de $\gamma h = 0.6\ (8) = 4.8$ plg. En realidad, un valor de $\gamma = 0.5$ habría sido una mejor elección para este problema con el propósito de proporcionar suficiente recubrimiento, pero no está disponible.

Como la carga axial es tan pequeña en este caso, el muro pudo haberse diseñado como una viga con acero en compresión. El ancho de la viga sería de 12 plg, $h = 8$ plg, $d = 6.4$ plg y el momento se tomaría como 167 plg-klb. Los autores desarrollaron este enfoque de diseño usando la hoja de cálculo del capítulo 5 y calcularon un área requerida de acero de refuerzo de 0.98 plg^2/pie (comparado con 0.96 plg^2/pie de la gráfica 2).

El muro ejerce reacciones en el fondo contra la zapata y en la parte superior contra el piso. El sistema de piso debe diseñarse para resistir a esta fuerza horizontal que se llama fuerza de diafragma. En el fondo, la interfaz del muro y la zapata debe diseñarse para transferencia de fuerza cortante entre estos elementos. La fricción por cortante (sección 8.12 de este texto) es la mejor manera de acomodar esta transferencia.

Observe que este muro tiene una relación de esbeltez de $kl_u/r = 1.0(15)12/(0.3)(8) = 75 > 34 - 12(0/M_2) = 34$, de modo que debe considerarse la esbeltez. Sin embargo, como las cargas axiales son tan pequeñas, el amplificador de momentos no es mayor que 1.0 y por tanto el momento no se amplifica.

Si este muro no estuviera lateralmente apoyado en la parte superior por el piso como se muestra en la figura 18.2, sería un muro de contención. El momento de flexión debido a la presión del suelo sobre el muro de contención sería $M_H = k_a \gamma \ell^3/6$ que es 260% del momento en el ejemplo 18.2. Asegúrese de usar el momento correcto para las condiciones de frontera que son aplicables a su tipo de construcción.

Si la relación de refuerzo hubiera sido mayor que 0.01, este método de solución no sería válido. Sería necesario usar la mecánica para determinar la capacidad del muro sin usar acero en compresión. Las ayudas de diseño usadas en este ejemplo usan la fuerza de compresión en el acero de refuerzo, por tanto el acero tiene que ligarse lateralmente para que esta solución sea válida.

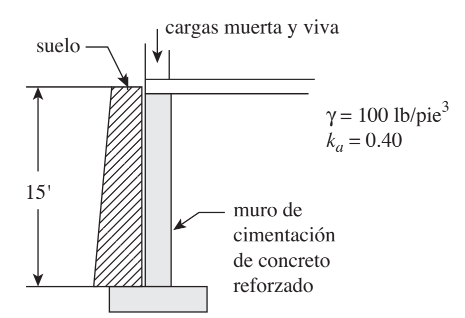


Figura 18.2 Muro de cimentación.

18.5 MUROS DE CORTANTE

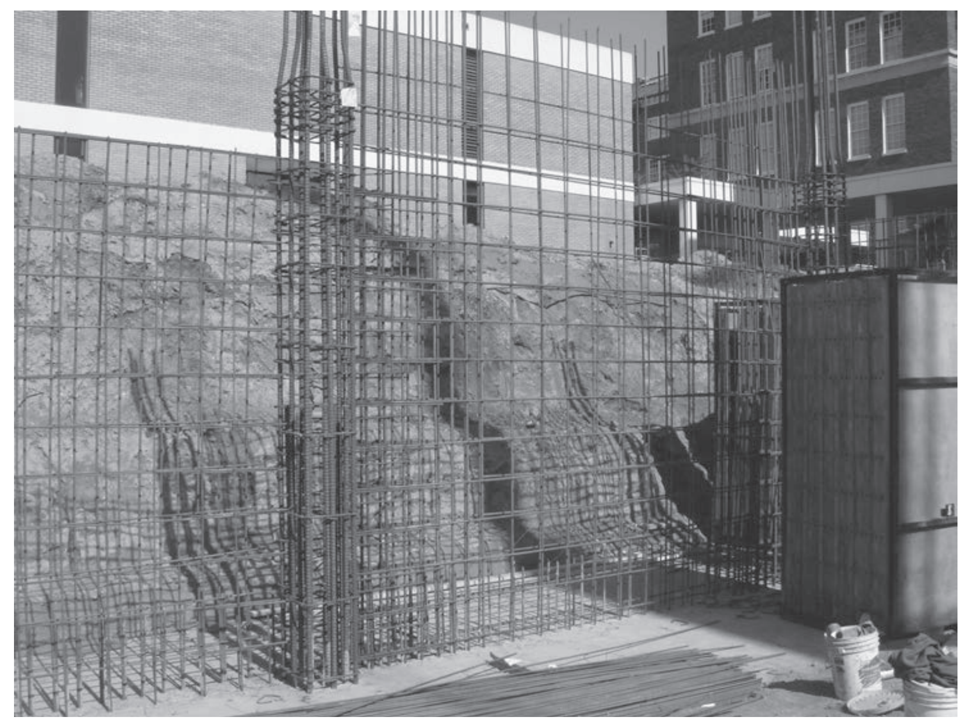
En edificios altos es necesario proveer una rigidez adecuada para resistir las fuerzas laterales causadas por viento y sismo. Cuando tales edificios no son adecuadamente diseñados para estas fuerzas, pueden presentarse esfuerzos muy altos, vibraciones y deflexiones laterales cuando ocurran las fuerzas. Los resultados pueden incluir no sólo severos daños a los edificios, sino también considerables molestias a sus ocupantes.

Cuando los muros de concreto reforzado, con sus grandes rigideces en sus planos se colocan en ciertas localidades convenientes y estratégicas, pueden a menudo usarse económicamente para proporcionar la resistencia necesaria a cargas horizontales. Tales muros, llamados *muros de cortante*, son en efecto vigas en voladizo vertical de gran peralte que proporcionan estabilidad lateral a las estructuras al resistir las fuerzas cortantes y momentos flexionantes en sus planos causados por las fuerzas laterales.

Como la resistencia de los muros de cortante es casi siempre controlada por sus resistencias a flexión, el nombre parece no ser muy apropiado. Sin embargo, es cierto que en algunas ocasiones pueden requerir algún refuerzo cortante para prevenir las fallas por tensión diagonal. En verdad que uno de los requisitos básicos de los muros de cortante diseñados para fuerzas sísmicas elevadas es asegurar el diseño controlado por flexión más bien que el diseño controlado por cortante.

La práctica usual es suponer que las fuerzas laterales actúan en los niveles de los pisos. Las rigideces horizontales de las losas de los pisos son muy grandes comparadas con las rigideces de los muros y columnas. Se supone entonces que cada piso se desplaza en su plano horizontal como un cuerpo rígido.

La figura 18.3 muestra la planta de un edificio sometido a fuerzas horizontales. Las fuerzas laterales, generalmente de cargas eólicas o sísmicas, se aplican a las losas de los pisos y techo del edificio y esas losas, actuando como grandes vigas, transfieren las cargas principalmente a los muros de cortante A y B. Si las fuerzas laterales vienen de la otra dirección (perpendicular), son resistidas principalmente por los muros de cortante C y D.



Muro de cortante con columnas extremas integradas: Anexo de Rodas, Universidad de Clemson, 2008.

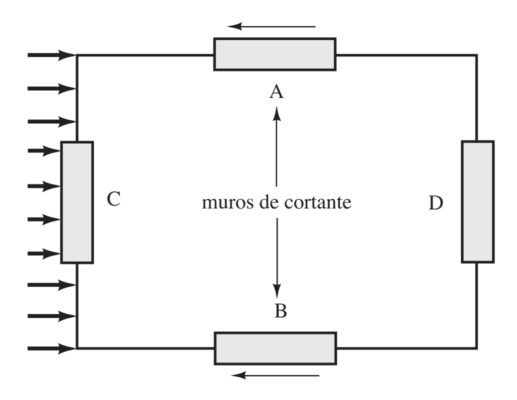


Figura 18.3 Vista en planta de un piso soportado por muros de cortante.

Los muros deben ser suficientemente rígidos para limitar las deflexiones a valores razonables.

Se usan comúnmente los muros de cortante en edificios con losas de piso de placa plana. De hecho, esta combinación de losas y muros es el tipo más común de construcción usado actualmente en edificios altos de apartamentos y otros tipos de edificios residenciales.

Los muros de cortante salvan las distancias verticales totales entre pisos. Si los muros son cuidadosa y simétricamente colocados en planta, resistirán eficientemente las cargas verticales y laterales sin interferir considerablemente con los requisitos arquitectónicos. Se han construido edificios de concreto reforzado de hasta 70 niveles con muros de cortante como su fuente primaria de rigidez lateral. En la



Muro de cortante con contrafuerte, Hilton de Nueva York, Nueva York, NY. (Cortesía del Prof. Larry Kahn, Georgia Institute of Technology.)

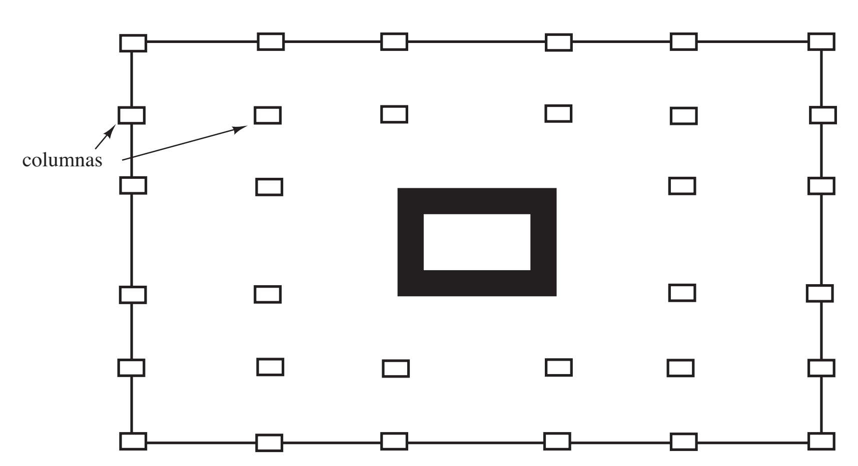


Figura 18.4 Muros de cortante alrededor de elevadores y escaleras.

dirección horizontal pueden usarse muros de cortante totales; es decir, que corran sobre toda la longitud de los paneles o crujías. Cuando las fuerzas son menores, ellos tienen que correr sólo sobre longitudes parciales de los paneles.

Los muros de cortante pueden usarse para resistir sólo fuerzas laterales o adicionalmente como muros de carga. Además pueden emplearse para encerrar elevadores, escaleras y tal vez cuartos sanitarios, como se muestra en la figura 18.4. Estas estructuras mostradas tipo caja son muy satisfactorias para resistir fuerzas horizontales.

Otro posible arreglo de muros de cortante se muestra en la figura 18.5. Aunque éstos también pueden necesitarse en la dirección larga del edificio, no se han incluido en esta figura.

En la mayoría de los casos no es posible usar muros de cortante sin aberturas para puertas, ventanas y penetraciones para servicios mecánicos. Sin embargo, con una planeación cuidadosa, es posible situar estas aberturas de manera que no afecten seriamente las rigideces o esfuerzos en los muros. Cuando las aberturas son pequeñas, sus efectos son menores, pero éste no es el caso cuando están presentes grandes aberturas.

Generalmente, las aberturas (ventanas, puertas, etc.), se colocan en filas verticales y simétricas en los muros sobre la altura de la estructura. Las secciones de muro en los lados de estas aberturas se unen entre sí por medio de vigas encerradas en los muros, por las losas de los pisos o por una combinación de ambas. Como puede verse, el análisis estructural de tal situación es extremadamente complicado. Si bien los diseños de los muros de cortante son generalmente efectuados con ecuaciones empíricas, ellos pueden ser considerablemente afectados por la experiencia previa del proyectista.

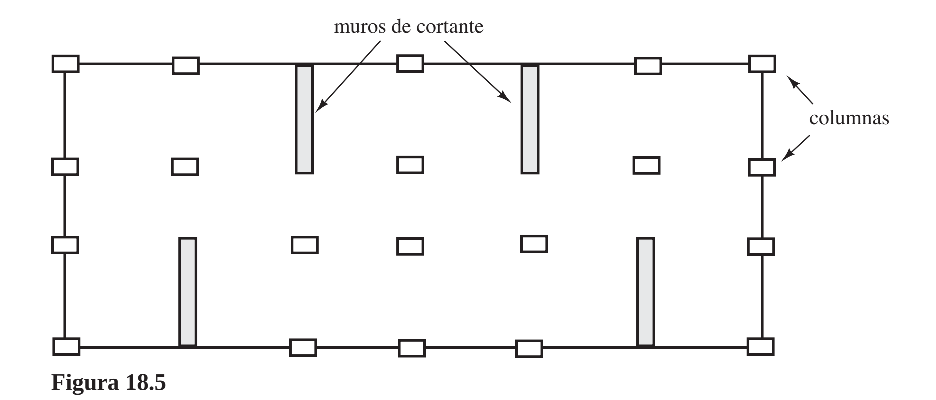


Figura 18.5

Cuando se considera una construcción resistente a sismos, debe recordarse que las partes relativamente rígidas de la estructura atraerán fuerzas mucho mayores que las partes más flexibles. Una estructura con muros de cortante de concreto reforzado será muy rígida y atraerá grandes fuerzas sísmicas. Si éstos son frágiles y fallan, el resto de la estructura no será capaz de tomar el impacto. Pero si son dúctiles (lo serán si son reforzados apropiadamente), serán muy efectivos en resistir las fuerzas sísmicas.

Frecuentemente, los edificios altos de concreto reforzado se diseñan con muros de cortante para resistir fuerzas sísmicas, y tales edificios se han comportado bastante bien en sismos recientes. Durante un sismo, los muros de cortante apropiadamente diseñados limitarán considerablemente los daños a los marcos estructurales. Ellos también minimizarán los daños a las partes no estructurales de un edificio, como ventanas, puertas, cielos rasos y muros divisorios.

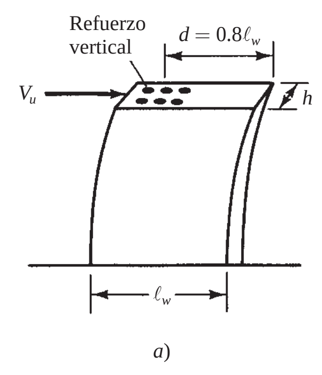
La figura 18.6 muestra un muro de cortante sometido a una fuerza lateral V_u. El muro es en realidad una viga en voladizo de ancho h y peralte total ℓ_w. En la parte (*a*) de la figura el muro está flexionado por V_u de izquierda a derecha, por lo que se requieren varillas de tensión a la izquierda o lado de tensión. Si V_u se aplica desde la derecha como se muestra en la parte (*b*) de la figura, se requerirán varillas de tensión en el extremo derecho del muro. Se ve entonces que un muro de cortante necesita refuerzo de tensión en ambos lados, ya que V_u puede actuar desde cualquier dirección. Para cálculos de cortante horizontal, el peralte de la viga del extremo de compresión del muro al centro de gravedad de las varillas de tensión se estima como aproximadamente igual a 0.8 veces la longitud ℓ_w del muro, de acuerdo con la sección 11.10.4 del ACI. (Si se obtiene un mayor valor de d mediante un análisis apropiado de compatibilidad de deformaciones, puede usarse.)

El muro de cortante actúa como una viga vertical en voladizo y al proporcionar soporte lateral queda sometido a flexión y fuerzas cortantes. Para tal muro, la fuerza cortante máxima V_u y el momento de flexión máximo M_u se calculan en la base. Si se calculan esfuerzos de flexión, su magnitud será afectada por la carga axial de diseño N_u y por tanto, su efecto deberá incluirse en el análisis.

La fuerza cortante es más importante en muros con relaciones pequeñas de altura a longitud. Los momentos son más importantes en muros altos, particularmente en aquellos con refuerzo distribuido uniformemente.

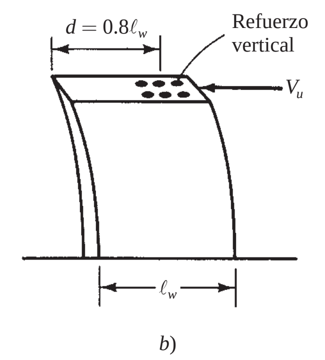
Es necesario proporcionar a los muros de cortante refuerzo cortante tanto horizontal como vertical. El comentario (R11.9.9) establece que en muros de poca altura el refuerzo cortante horizontal es menos efectivo y el refuerzo cortante vertical es más efectivo. En muros de gran altura la situación es al revés. Esta situación se refleja en la ecuación 11-32 del ACI, que se presenta en la próxima sección. El refuerzo cortante vertical contribuye a la resistencia cortante de un muro por medio del cortante por fricción.

Se colocan varillas de refuerzo alrededor de todas las aberturas, ya sea que el análisis estructural las considere necesarias o no. Tal práctica es necesaria para prevenir grietas por tensión diagonal, que tienden a desarrollarse en forma radial desde la esquinas de las aberturas.





a)



b)

Figura 18.6 Muro de cortante.

18.6 REQUISITOS DEL ACI PARA MUROS DE CORTANTE

1. La fuerza cortante factorizada de la viga debe ser igual o menor que la resistencia de diseño por cortante del muro.

$$V_u \leq \phi V_n$$

2. La resistencia de diseño por cortante del muro es igual a la resistencia de diseño por cortante del concreto más la del refuerzo por cortante.

$$V_u \leq \phi V_c + \phi V_s$$

3. La resistencia nominal por cortante V_n en cualquier sección horizontal en el plano del muro no debe tomarse mayor que $10\sqrt{f'_c}hd$ (11.9.3).

4. Al diseñar las fuerzas cortantes horizontales en el plano de un muro, d debe tomarse igual a $0.8\ell_w$, donde ℓ_w es la longitud horizontal del muro entre las caras de los apoyos, a menos que pueda justificarse un valor mayor por medio de un análisis de compatibilidad de deformaciones (11.9.4).

5. La sección 11.10.5 del ACI establece que a menos que se haga un cálculo más detallado (como se describe en el siguiente párrafo), el valor usado de la resistencia nominal por cortante V_c no deber ser mayor que $2\lambda\sqrt{f'_c}hd$ en los muros sometidos a una carga N_u de compresión axial factorizada. Si un muro está sometido a una carga N_u de tensión, el valor de V_c no debe ser mayor que el valor obtenido con la siguiente ecuación:

$$V_c = 2\left(1 + \frac{N_u}{500A_g}\right)\lambda\sqrt{f'_c}b_w d \geq 0 \qquad \text{(Ecuación 11-8, ACI)}$$

6. Usando un análisis más detallado, el valor de V_c se tomará como el menor valor que se obtenga al sustituir en las dos ecuaciones que siguen, en donde N_u es la carga axial factorizada normal a la sección transversal que se presente simultáneamente con V_u. Se tiene que N_u se considerará positiva para compresión y negativa para tensión (11.10.6).

$$V_c = 3.3\lambda\sqrt{f'_c}hd + \frac{N_u d}{4\ell_w} \qquad \text{(Ecuación 11-29, ACI)}$$

o bien

$$V_c = \left[0.6\lambda\sqrt{f'_c} + \frac{\ell_w(1.25\lambda\sqrt{f'_c} + 0.2N_u/\ell_w h)}{\dfrac{M_u}{V_u} - \dfrac{\ell_w}{2}}\right]hd \qquad \text{(Ecuación 11-30, ACI)}$$

La primera de estas ecuaciones se formuló para predecir la resistencia al agrietamiento inclinado en cualquier sección de un muro de cortante, que corresponda a un esfuerzo principal de tensión de aproximadamente $4\lambda\sqrt{f'_c}$ en el centroide de la sección transversal del muro. La segunda ecuación fue formulada para corresponder a la presencia de un esfuerzo de tensión por flexión de $6\lambda\sqrt{f'_c}$ en una sección $\ell_w/2$ arriba de la sección investigada. Si $M_u/V_u - \ell_w/2$ resulta negativo, la segunda ecuación no tendrá sentido y no será utilizada.

En unidades del SI, estas tres últimas ecuaciones toman la forma:

$$V_c = \left(1 + \frac{0.3N_u}{A_g}\right)\frac{\lambda\sqrt{f'_c}}{6}b_w d \geq 0 \qquad \text{(Ecuación 11-8, ACI)}$$

$$V_c = \frac{1}{4}\lambda\sqrt{f'_c}hd + \frac{N_u d}{4\ell_w} \quad \text{(Ecuación 11-29, ACI)}$$

$$V_c = \left[\frac{1}{2}\lambda\sqrt{f'_c} + \frac{\ell_w\left(\lambda\sqrt{f'_c} + 2\frac{N_u}{\ell_w h}\right)}{\frac{M_u}{V_u} - \frac{\ell_w}{2}}\right]\frac{hd}{10} \quad \text{(Ecuación 11-30, ACI)}$$

7. Los valores de V_u calculados con las dos ecuaciones anteriores a una distancia de la base igual a $\ell_w/2$ o bien $h_w/2$ (la que sea menor), son aplicables a todas las secciones entre esta sección y la de la base del muro (11.9.7).

8. Si la fuerza cortante factorizada V_u es menor que $\phi V_c/2$ calculada como se indicó en los dos párrafos anteriores, no será necesario proporcionar una cantidad mínima de refuerzo tanto horizontal como vertical, como se describió en la sección 11.9.9 o en el capítulo 14 del código.

9. Si V_u es mayor que ϕV_c, el refuerzo del muro de cortante debe diseñarse como se indica en la sección 11.9.9 del código.

10. Si la fuerza cortante factorizada V_u excede la resistencia por cortante ϕV_c, el valor de V_s debe determinarse con la siguiente expresión, en la que A_v es el área del refuerzo por cortante horizontal y s es la separación del refuerzo por torsión o por cortante, en una dirección perpendicular al refuerzo horizontal (11.9.9.1).

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \quad \text{(Ecuación 11-31, ACI)}$$

11. La cantidad de refuerzo por cortante horizontal ρ_t (como porcentaje del área total vertical de concreto) no deberá ser menor que 0.0025 (11.9.92).

12. La separación máxima del refuerzo s_2 por cortante horizontal no deberá ser mayor que $\ell_w/5$, $3h$ o 18 plg (11.9.9.3).

13. La cantidad de refuerzo por cortante vertical ρ_n (como porcentaje del área total horizontal de concreto) no deberá ser menor que el valor dado por la siguiente ecuación, en la que h_w es la altura total del muro (11.9.9.4).

$$\rho_\ell = 0.0025 + 0.5\left(2.5 - \frac{h_w}{\ell_w}\right)(\rho_h - 0.0025) \quad \text{(Ecuación 11-32, ACI)}$$

No debe ser menor que 0.00025 pero tampoco mayor que el refuerzo por cortante horizontal requerido ρ_t.

En los muros altos, el refuerzo vertical es mucho menos eficaz que en los muros bajos. Este hecho se refleja en la ecuación anterior, donde para muros con una relación de altura a longitud menor que 0.5, la cantidad de refuerzo vertical necesaria es igual al refuerzo horizontal requerido. Si la relación es mayor que 2.5, sólo se requiere una cantidad mínima de refuerzo vertical (es decir, $0.0025sh$).

14. La separación máxima del refuerzo por cortante vertical, no deberá ser mayor que $\ell_w/3$, $3h$ o 18 plg (11.9.9.5).

EJEMPLO 18.3

Diseñar el muro de concreto reforzado mostrado en la figura 18.7 si $f'_c = 3\,000$ lb/plg² y $f_y = 60\,000$lb/plg².

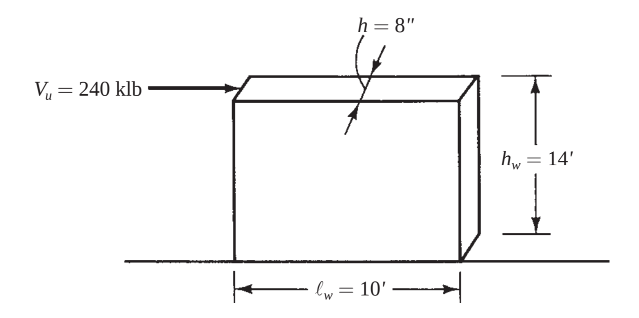


Figura 18.7

SOLUCIÓN **1.** ¿Es satisfactorio el espesor del muro?

$$V_u = \phi 10\sqrt{f'_c}hd \qquad \text{(Sección 11.9.3, ACI)}$$

$$d = 0.8\ell_w = (0.8)(12 \times 10) = 96'' \qquad \text{(Sección 11.9.4, ACI)}$$

$$V_u = (0.75)(10)(\sqrt{3\,000})(8)(96)$$

$$V_u = 315\,488 \text{ lb} = 315.5 \text{ klb} > 240 \text{ klb} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

2. Calcule V_c para el muro (el menor de dos valores)

a) $$V_c = 3.3\lambda\sqrt{f'_c}hd\,)\ \frac{N_u d}{4\ell_w} = (\,3.3)(1.0)(\sqrt{3\,000})(8)(96) + 0$$

$$= 138\,815 \text{ lb} = 138.8 \text{ klb} \leftarrow \qquad \text{(Ecuación 11.29, ACI)}$$

b) $$V_c = \left[0.6\lambda\sqrt{f'_c} + \frac{\ell_w(1.25\lambda\sqrt{f'_c} + 0.2N_u/\ell_w h)}{\frac{M_u}{V_u} - \frac{\ell_w}{2}}\right]hd \qquad \text{(Ecuación 11.30, ACI)}$$

Calcule V_u y M_u en el menor valor de $\ell_w/2 = 10/2 = 5'$ o $h_w/2 = 14/2 = 7'$ desde la base (11.9.7, ACI):

$$V_u = 240 \text{ klb}$$

$$M_u = 240(14 - 5) = 2\,160 \text{ pie-klb} = 25\,920 \text{ plg-klb}$$

$$V_c = \left[(0.6)(1.0)(\sqrt{3\,000}) + \frac{(12 \times 10)(1.25)(1.0)(\sqrt{3\,000}) + 0}{\frac{25\,920}{240} - \frac{(12)(10)}{2}}\right](8)(96)$$

$$= 156\,692 \text{ lb} = 156.7 \text{ klb}$$

3. ¿Es necesario refuerzo por cortante?

$$\frac{\phi V_c}{2} = \frac{(0.75)(1.0)(138.8)}{2} = 52.05 \text{ klb} > 240 \text{ klb}$$

Sí es necesario

4. Seleccione el refuerzo horizontal por cortante

$$V_u = \phi V_c + \phi V_s$$

$$V_u = \phi V_c + \phi \frac{A_v f_y d}{s}$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} = \frac{240 - (0.75)(138.8)}{(0.75)(60)(96)} = 0.0315$$

Intente con varillas horizontales de diferente tamaño con A_v = áreas transversales de dos varillas. Se colocarán dos capas de varillas horizontales con la separación calculada, por tanto A_v = dos veces el área de la varilla. Calcule s_2 = separación vertical entre estribos horizontales.

$$\text{Pruebe con varillas \#3: } s = \frac{(2)(0.11)}{0.0315} = 6.98''$$

$$\text{Pruebe con varillas \#4: } s = \frac{(2)(0.20)}{0.0315} = 12.70''$$

Separación vertical máxima entre estribos horizontales

$$\frac{\ell_w}{5} = \frac{(12)(10)}{5} = 24''$$

$$3h = (3)(8) = 24''$$

$$18'' = 18'' \leftarrow$$

Ensaye del #4 @ 12″

$$\rho_t = \frac{A_v}{A_s}$$

donde A_g = espesor de la pared multiplicado por la separación vertical entre estribos horizontales

$$\rho_t = \frac{(2)(0.20)}{(8)(12)} = 0.00417$$

que es mayor que el valor mínimo de ρ_n de 0.0025 permitida por el código.

Usar estribos #4 horizontales a cada 12″ c.a c. verticales

5. Diseñe el refuerzo vertical por cortante

$$\text{mín. } \rho_\ell = 0.0025 + 0.5\left(2.5 - \frac{h_w}{1_w}\right)(\rho_h - 0.0025)$$

(Ecuación 11-32, ACI)

$$= 0.0025 + 0.5\left(2.5 - \frac{12 \times 14}{12 \times 10}\right)(0.00417 - 0.0025)$$

$$= 0.00342$$

Suponga varillas verticales cerradas del #4 con A_v = área transversal de dos varillas y con s = separación horizontal entre estribos verticales.

$$s = \frac{(2)(0.20)}{(8)(0.00342)} = 14.62''$$

Separación horizontal máxima entre estribos verticales

$$\frac{\ell_w}{3} = \frac{(12)(10)}{3} = 40''$$

$$3h = (3)(8) = 24''$$

$$18'' = 18'' \leftarrow$$

<u>Usar estribos #4 verticales a cada 14″ c. a c. horizontales</u>

6. Diseñar el refuerzo vertical por flexión

$$M_u = (240)(14) = 3\,360 \text{ pie-klb @ base del muro}$$

$$\frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{(12)(3\,360)(1\,000)}{(0.9)(8)(96)^2} = 607.6$$

$$\rho = 0.0118 \text{ de la tabla A.12 del apéndice}$$

$$A_s = \rho bd$$

donde b es el espesor del muro y d es aproximado por $0.80\ \ell_w = (0.8)(12 \times 10) = 96''$

$$A_s = (0.0118)(8)(96) = 9.06 \text{ plg}^2$$

<u>Usar 10 varillas #9 en cada extremo (suponiendo que V_u puede venir de cualquiera de las dos direcciones)</u>

7. En la figura 18.8 se muestra un croquis de la sección transversal del muro. Si este mismo muro se ha sometido a una carga axial significativa, el método usado para calcular A_s para flexión tendría que analizarse para incluir su efecto. Para este propósito, se pueden desarrollar las suposiciones del capítulo 10 usando las hojas de cálculo para calcular las coordenadas del diagrama de interacción.

El centroide del grupo de varillas en uno u otro extremo del muro es aproximadamente de 7 plg del extremo del muro. Suponiendo que se producen todas las varillas de la tensión, la fuerza de tensión resultante también se localiza a 7 plg del extremo del muro. El valor supuesto de $d = 0.8\ell_w$ fue excesivamente conservador. Se puede tomar como $120 - 7 = 113$ plg. Analizando el cálculo para A_s usando este valor de d, se tiene como resultado una nueva $A_s = 7.32$ plg^2. Como consecuencia se puede reducir el tamaño de la varilla al #8 con la misma cantidad de varillas (10 varillas del #8 en cada extremo).

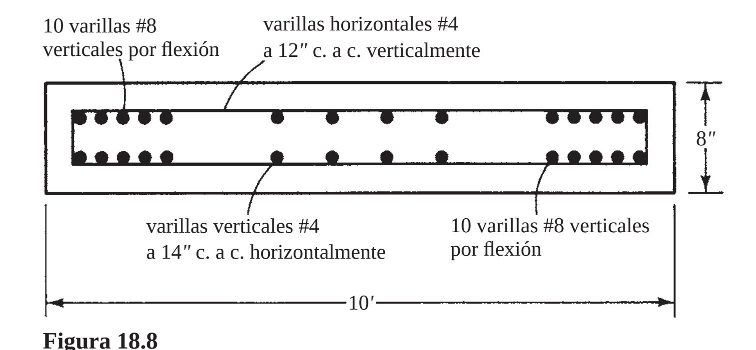


Figura 18.8

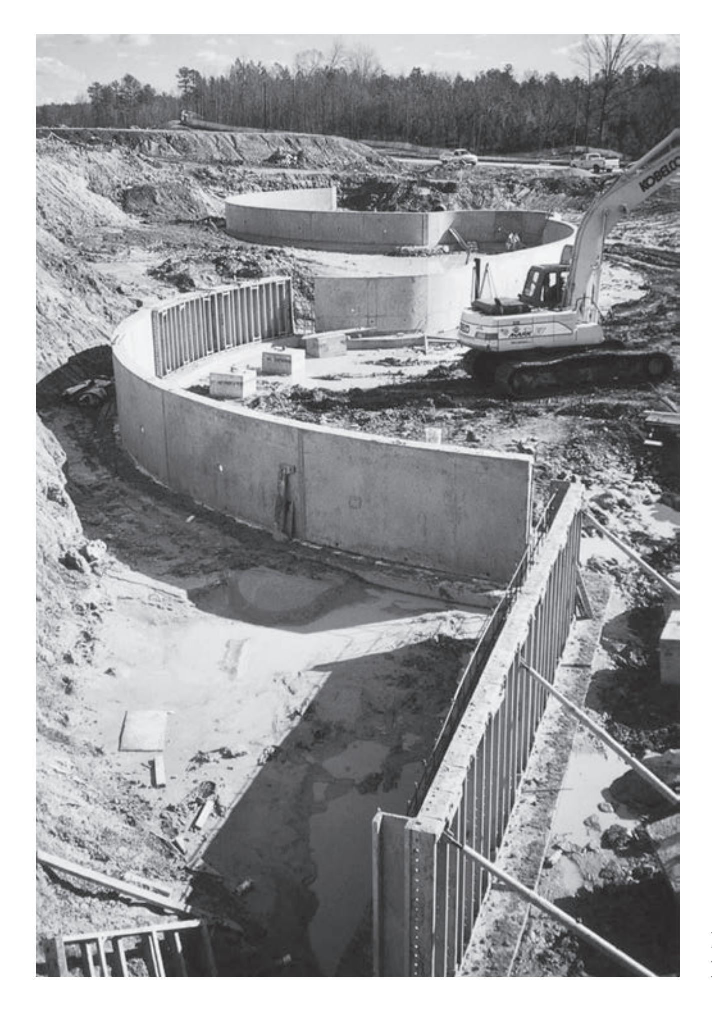
18.7 ASPECTOS ECONÓMICOS DE LA CONSTRUCCIÓN DE MUROS

Para construir muros económicos de concreto reforzado, es necesario considerar aspectos tales como el espesor del muro, juntas de construcción, alturas de las zapatas, etcétera.

El espesor de los muros debe ser suficiente para permitir la colocación y vibrado adecuados del concreto. Todas las paredes de un edifico deben tener el mismo espesor si es posible. Esto permite volver a usar la cimbra, conexiones, etc. Además, se reduce la posibilidad de cometer errores durante la construcción.

Deberán tenerse tan pocas juntas como sea posible en los muros de concreto. Cuando son necesarias, es preferible repetir los tamaños y sus posiciones en los distintos muros, en vez de usar diferentes tamaños y posiciones. Además, unas cuantas juntas grandes son más económicas que un gran número de juntas pequeñas.

Puede ahorrarse mucho dinero si la altura de una zapata puede mantenerse constante en un muro dado. Esto simplifica considerablemente la cimbra usada en el muro. Si se requieren escalones en una zapata, su número deberá ser el mínimo posible.[4]



Planta de agua potable de la punta sur, Durham, NC. (Cortesía de EFCO.)

[4]Neville, G.B., ed., 1984, *Simplified Design of Reinforced Concrete Buildings of Moderate Size* (Skokie, IL: Portland Cement Association), págs. 9-12 y 9-13.

18.8 EJEMPLOS CON COMPUTADORA

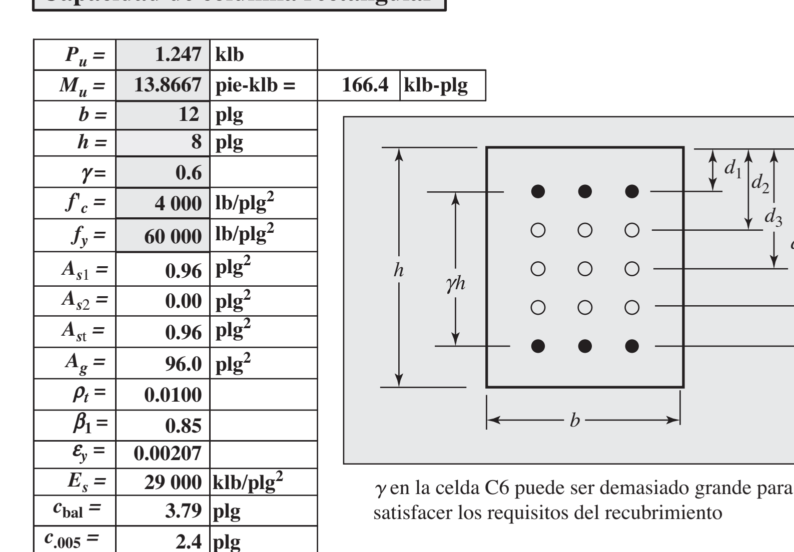
Los muros de concreto pueden diseñarse usando la hoja de cálculo Excel suministrada para los capítulos 9 y 10 con valores apropiados de entradas e interpretación de los resultados. Se usa un valor de $b =$ 12 plg, entonces las cargas por pie de longitud de muro son simplemente las cargas de entrada. Solamente se ingresa un valor de A_{s1}, ya que es insólito tener más de dos capas de acero en un muro. Si solamente se usa una capa, entonces ingrese un valor de $\gamma = 0$. Con objeto de evitar el tener que ligar lateralmente el refuerzo de compresión, el área del refuerzo vertical total se limita a 0.01 veces el área total de concreto. La hoja de cálculo podría modificarse fácilmente para despreciar la contribución del acero en compresión, y si se hiciera esto, no tendría que aplicarse el límite de 0.01.

EJEMPLO 18.4

Resuelva el ejemplo 18.2 usando las hojas de cálculo para los capítulos 9 y 10.

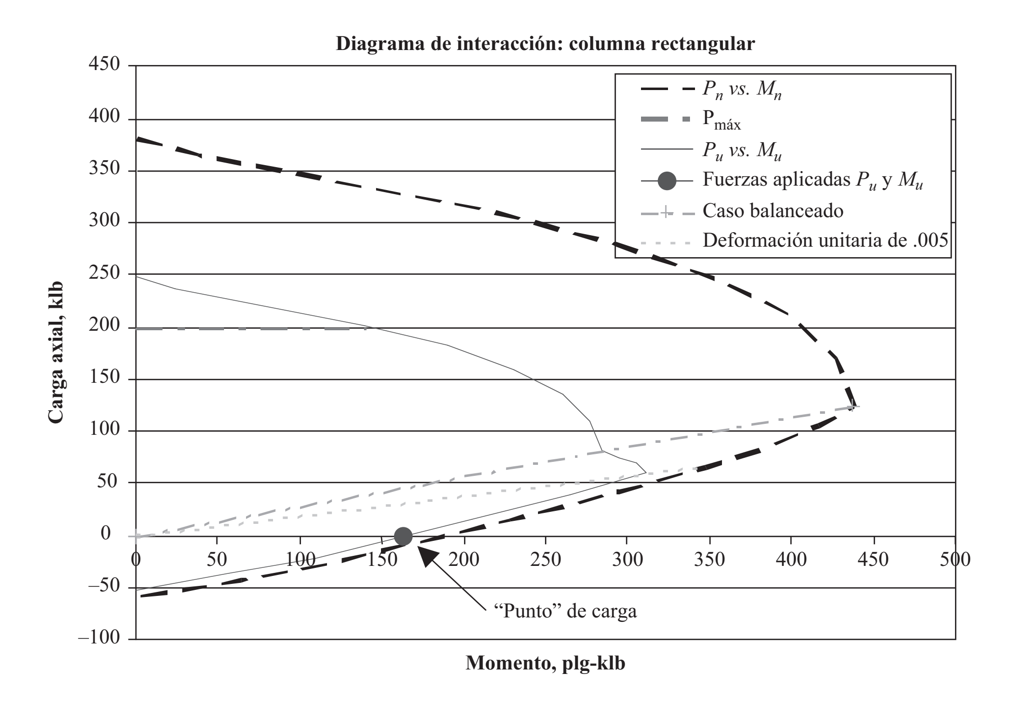
SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo Excel para los capítulos 9 y 10, y la hoja de trabajo Rect Col. Ingrese un caso de carga a la vez. Remítase a la tabla de combinaciones de carga en el ejemplo 18.2 y busque bajo el encabezado P_u y M_u. Solamente se muestran los valores de P_u y M_u para la combinación de carga $U = 0.9D + 1.6H$ en la pantalla impresa abajo. No es posible en este ejemplo distinguir entre el valor de A_{s1} requerido para los casos de carga $U = 0.9D + 1.6H$ y $U = 1.2D + 1.6L + 1.6H$, de modo que sólo se muestra el primero. Una vez que se ingresan valores para P_u, M_u, b (siempre 12 plg para muros), h, f'_c y f_y, ingrese los valores de prueba para A_{s1} (A_{s2} siempre es cero para muros). Entonces mire el diagrama de interacción y vea si la carga "punto" está dentro del contorno del diagrama de interacción. Use el diagrama más pequeño que ha sido reducido por el factor ϕ. Si el punto está situado bastante fuera del contorno, tal vez sea necesario incrementar el espesor del muro. Al resolver este problema con los diagramas de interacción en el apéndice, fue necesario usar $\gamma = 0.6$. Para muros con dos capas de acero, $\gamma = 0.5$ es más realista, y este ejemplo podría resolverse fácilmente usando este valor. El valor de A_{s1} obtenido por prueba y error es el área total de acero por pie de longitud de muro. La mitad va para cada capa, de modo que entre a la tabla A.6 del apéndice para buscar un valor cercano y que supere a 0.48 plg^2/pie. Seleccione #5 @ $7\frac{1}{2}$ plg. Si el acero está solamente en una capa, ingrese un valor de $\gamma = 0$. El acero puesto de esta manera es menos eficiente, y frecuentemente se necesita un muro más grueso. Remítase al ejemplo 18.2 para los requisitos de acero horizontal.

Capacidad de columna rectangular



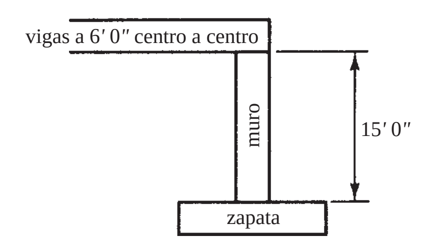
P_u =	1.247	klb		
M_u =	13.8667	pie-klb =	166.4	klb-plg
b =	12	plg		
h =	8	plg		
γ =	0.6			
f'_c =	4 000	lb/plg^2		
f_y =	60 000	lb/plg^2		
A_{s1} =	0.96	plg^2		
A_{s2} =	0.00	plg^2		
A_{st} =	0.96	plg^2		
A_g =	96.0	plg^2		
ρ_t =	0.0100			
β_1 =	0.85			
ε_y =	0.00207			
E_s =	29 000	klb/plg^2		
c_{bal} =	3.79	plg		
$c_{.005}$ =	2.4	plg		

γ en la celda C6 puede ser demasiado grande para satisfacer los requisitos del recubrimiento



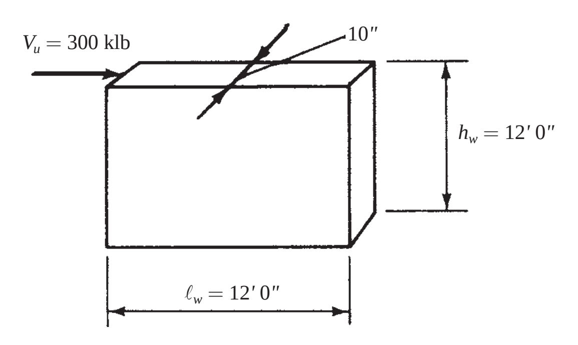
PROBLEMAS

18.1 Usando la formula empírica del ACI, diseñe un muro de carga de concreto reforzado que deberá soportar un grupo de vigas para techo precoladas de concreto a 6′0″ entre centros, como se muestra en la figura acompañante. El ancho del apoyo de cada viga es de 8". Se considera que el muro está restringido lateralmente en sus partes superior e inferior y restringido contra rotaciones en la zapata. Desprecie el peso del muro. Otros datos: $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2, $f_y = 60\,000$ lb/plg^2, reacción de la viga, $D = 35$ klb, $L = 25$ klb. (*Resp.:* muro de $7\frac{1}{2}$ plg con varillas #3 @ 12 plg como acero vertical.)



18.2 Repita el problema 18.1 si el muro no está restringido contra rotaciones ni arriba ni abajo, si tiene una altura de 8′0″, y tiene un $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2.

18.3 Diseñe el muro de concreto reforzado mostrado si $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2 y $f_y = 60\,000$ lb/plg^2. (*Una respuesta:* muro de 10 plg con 8 varillas #9 por flexión en cada extremo.)



18.4 Repita el problema 18.3 si $h_w = 15'0''$ y si $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2.

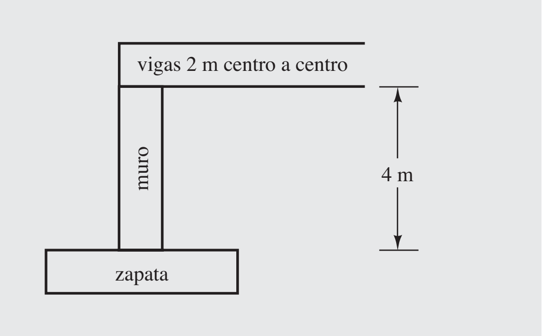
18.5 Diseñe el muro del problema 18.1 usando los diagramas de interacción de columna (véase el ejemplo 18-2). Cambie la altura del muro de 15 a 20 pies. Remplace las vigas con una losa sólida en una dirección. La losa ejerce una carga muerta de 6 klb/pie y una carga viva de 4 klb/pie, ambas con una excentricidad de 3 plg medida desde el centro del muro hacia la izquierda. Se coloca relleno de suelo a una profundidad de 20 pies en el lado derecho del muro ($\gamma_s = 100$ lb/pie^3, $k_a = 0.33$). (*Resp.:* muro de 8 plg con varillas #6 @ 5 plg, 2 capas.)

18.6 Repita el problema 18.5 usando la hoja de cálculo Excel proporcionada para los capítulos 8 y 9.

18.7 Repita el problema 18.6 usando acero en una capa. (*Resp.:* muro de 12 plg con #9 @ 4 plg.)

Problema con unidades del SI

18.8. Diseñe un muro de carga de concreto reforzado usando la fórmula empírica del ACI para soportar un grupo de vigas precoladas para techo a 2 m centro a centro, como se muestra en la ilustración acompañante. El ancho del apoyo de cada viga es de 200 mm. Se considera que el muro está restringido lateralmente en sus partes superior e inferior y restringido contra rotaciones en la zapata. Desprecie el peso del muro. Otros datos: $f'_c = 21$ MPa, $f_y = 420$ MPa, reacción de la viga $D = 120$ kN, $L = 100$ kN. (*Resp.:* Muro de 160 mm de espesor con varillas #10 con refuerzo horizontal @ 200 mm centro a centro.)



19

Concreto presforzado

19.1 INTRODUCCIÓN

El presfuerzo puede definirse como la imposición a una estructura de esfuerzos internos que son de carácter opuesto a los causados por las cargas de servicio o de trabajo. Un método bastante común para describir el presfuerzo se muestra en la figura 19.1, donde una hilera de libros es sujetada por las manos de una persona. La “viga” resultante puede tomar una carga hacia abajo, siempre que el esfuerzo de compresión en el fondo de la “viga” debido a la presión sea mayor que el esfuerzo de tensión en ese lugar debido al momento producido por el peso de los libros y de las cargas superpuestas. Dicha viga así no tiene resistencia a la tensión y por ello ninguna resistencia al momento mientras no esté comprimida o presforzada. Ahora muy lógicamente puede usted expandir su imaginación a una viga que consista en una hilera de bloques de concreto sujetos por presión y luego una viga de concreto simple con resistencia insignificante a la tensión, similarmente presforzada.

La teoría del presfuerzo es bastante simple y se ha usado durante muchos años en varios tipos de estructuras. Por ejemplo, los barriles de madera se construyen con cinchos metálicos, que comprimen las dovelas entre sí formando un recipiente hermético con resistencia a las presiones de los líquidos contenidos. El presfuerzo se usa principalmente en las vigas de concreto para contrarrestar los esfuerzos de tensión causados por el peso propio del miembro y las cargas sobrepuestas. Si esas cargas causan un momento positivo en una viga, es posible presforzarla para introducir un momento negativo que contrarreste en parte o totalmente el momento positivo. Una viga ordinaria debe tener la suficiente resistencia para soportarse tanto a sí misma como a otras cargas, pero es posible producir una carga negativa con el presfuerzo que elimine el efecto del peso de la viga, generando así una “viga sin peso propio”.

Del análisis anterior, es fácil ver por qué el presfuerzo se ha adueñado de la imaginación de tantos ingenieros y por qué tiene todo tipo de posibilidades tanto ahora como en el futuro.

En los capítulos anteriores de este libro, sólo una porción de las secciones transversales de los miembros a flexión podía considerarse eficaz para resistir cargas, porque una gran parte de esas secciones trabajaban a tensión con el consiguiente agrietamiento. Sin embargo, si los miembros de concreto a flexión pueden presforzarse de manera que sus secciones transversales en su totalidad se mantengan a compresión, entonces las propiedades de las secciones enteras estarán disponibles para resistir las fuerzas aplicadas.

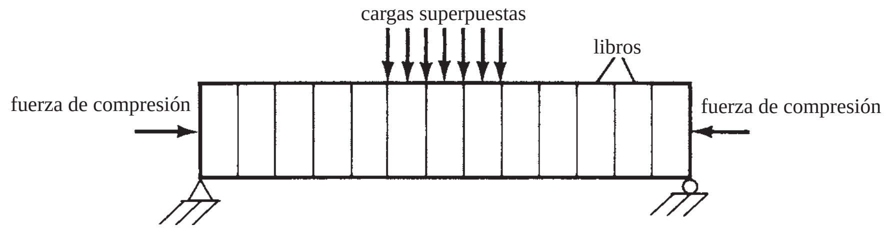


Figura 19.1 Presfuerzo.

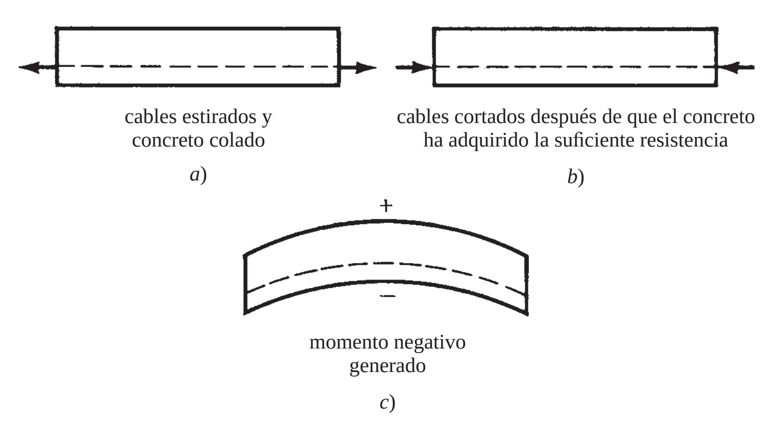


Figura 19.2

Para ilustrar en forma más detallada el presfuerzo, nos referiremos a la figura 19.2. Se supone que se han tomado los siguientes pasos con respecto a esta viga:

1. Los cables de acero (representados por las líneas punteadas) se colocaron en la parte inferior de la cimbra de la viga.
2. Los cables se tensionaron a un esfuerzo muy alto.
3. El concreto se coló en la cimbra y se permitió que alcanzara la suficiente resistencia para poder cortar los cables del presfuerzo.
4. Se cortaron los cables.



Canales de concreto presforzado, John A. Denies Son Company, Almacén # 4, Memphis, Tennessee. (Cortesía de Master Builders.)

Los cables cortados tienden a retomar su longitud original, comprimiendo así la parte inferior de la viga y generando un momento negativo de flexión. El momento positivo causado por el peso de la viga y cualquier carga de gravedad superpuesta se opone directamente al momento negativo. Otra manera de explicar esto, es decir que se ha producido en el fondo de la viga un esfuerzo de compresión opuesto al esfuerzo de tensión causado ahí por las cargas de trabajo.

19.2 VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL CONCRETO PRESFORZADO

Ventajas

Como se indicó en la sección 19.1, con el presfuerzo es posible utilizar las secciones transversales enteras de los miembros para resistir las cargas. Así, pueden usarse miembros más pequeños para soportar las mismas cargas o miembros del mismo tamaño para claros más grandes. Esto representa una ventaja particularmente importante, porque el peso de los miembros es una parte considerable de las cargas totales de diseño en las estructuras de concreto.

Los miembros presforzados no se agrietan bajo cargas de trabajo, y por ello tienen mejor aspecto y son más impermeables, lo que implica una mejor protección contra la corrosión del acero. Además, los miembros presforzados sin grietas requieren menos mantenimiento y duran más que los miembros agrietados de concreto reforzado. Por tanto, para un gran número de estructuras, el concreto presforzado es la mejor solución respecto al costo inicial, y cuando se toma en cuenta el menor mantenimiento requerido, el concreto presforzado proporciona el costo global más bajo en muchos casos adicionales.

Los momentos negativos causados por el presfuerzo producen combadura en los miembros, y en consecuencia las deflexiones totales resultan menores. Otras ventajas del concreto presforzado son las siguientes: una reducción de los esfuerzos de tensión diagonal, secciones más rígidas bajo cargas de trabajo, y mayor resistencia a la fatiga y al impacto, en comparación con las estructuras comunes de concreto reforzado.

Desventajas

El concreto presforzado requiere el uso de concretos y aceros de alta resistencia, así como de cimbra más complicada, con un mayor costo de mano de obra. Otras desventajas son:

1. Se requiere un control de calidad más estricto en la fabricación.
2. Pérdidas en las fuerzas de presfuerzo inicial. Cuando se aplican las fuerzas de compresión al concreto debido al presfuerzo, se presenta un cierto acortamiento que relaja parcialmente los cables. El resultado es cierta reducción en la tensión en los cables con una pérdida resultante en las fuerzas de presfuerzo. La contracción y el flujo plástico del concreto se suman a este efecto.
3. En el diseño deben revisarse condiciones adicionales de esfuerzo, tales como los esfuerzos que se presentan cuando se aplican por primera vez las fuerzas iniciales de presfuerzo y luego después de que han ocurrido las pérdidas del presfuerzo, así como los esfuerzos que se presentan por las diferentes condiciones de carga.
4. El costo de los dispositivos de anclaje terminales y de las placas de extremo de viga que se requieren.

19.3 PRETENSADO Y POSTENSADO

Los dos métodos generales de presforzar son el pretensado y el postensado. El *pretensado* se ilustró en la sección 19.1, donde los tendones de presfuerzo se tensaron antes de colar el concreto. Después de que el concreto endureció suficientemente, se cortaron los tendones y la fuerza de presfuerzo se transmitió al



Figura 19.3 Cama de presfuerzo.

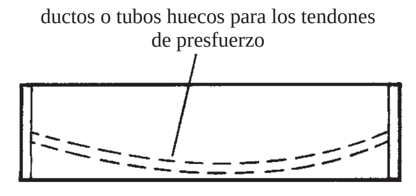


Figura 19.4 Viga postensada.

concreto por adherencia. Este método es particularmente apropiado para la producción en masa, porque las camas de colado pueden construirse de varios cientos de pies de longitud. Los tendones pueden tenderse sobre toda la longitud de la cama y usarse para colar varias vigas en línea al mismo tiempo, como se muestra en la figura 19.3.

En la construcción *postensada* (véase la figura 19.4), los tendones se tensan después de colar el concreto y de que éste hay adquirido la resistencia deseada. Se colocan en la cimbra tubos, conductos o manguitos de plástico o de metal con los tendones sin presforzar dentro de ellos (o que se insertan después) y se cuela el concreto. Una vez que el concreto ha endurecido suficientemente, los tendones se estiran y se unen mecánicamente a dispositivos de anclaje en los extremos para mantener a los tendones en su condición estirada. Así, en el postensado, las fuerzas de presfuerzo se transfieren al concreto no por adherencia, sino por apoyo extremo.

En el postensado es posible tener tendones adheridos o no adheridos. Si son adheridos, los ductos suelen ser de aluminio, acero o algún otro forro de metal. Además, es posible usar tubos o varillas de acero o núcleos de caucho que se cuelan junto con el concreto y se retiran unas horas después de haber colado el concreto. Luego de que se ha tensado el acero, se inyecta lechada de cemento en el ducto para suministrar adherencia. La lechada es también útil para proteger el acero de la corrosión. Si los tendones no van a estar adheridos, deben engrasarse para facilitar su tensado y para protegerlos de la corrosión.[1]

19.4 MATERIALES USADOS PARA EL CONCRETO PRESFORZADO

Los materiales comúnmente usados para el concreto presforzado son el concreto y los aceros de alta resistencia. Normalmente, el concreto que se usa es de mayor resistencia que el usado en los miembros comunes de concreto reforzado, por varias razones, incluidas las siguientes:

1. El módulo de elasticidad de tales concretos es mayor, por lo que las deformaciones unitarias elásticas en el concreto resultan menores cuando se cortan los tendones. En consecuencia, las relajaciones o pérdidas en los esfuerzos de los tendones son menores.
2. En el concreto presforzado, el miembro completo se mantiene en compresión, por lo que todo el concreto resiste eficazmente las fuerzas. Es por tanto razonable gastar en un concreto más caro pero más resistente si todo él se utiliza. (En las vigas de concreto reforzado común, más de la mitad de las secciones transversales están en tensión y por ello se supone que sufren agrietamiento. En consecuencia, si se usara en ellos concreto de resistencia superior, más de la mitad se estaría desperdiciando.)

[1]Nawy, E.G., 2005, *Prestressed Concrete*, 5a. ed. (Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall), págs. 62-69.



Puente construido con segmentos de concreto presforzado sobre el Río Trent, cerca de Scunthorpe, Lincolnshire, Inglaterra. (Cortesía de Cement and Concrete Association.)

3. La mayoría de la obra de presfuerzo en Estados Unidos es del tipo precolado y pretensado, realizándose en talleres de presfuerzo donde el trabajo puede ser controlado cuidadosamente y donde puede obtenerse un concreto confiable de alta resistencia.
4. En la obra pretensada, los concretos de alta resistencia permiten el uso de mayores esfuerzos de adherencia entre los cables y el concreto.

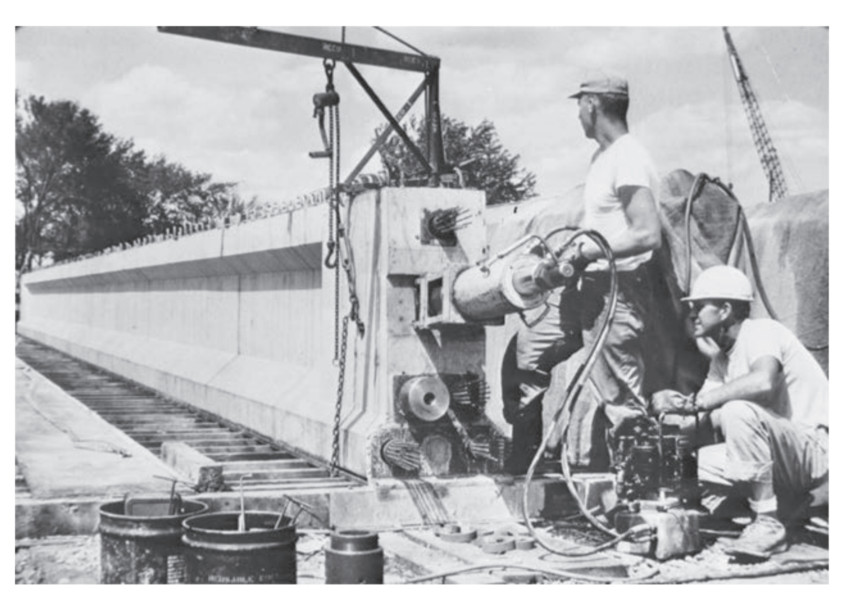
Los aceros de alta resistencia son necesarios para producir y mantener fuerzas de presfuerzo satisfactorias en los miembros. Las deformaciones unitarias que se presentan en estos aceros durante el presfuerzo, son mucho mayores que las que pueden obtenerse con acero de refuerzo ordinario. En consecuencia, cuando el concreto se acorta elásticamente por compresión, por contracción y por flujo plástico, las pérdidas en la deformación unitaria del acero (y por ello en los esfuerzos) representan un porcentaje menor del esfuerzo total. Otra razón para el uso de aceros de alta resistencia es que puede desarrollarse una fuerza de presfuerzo grande en un área pequeña.

Los primeros trabajos con concreto presforzado, donde se usaban varillas ordinarias de refuerzo para inducir las fuerzas de presfuerzo en el concreto, no tuvieron éxito porque los bajos esfuerzos que podían aplicarse a esas varillas se perdían completamente debido al flujo plástico y a la contracción del concreto. Si se aplica un presfuerzo de 20 000 lb/plg^2 en tales varillas, las deformaciones unitarias serán de $20\ 000/(29 \times 10^6) = 0.00069$. Este valor es menor que la fluencia plástica y la contracción a largo plazo que se presentan normalmente en el concreto, es decir, aproximadamente 0.0008, lo cual cancelaría completamente el esfuerzo en el acero. Si un acero de alta resistencia se presfuerza aproximadamente a 150 000 lb/plg^2 y tiene ese mismo flujo plástico y esa misma contracción, la reducción del esfuerzo será del orden de $(0.0008)(29 \times 10^6) = 23\ 000$ lb/plg^2, dejando $150\ 000 - 23\ 200 = 126\ 800$ lb/plg^2 en el acero (una pérdida de sólo 15.47% en el esfuerzo del acero).[2]

Se usan tres formas de acero de presfuerzo: los alambres simples, los torones de alambre y las varillas. Cuanto mayor es el diámetro de los alambres, menor resulta su resistencia y adherencia al concreto. Como consecuencia, los alambres se fabrican con diámetros de 0.192 plg hasta un máximo de 0.276 plg (aproximadamente $\frac{9}{32}$ plg). En el trabajo de postensado, un gran número de alambres se agrupan en paralelo para formar tendones. Los torones que se forman torciendo entre sí varios alambres, son usados en la mayoría de los trabajos de pretensado. Ellos son del tipo de 7 alambres, en donde un alambre central queda firmemente rodeado por los otros 6 alambres torcidos en espiral a su alrededor. Los torones se fabrican con diámetros de $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$ plg. Algunas veces se usan varillas de aleaciones de acero de gran tamaño y alta resistencia, tratadas térmicamente, para las secciones postensadas. Éstas se encuentran disponibles en diámetros que van de $\frac{3}{4}$ a $1\frac{3}{8}$ plg.

Los aceros de alta resistencia para presfuerzo no tienen puntos de fluencia bien definidos (véase la figura 19.10) como los tienen los aceros al carbono para refuerzo estructural. Sin embargo, la práctica de

[2]Winter, G. y Nilson, A.H., 1991, *Design of Concrete Structures*, 11a. ed. (Nueva York: McGraw Hill), págs. 759-760.



Trabes presforzadas de puente en Butler, Pennsylvania. (Cortesía de Portland Cement Association.)

considerar puntos de fluencia está tan difundida, que a los aceros de alta resistencia se les asigna de todas maneras un punto de fluencia arbitrario. Se supone que el esfuerzo de fluencia de alambres y tendones es igual al esfuerzo que ocasiona una elongación total de 1% en el acero. En las varillas de alta resistencia se supone que el esfuerzo de fluencia ocurre cuando se alcanza una deformación unitaria permanente de 0.2%.

19.5 CÁLCULOS DE ESFUERZOS

Para considerar los esfuerzos en una viga rectangular presforzada, nos referiremos a la figura 19.5. En este ejemplo, los tendones de presfuerzo se suponen rectos, aunque se verá después que para muchas vigas una configuración curva de éstos es más eficiente. Se supone que los tendones están localizados excéntricamente a una distancia e por debajo del eje centroidal de la viga. Como consecuencia, la viga queda sometida a una combinación de una compresión directa y de un momento debido a la excentricidad del presfuerzo. Además, existirá un momento debido a la carga externa que incluye el peso propio de la viga. El esfuerzo resultante en cualquier punto de la viga causado por estos tres factores puede escribirse como sigue, en donde P es la fuerza de presfuerzo:

$$f = -\frac{P}{A} \pm \frac{Pec}{I} \pm \frac{Mc}{I}$$

En la expresión anterior, P es la fuerza de presforzado, e es la excentricidad de la fuerza de presfuerzo con respecto al centroide de la sección transversal, c es la distancia del eje centroidal a la fibra extrema (arriba o abajo, dependiendo de donde se determinen los esfuerzos), M es el momento aplicado debido a cargas no factorizadas en la etapa de cálculo de los esfuerzos, A es el área de la sección transversal del concreto sin agrietar, e I es el momento de inercia de la sección transversal total de concreto. En la figura 19.5, se muestra un diagrama de esfuerzo para cada uno de estos tres elementos, y los tres se combinan para dar el diagrama de esfuerzos finales.

Es práctica común basar el cálculo de los esfuerzos en el intervalo elástico en las propiedades de la sección total del concreto. La sección total consiste en las dimensiones externas del concreto, sin considerar el área transformada de los tendones de acero y sin restar las áreas de los ductos del postensado. Se

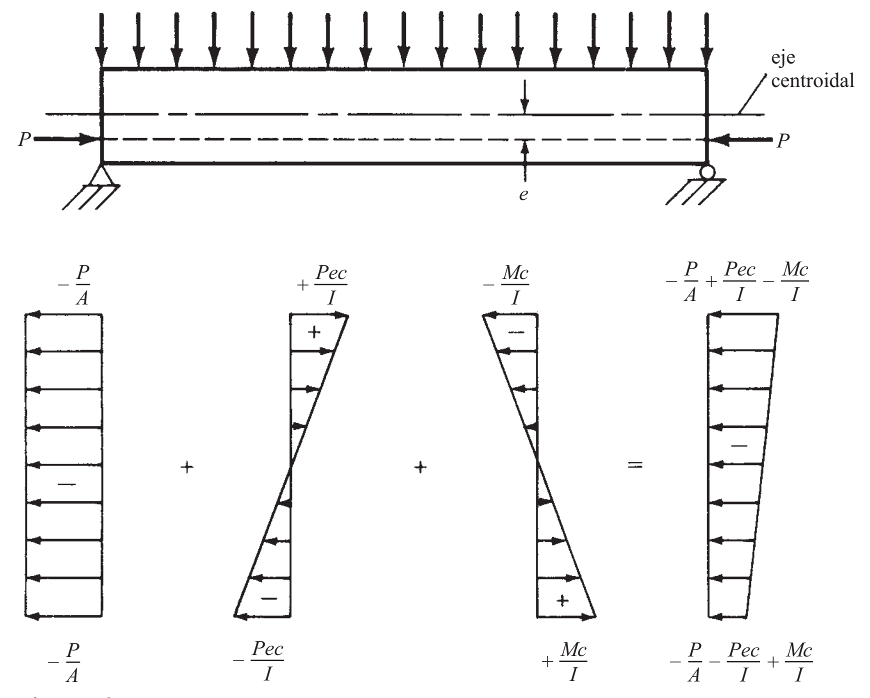


Figura 19.5

estima que el método da resultados satisfactorios porque los cambios en los esfuerzos obtenidos, al usar las propiedades netas o las transformadas de la sección, no son significativos.

El ejemplo 19.1 ilustra los cálculos necesarios para determinar los esfuerzos en varios puntos de una viga rectangular simplemente apoyada y presforzada. Se observará que como no hay momentos en los extremos de una viga simple debido a las cargas externas o al peso propio, la parte Mc/I de la ecuación del esfuerzo es igual a cero y la ecuación se reduce entonces a

$$f = -\frac{P}{A} \pm \frac{Pec}{I}$$

EJEMPLO 19.1

Calcular los esfuerzos en las fibras superiores e inferiores en el centro del claro y en los extremos de la viga mostrada en la figura 19.6.

SOLUCIÓN **Propiedades de la sección**

$$I = \left(\frac{1}{12}\right)(12)(24)^3 = 13\,824 \text{ plg}^4$$

$$A = (12)(24) = 288 \text{ plg}^2$$

$$M = \frac{(3)(20)^2}{8} = 150 \text{ pie-klb}$$

Esfuerzos en el centro del claro de la viga

$$f_{\text{sup.}} = -\frac{P}{A} + \frac{Pec}{I} - \frac{Mc}{I} = -\frac{250}{288} + \frac{(250)(9)(12)}{13\,824} - \frac{(12)(150)(12)}{13\,824}$$

$$= -0.868 + 1.953 - 1.562 = -0.477 \text{ klb/plg}^2$$

$$f_{\text{inf.}} = -\frac{P}{A} - \frac{Pec}{I} + \frac{Mc}{I} = -0.868 - 1.953 + 1.562 = -1.259 \text{ klb/plg}^2$$

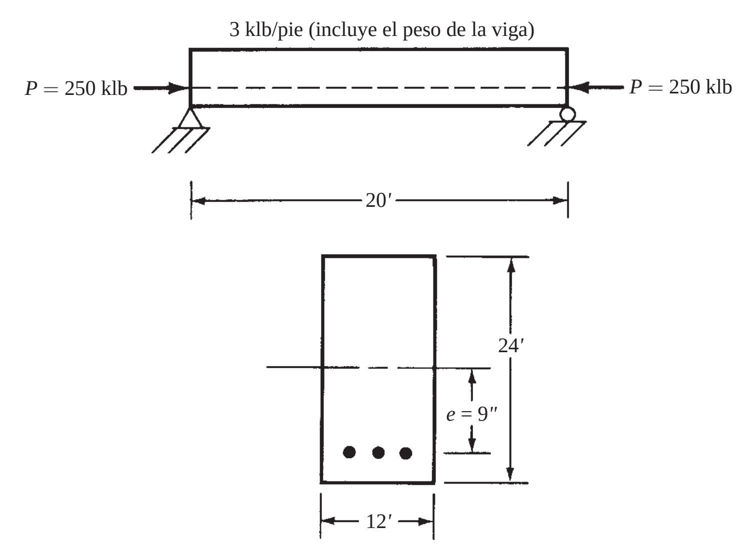


Figura 19.6

Esfuerzos en los extremos de la viga

$$f_{\text{sup.}} = -\frac{P}{A} + \frac{Pec}{I} = -0.868 + 1.953 = +1.085 \text{ klb/plg}^2$$

$$f_{\text{inf.}} = -\frac{P}{A} - \frac{Pec}{I} = -0.868 - 1.953 = -2.821 \text{ klb/plg}^2$$

En el ejemplo 19.1 se mostró que cuando los tendones de presfuerzo son rectos, el esfuerzo de tensión en la parte superior de los extremos de la viga será bastante grande. Sin embargo, si los tendones se curvan, como se muestra en la figura 19.7, es posible reducir o aun eliminar los esfuerzos de tensión. En las partes intermedias del claro, el centroide de los tendones puede quedar abajo del punto inferior del núcleo (véase el ejemplo 19.2 para la determinación del punto del núcleo para esta sección), pero si en los extremos de la viga, donde no existe esfuerzo por momento de carga muerta, el centroide queda bajo el núcleo, se darán esfuerzos de tensión en la parte superior de la sección. Si los tendones se curvan de modo que los extremos queden en o arriba de este eje, no se dará tensión en la parte superior de la viga.

En el postensado, los ductos se colocan en la cimbra con la configuración curva deseada. Los tendones en los miembros pretensados se colocan en los puntos inferiores del núcleo o arriba de ellos, y luego se empujan hacia abajo a la profundidad deseada, en la línea central o en otros puntos. En la figura 19.7 los tendones se muestran curvados a los tercios del claro. Dos alternativas a los tendones curvados que se han usado consisten en utilizar los tendones rectos situados abajo del punto inferior del núcleo, pero encerrados en tubos en sus extremos, o en engrasar sus extremos. Ambos métodos se usan para evitar el desarrollo de momentos negativos en los extremos de la viga.

En la sección 18.3.3 del ACI los miembros presforzados con adherencia y sin adherencia se designan como miembros de clase U, T o C. Estas clasificaciones se basan en los esfuerzos de tensión calcu-

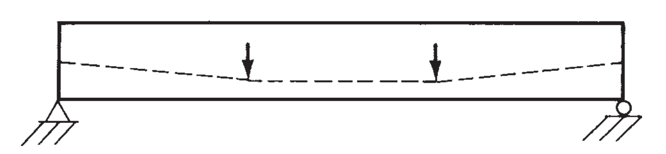


Figura 19.7 Tendones encorvados.

lados en miembros sujetos a cargas de servicio. Los miembros de clase U son aquellos que se supone que no están agrietados y que tienen esfuerzos máximos de tensión $f_t \leq 7.5\sqrt{f'_c}$. Los miembros de clase C son aquellos que se suponen agrietados y tienen $f_t > 12\sqrt{f'_c}$. Se supone que los miembros de clase T son una transición entre miembros agrietados y no agrietados y que tienen esfuerzos máximos de tensión $> 7.5\ \sqrt{f'_c} \leq 12\sqrt{f'_c}$. Las losas presforzadas en dos direcciones deben designarse como secciones de clase U con $f_t \leq 6\sqrt{f'_c}$.

La sección 18.3.4 del ACI establece que para los miembros de clase U y T los esfuerzos de flexión pueden calcularse usando las propiedades de la sección sin agrietar. Sin embargo, para las secciones de clase C, es necesario usar las propiedades de la sección agrietada.

El ejemplo 19.2 muestra los cálculos necesarios para localizar el punto del núcleo en la viga del ejemplo 19.1. Además, se calculan los esfuerzos en la parte superior e inferior de los extremos de la viga. Debe observarse que, de acuerdo con esos cálculos, el punto del núcleo está 4 plg debajo de la mitad del peralte de la viga, y por tanto los tendones de presfuerzo deberían localizarse en el punto del núcleo en los extremos de la viga y bajar a la profundidad requerida en la región intermedia. Sin embargo, en realidad los tendones en los extremos de la viga no tienen que quedar tan altos como los puntos del núcleo, porque el código ACI (18.4.1) permite algo de tensión en la parte superior de la viga cuando los tendones se cortan. Este valor es $3\sqrt{f'_{ci}}$, donde f'_{ci} es la resistencia del concreto en el momento en que se cortan los tendones, determinada en cilindros de concreto de prueba. El subíndice *i* denota "inicial", que significa la liberación inicial del tendón de presfuerzo, antes de que el concreto adquiera su resistencia total a los 28 días. Este valor permitido es aproximadamente igual al 40% de la resistencia al agrietamiento o módulo de ruptura del concreto $(7.5\sqrt{f'_{ci}})$ en ese momento. Para el esfuerzo inferior en el fondo de la viga, que es de compresión, se permite que el valor sea tan alto como $0.60\sqrt{f'_{ci}}$.

En realidad, el código permite valores hasta de $6\sqrt{f'_{ci}}$ para los esfuerzos de tensión en los extremos de las vigas simples. Estos valores permisibles de tensión son aplicables a los esfuerzos que ocurren inmediatamente después de la transferencia de las fuerzas del presfuerzo y después de que ocurren las pérdidas por acortamiento elástico del concreto y por relajación de los tendones y apoyos del anclaje. Además, se supone que las pérdidas por flujo plástico y contracción, que dependen del tiempo, no han ocurrido aún. En la sección 19.7 de este capítulo se analizan estas diversas pérdidas. Si los esfuerzos de tensión calculados son mayores que los valores permisibles, es necesario usar algún refuerzo de adherencia adicional (presforzado o no presforzado) para resistir la fuerza *total* de la tensión en el concreto, calculada con base en la sección no agrietada.

La sección 18.4.2 del código da los esfuerzos permisibles bajo cargas de servicio para miembros de clase U y clase T después de que han ocurrido todas las pérdidas por presfuerzo. Un esfuerzo de compresión en una fibra extrema igual a $0.60f'_c$ es permitido para presfuerzo más cargas permanentes. El esfuerzo permisible de compresión para presfuerzo más carga total es $0.70f'_c$. De hecho, el ACI proporciona aquí un incremento de un tercio en el esfuerzo permisible de compresión cuando un porcentaje grande de las cargas de servicio son transitorias o de corta duración.

El esfuerzo permisible de tensión en los extremos de vigas simplemente apoyadas después de la transferencia del presfuerzo es de $6\sqrt{f'_{ci}}$. La sección 18.4.3 del código permite esfuerzos permisibles mayores que los presentados aquí bajo ciertas condiciones. El comentario de esta sección del código establece que la intención de los autores del código es permitir valores mayores de esfuerzo cuando se justifiquen por el desarrollo de productos, materiales y técnicas de presforzado nuevos y mejores. La aprobación de estos incrementos debe ser de acuerdo con los procedimientos de la sección 1.4 del código.

Sólo deben permitirse esfuerzos de compresión en las secciones presforzadas que vayan a usarse en condiciones de corrosión severa. Si ocurren grietas de tensión, el resultado puede ser una mayor corrosión en los cables.

EJEMPLO 19.2

Determinar la posición del punto inferior del núcleo en los extremos de la viga del ejemplo 19.1. Calcular los esfuerzos en las fibras superiores e inferiores en los extremos de la viga, suponiendo que los tendones se colocan en el punto del núcleo.

SOLUCIÓN **Localización del punto del núcleo**

$$f_{\text{sup.}} = -\frac{P}{A} + \frac{Pec}{I} = 0$$

$$-\frac{250}{288} + \frac{(250)(e)(12)}{13\ 824} = 0$$

$$-0.868 + 0.217e = 0$$

$$e = 4''$$

Cálculo de los esfuerzos

$$f_{\text{sup.}} = -\frac{P}{A} - \frac{Pec}{I} = -\frac{250}{288} + \frac{(250)(4)(12)}{13\ 824}$$

$$= -0.868 + 0.868 = 0$$

$$f_{\text{inf.}} = -\frac{P}{A} - \frac{Pec}{I} = -0.868 - 0.868 = -1.736 \text{ klb/plg}^2$$

19.6 FORMAS DE LAS SECCIONES PRESFORZADAS

Para simplificar la presentación de la teoría del presfuerzo, se usarán secciones rectangulares en la mayoría de los ejemplos de este capítulo. Desde el punto de vista de la cimbra solamente, las secciones rectangulares son las más económicas, pero las formas más complicadas, como las I y las T, requieren menos cantidades de concreto y acero de presfuerzo para soportar las mismas cargas, por lo que con frecuencia tienen los costos totales menores.

Si un miembro va a fabricarse sólo una vez, se usará probablemente una sección transversal que requiera una cimbra sencilla (con frecuencia rectangular). Por ejemplo, una cimbra sencilla es esencial para la mayoría de los trabajos colados en obra. Sin embargo, si las formas van a usarse numerosas veces para fabricar muchos miembros idénticos, se usarán secciones transversales más complicadas como las I, T, canales o en caja. En tales secciones, el costo de la cimbra como porcentaje del costo total de cada miembro se reducirá mucho. En la figura 19.8 se muestran varios tipos de secciones presforzadas usadas comúnmente. La misma teoría general de la determinación de los esfuerzos y las resistencias a flexión es aplicable a las formas de este tipo, tal como las rectangulares.

La utilidad de una cierta sección depende de la simplicidad y reúso de la cimbra, del aspecto de las secciones, del grado de dificultad del colado del concreto y de las propiedades teóricas de la sección transversal. Cuanto mayor sea la cantidad de concreto localizado cerca de las fibras extremas de una viga, mayor será el brazo de palanca entre las fuerzas *C* y *T*, así como el momento resistente. Por supuesto, existen algunas limitaciones sobre los anchos y espesores de los patines. Además, las almas deben ser suficientemente grandes para resistir la fuerza cortante y permitir el colado apropiado del concreto y, al mismo tiempo, ser suficientemente gruesas para evitar el pandeo.

Una *T* presforzada como la que se ve en la figura 19.8(*a*), con frecuencia resulta muy económica porque una gran proporción del concreto está situado en el patín de compresión, donde es muy eficaz para resistir las fuerzas compresivas. La doble T mostrada en la figura 19.8(*b*) se usa en escuelas, edificios de oficinas, tiendas, etc., y es probablemente la sección presforzada más utilizada actualmente en Estados Unidos. El ancho total de patín proporcionado por una doble T varía entre 5 y 8 pies y son comunes los claros con ellas de 30 a 50 pies. Puede verse que un sistema de piso o techo puede construirse fácil y rápidamente colocando lado a lado una serie de dobles T precoladas, ┬┬┬┬┬┬. Estas secciones proporcionan tanto las vigas como las losas del sistema de techo o de piso. Las T simples se usan normalmente para cargas más pesadas y claros de entre 100 y 120 pies. Las doble T para tales claros serían de mucho peso y difíciles de manejar. La T simple no se usa tanto actualmente como lo fue en el pasado reciente debido a dificultades de estabilidad tanto en el flete como en el montaje.

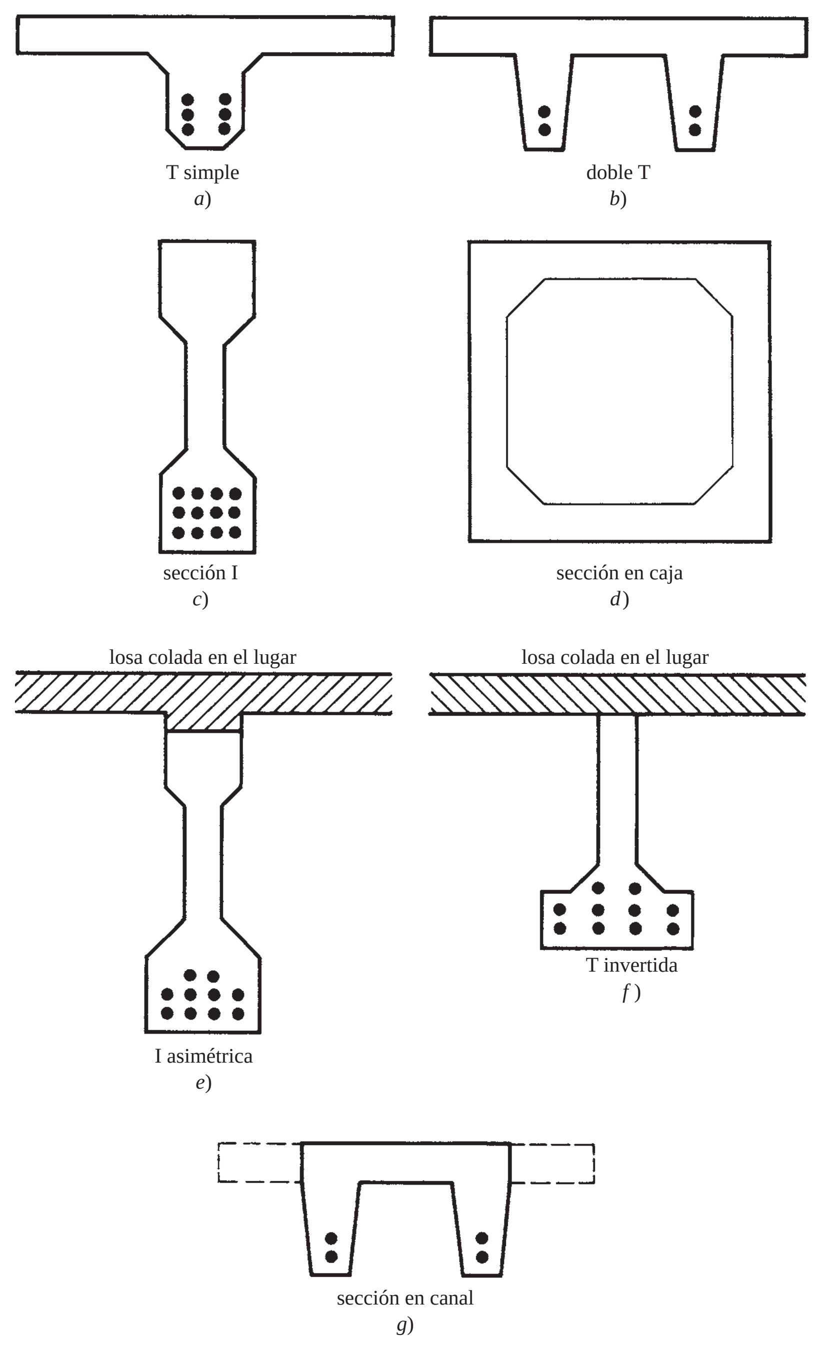
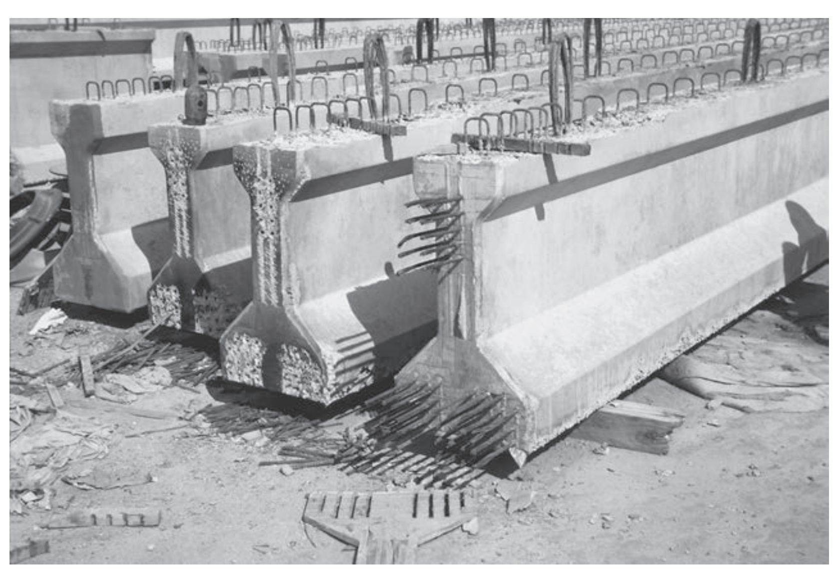
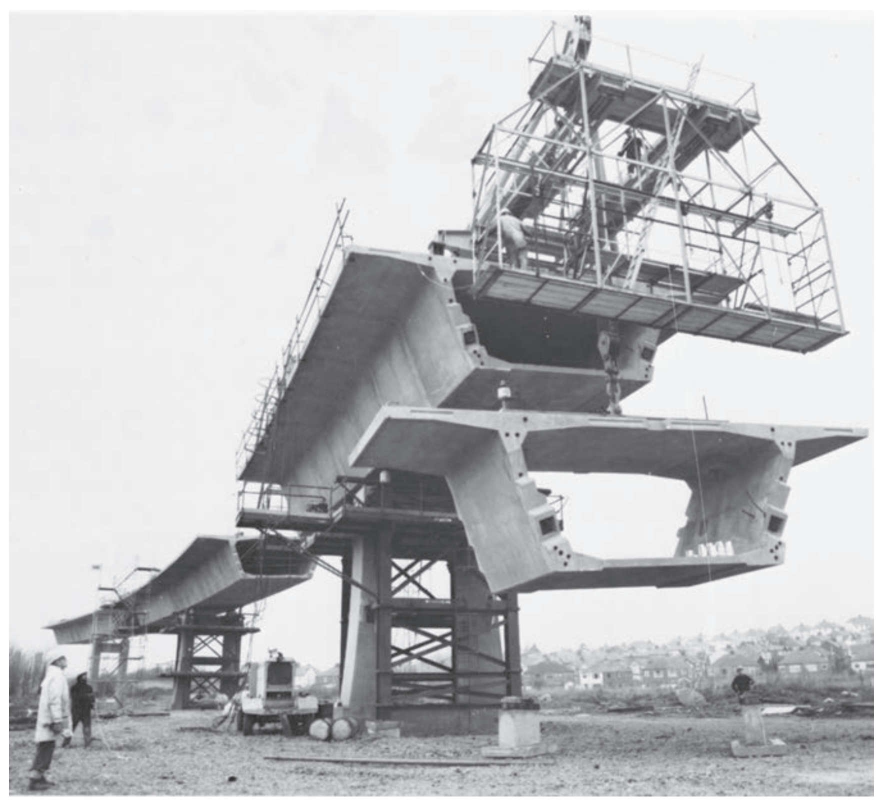


Figura 19.8 secciones presforzadas comúnmente aplicadas.

Las secciones I y en caja mostradas en las partes (*c*) y (*d*) de la figura 19.8 tienen una mayor proporción del concreto en sus patines, por lo que tienen mayores momentos de inercia (en comparación con secciones rectangulares con iguales cantidades de concreto y tendones de presfuerzo). Sin embargo, la cimbra es complicada y el colado del concreto resulta difícil. Las trabes en caja se usan con frecuencia



Trabes pretensadas para puente: la trabe de la derecha ilustra los tendones con excentricidad tanto hacia arriba como hacia abajo. (Cortesía de Portland Cement Association.)



Segmentos postensados y precolados de concreto para el viaducto East Moors, en Lanbury Way, Cardiff, Gales del Sur. (Cortesía de Cement and Concrete Association.)

para claros de puentes. Sus propiedades son iguales a las de las secciones I. Las I asimétricas [figura 19.8(*e*)], con grandes patines inferiores para alojar los tendones y pequeños patines superiores, pueden ser económicas en ciertas secciones compuestas donde se usan junto con una losa colada en el lugar, para proporcionar el patín de compresión. En la figura 19.8(*f*) se muestra una situación similar, donde una T invertida se usa junto con una losa colada en el sitio.

Se usan muchas variantes de esas secciones, tales como la sección en canal mostrada en la figura 19.8(*g*). Esta sección puede hacerse eliminando los patines de una sección doble T, como se muestra, y los miembros resultantes pueden entonces usarse para asientos en estadios o para usos similares.

19.7 PÉRDIDAS DE PRESFUERZO

Los esfuerzos de flexión calculados para las vigas de los ejemplos 19.1 y 19.2 se basaron en los esfuerzos iniciales de los tendones de presfuerzo. Sin embargo, estos esfuerzos se reducen con el paso del tiempo (en un periodo de aproximadamente cinco años) debido a varios factores. Estos factores, que se analizan en los siguientes párrafos, son:

1. Acortamiento elástico del concreto
2. Contracción y flujo plástico del concreto
3. Relajación o escurrimiento de los tendones
4. Deslizamiento en los sistemas de anclaje en el postensado
5. Fricción a lo largo de los ductos usados en el postensado

Aunque es posible calcular las pérdidas de presfuerzo individualmente para cada uno de los factores indicados arriba, es usualmente más práctico e igualmente satisfactorio usar una sola estimación global para todos los factores juntos. Se tienen demasiados factores interrelacionados que afectan las estimaciones para pretender lograr un valor exacto.

Tales estimaciones globales de pérdida total de presfuerzo son aplicables sólo a miembros presforzados promedio hechos con concreto, procedimientos de construcción y control de calidad normales. Si las condiciones son muy diferentes de éstas y/o el proyecto es sumamente importante, conviene considerar hacer estimaciones detalladas de las pérdidas como las que se presentan en los siguientes párrafos.

La resistencia última de un miembro presforzado es casi completamente controlada por la resistencia a la tensión y el área de la sección transversal de los cables. En consecuencia, las pérdidas de presfuerzo tendrán muy poco efecto en la resistencia última por flexión. Sin embargo, las pérdidas de presfuerzo ocasionarán que se presente un mayor agrietamiento bajo cargas de trabajo, lo que conduce a mayores deflexiones. Además, la resistencia del miembro a cortante y fatiga se reducirá en alguna medida.

Acortamiento elástico del concreto

Cuando se cortan los tendones de un miembro pretensado, la fuerza de presfuerzo se transfiere al concreto, por lo que éste queda trabajando a compresión y se acorta, lo que permite alguna relajación o acortamiento de los tendones. El esfuerzo en el concreto adyacente a los tendones puede calcularse tal como se describió en los ejemplos anteriores. La deformación unitaria ϵ_c en el concreto, igual a f_c/E_c, se supone igual a la deformación unitaria ϵ_s del acero, gracias a la adherencia. Así la pérdida de presfuerzo puede considerarse igual a $\epsilon_s E_s$. Un valor promedio de la pérdida de presfuerzo en los miembros pretensados debido al acortamiento elástico, es aproximadamente 3% del valor inicial del presfuerzo.

En los párrafos que siguen se muestra la obtención de la pérdida de presfuerzo debido al acortamiento elástico del concreto.

Puede verse que la deformación unitaria por compresión en el concreto debida al presfuerzo, debe ser igual a la disminución de la deformación unitaria del acero, es decir,

$$\epsilon_c = \Delta\epsilon_s$$

Estos valores pueden escribirse en términos de esfuerzos como sigue:

$$\frac{f_c}{E_c} = \frac{\Delta f_s}{E_s}$$

Podemos escribir entonces

$$\Delta f_s = \frac{E_s f_c}{E_c} = n f_c$$

donde f_c es el esfuerzo en el concreto al nivel del centroide del tendón después de la transferencia de esfuerzos por los cables.

Si expresamos con Δf_s el esfuerzo inicial f_{si} en el tendón menos el esfuerzo en el mismo después de la transferencia, podemos escribir

$$f_{si} - f_s = n f_c$$

Si P_0 es el esfuerzo total inicial en el cable y P_f es el esfuerzo después de la transferencia, obtenemos

$$P_0 - P_f = n\frac{P_f}{A_c}A_{ps}$$

$$P_0 = n\frac{P_f}{A_c}A_{ps} + P_f$$

$$P_0 = P_f\left(\frac{nA_{ps}}{A_c} + 1\right) = \frac{P_f}{A_c}(nA_{ps} + A_c)$$

Entonces

$$f_c = \frac{P_0}{A_c + A_{ps}} = \text{aproximadamente } \frac{P_0}{A_g}$$

y finalmente

$$\Delta f_s = n f_c = \frac{nP_0}{A_g}$$

valor que puede calcularse fácilmente.

En miembros postensados, la situación es un poco más complicada porque es bastante común esforzar unos cuantos tendones a la vez y conectarlos a las placas de extremo. Como resultado, las pérdidas varían, ocurriendo las mayores en los primeros tendones que se esfuerzan y las menores en los que se esfuerzan al final. Por esta razón, puede calcularse una pérdida promedio en los diferentes tendones. Las pérdidas debido al acortamiento elástico son en promedio aproximadamente .5% en los miembros postensados. Suele ser posible calcular las pérdidas esperadas en cada conjunto de tendones y sobreesforzarlos en esa cantidad, de manera que las pérdidas netas sean cercanas a cero.

Contracción y fluencia plástica del concreto

Las pérdidas de presfuerzo debido a la contracción y flujo plástico en el concreto son muy variables. Por una parte, la contracción que ocurre en el concreto varía entre casi 0 y 0.0005 plg/plg (dependiendo de la humedad y de la edad del concreto al ser cargado), con un valor promedio de aproximadamente 0.0003 plg/plg, que se usa comúnmente.

Puede decirse que la pérdida de presfuerzo por contracción es igual a $\epsilon_{sh}E_s$, donde ϵ_{sh} es la deformación unitaria por contracción del concreto. Puede encontrarse un valor recomendado de ϵ_{sh} en Zia y otros (1979), que debe determinarse multiplicando la deformación unitaria básica por contracción por

un factor correctivo basado en la razón del volumen (V) a la superficie (S) multiplicada por un factor de corrección por humedad relativa (H).[3]

$$\epsilon_{sh} = (0.00055)\left(1 - 0.06\,\frac{V}{S}\right)(1.5 - 0.15H)$$

Si el miembro es postensado, en Zia y otros se da un multiplicador adicional que toma en cuenta el tiempo entre el final del curado húmedo y la aplicación de la fuerza de presfuerzo.

La cantidad de flujo plástico en el concreto depende de varios factores, que se analizaron antes en este texto, y puede variar entre 1 a 5 veces el acortamiento elástico instantáneo. Las fuerzas de presfuerzo usualmente se aplicaron a los miembros pretensados en la edad del concreto mucho antes que a los miembros postensados. Los miembros pretensados se cuelan generalmente en una cama en un patio de presfuerzo, donde la rapidez de la producción de los miembros es una cuestión económica importante. El propietario busca tensionar el acero, colar el concreto y retirar los miembros de la cama de colado, tan pronto como el concreto alcance suficiente resistencia, de modo de poder seguir trabajando con la siguiente camada. En consecuencia, la contracción y el flujo plástico son mayores, así como las pérdidas resultantes. Las pérdidas promedio para miembros pretensados son de aproximadamente 6%, y para miembros postensados, de aproximadamente 5%.

Las pérdidas en los esfuerzos de los cables debido a la deformación unitaria por flujo plástico, pueden determinarse multiplicando un coeficiente determinado experimentalmente C_t de flujo plástico, por nf_c.

$$\Delta f_s = C_t n f_c$$

En Zia y otros (1979) se recomienda un valor de $C_t = 2.0$ para secciones pretensadas, y de 1.6 para secciones postensadas. Estos valores deben reducirse hasta 20% si se usa concreto ligero. El valor f_c se define como el esfuerzo en el concreto adyacente al centroide de los tendones debido al presfuerzo inicial ($-P/A$), y debido a las cargas muertas permanentes que se aplican al miembro después del pretensado ($-Pec/\mathrm{I}$), donde e se mide del centroide de la sección al centroide de los tendones.

Relajación o flujo plástico en los tendones

El flujo plástico o relajación de los tendones de acero es muy pequeño cuando los esfuerzos son bajos, pero el porcentaje de relajación aumenta cuando los esfuerzos son mayores. En general, las pérdidas estimadas varían entre 2 y 3% de los esfuerzos iniciales. La magnitud de estas pérdidas en realidad varía bastante para diferentes aceros y debe determinarse en función de los datos proporcionados por el fabricante del metal. Existe una fórmula con la que esta pérdida puede calcularse.

Deslizamiento en los sistemas de anclaje del postensado

Cuando se sueltan los restiradores y las fuerzas de presfuerzo se transfieren al extremo del sistema de anclaje, ocurre un pequeño deslizamiento de los tendones. La magnitud del deslizamiento depende del sistema usado y varía entre 0.10 y 0.20 plg. Tales deformaciones son muy importantes si los miembros y los tendones son cortos, pero si fueran largos, el porcentaje es de menor importancia.

[3] Zia, P., Preston, H.K., Scott, N.L. y Workman, E.B., 1979, “Estimating Prestress Losses”, *Concrete International: Design & Construction*, vol. 1, no. 6 (Detroit: American Concrete Institute), págs. 32-38.

Fricción a lo largo de los ductos usados en el postensado

Existen pérdidas en el postensado debido a la fricción entre los tendones y los ductos que los contienen. En otras palabras, el esfuerzo en los tendones disminuye gradualmente conforme aumenta la distancia desde el punto de tensado, debido a la fricción entre los tendones y el material circundante. Estas pérdidas se deben a los llamados efectos de longitud y curvatura.

El *efecto de longitud* es la fricción que se tendría si el tendón fuese recto en vez de curvo. En realidad, es imposible que haya un ducto totalmente recto en la construcción postensada; en consecuencia, se da una fricción llamada efecto de longitud y también *efecto por balanceo*. La magnitud de esta fricción depende del esfuerzo en el tendón, de su longitud, de la mano de obra para el miembro específico en cuestión y del coeficiente de fricción entre los materiales.

El *efecto de curvatura* es la cantidad de fricción que ocurre además del efecto por balanceo que no ha sido planificado. La pérdida resultante es debida al efecto de fricción entre los materiales causado por la presión de los tendones sobre el concreto, la cual depende del esfuerzo y del cambio del ángulo en los tendones curvos.

Es posible reducir considerablemente las pérdidas por fricción en el presfuerzo por medio de varios métodos. Éstos incluyen el uso del restirador (o gato) en ambos extremos, el sobreesfuerzo inicial de los tendones y la lubricación de los cables no adheridos.

El código ACI (18.6.2) requiere que las pérdidas por fricción en miembros postensados se calculen con coeficientes de longitud y curvatura obtenidos experimentalmente y verificados durante la operación de presforzado. Además, el código proporciona las ecuaciones 18-1 y 18-2 (en la sección 18.6.2.1) para efectuar los cálculos. El comentario ACI (R18.6.2) suministra los valores de los coeficientes de fricción para usarse en las ecuaciones.

19.8 RESISTENCIA ÚLTIMA DE SECCIONES PRESFORZADAS

Se da ahora considerable énfasis a la resistencia última de las secciones presforzadas, siendo el objetivo obtener un factor satisfactorio de seguridad contra el colapso. Podría preguntarse por qué es necesario en el trabajo de presfuerzo considerar *tanto* la condición bajo esfuerzos de trabajo como la condición de la resistencia última. La respuesta radica en los tremendos cambios que ocurren en el comportamiento de un miembro presforzado después de que se forman grietas de tensión. Antes de que empiecen a formarse las grietas, la sección transversal entera de un miembro presforzado puede resistir las fuerzas, pero después de que se empiezan a desarrollar las grietas, la parte agrietada ya no puede resistir las fuerzas de tensión. Usualmente, se supone que el agrietamiento ocurre cuando los esfuerzos de tensión calculados son iguales al módulo de ruptura del concreto (aproximadamente $7.5\sqrt{f'_c}$).

Otra pregunta que usted podría formularse es: ¿qué efecto tienen las fuerzas de presfuerzo en la resistencia última de una sección? La respuesta es muy sencilla. Un análisis por resistencia última se basa en la hipótesis de que los tendones de presfuerzo están esforzados más allá de su punto de fluencia. Si los tendones han cedido, el lado de tensión de la sección estará agrietado y el momento resistente último teórico es el mismo que para una viga no presforzada construida con el mismo concreto y el mismo refuerzo.

El cálculo teórico de las capacidades últimas de las secciones presforzadas no es un asunto rutinario, como en el caso de los miembros ordinarios de concreto reforzado. Los aceros de alta resistencia con que se fabrican los tendones del presfuerzo, no tienen puntos de fluencia bien definidos. A pesar de esto, el método de resistencia para determinar las capacidades últimas por momento de secciones concuerda bastante bien con las pruebas de carga, siempre que el porcentaje de acero sea lo suficientemente pequeño como para que se tenga una falla de tensión y siempre que se trate de tendones adheridos.

En las expresiones usadas aquí, f_{ps} es el esfuerzo promedio en el acero de presfuerzo bajo la carga de diseño. Este esfuerzo se usa en los cálculos porque los aceros en cuestión usados comúnmente en

las vigas presforzadas, no tienen puntos bien definidos de fluencia (es decir, las secciones planas que son comunes en las curvas de esfuerzo-deformación unitaria de los aceros estructurales ordinarios). A menos que los puntos de fluencia de estos aceros se determinen por medio de estudios detallados, sus valores son normalmente especificados. Por ejemplo, el código ACI (18.7.2) establece que puede usarse la siguiente expresión aproximada para calcular f_{ps}. En esta expresión, f_{pu} es la resistencia última del acero de presfuerzo, ρ_p es el porcentaje de refuerzo presforzado A_{ps}/bd_p, y f_{se} es el esfuerzo efectivo en el acero de presfuerzo después de ocurridas las pérdidas. Si se dispone de valores más precisos para el esfuerzo, pueden usarse éstos en vez de los valores especificados. Los valores resultantes en ningún caso pueden tomarse mayores que la resistencia especificada de fluencia f_{py} o bien f_{se} + 60 000. Para miembros adheridos

$$f_{ps} = f_{pu}\left(1 - \frac{\lambda_p}{\beta_1}\left[\rho_p \frac{f_{pu}}{f'_c} + \frac{d}{d_p}(\omega - \omega')\right]\right) \qquad \text{si } f_{se} \geq 0.5 f_{pu} \qquad \text{(Ecuación 18-3, ACI)}$$

donde γ_p es un factor para el tipo de tendón de presfuerzo cuyos valores se especifican en la sección 18.0 del ACI ($\gamma_p = 0.55$ para f_{py}/f_{pu} no menor que 0.80, 0.40 para f_{py}/f_{pu} no menor que 0.85, y 0.28 para f_{py}/f_{pu} no menor que 0.90), d_p = distancia de la fibra extrema de compresión al centroide del refuerzo presforzado, $\omega = \rho f_y / f'_c$, y $\omega' = \rho' f_y / f'_c$.

Si se considera cualquier refuerzo a compresión al calcular f_{ps}, los términos entre corchetes no deben tomarse menores que 0.17 (véase el comentario R18.7.2). Si se toma en cuenta el refuerzo a compresión y si el término entre corchetes es pequeño, la profundidad hasta el eje neutro será pequeña, por lo que el refuerzo a compresión no alcanzará su esfuerzo de fluencia. Para esta situación, los resultados obtenidos con la ecuación 18-3 del ACI no son conservadores, lo que explica por qué el ACI estipula el límite de 0.17.

Si el refuerzo a compresión se desprecia al usar la ecuación, ω' será igual a cero y el término entre corchetes puede ser menor que 0.17. Si d' es grande, la deformación unitaria en el acero a compresión puede ser considerablemente menor que la deformación unitaria de fluencia y, en consecuencia, el acero de compresión no influiría en f_{ps} tan favorablemente como lo implica la ecuación. Como consecuencia, la ecuación 18-3 del ACI sólo puede usarse para vigas en las cuales $d' \leq 0.15\, d_p$.

Para miembros no adheridos con relación de claro a peralte ≤ 35,

$$f_{ps} = f_{se} + 10\,000 + \frac{f'_c}{100\rho_p} \text{ pero no mayor que } f_{py} \text{ ni que } (f_{se} + 60\,000)$$

(Ecuación 18-4, ACI)

Para miembros no adheridos con relación de claro a peralte > 35,

$$f_{ps} = f_{se} + 10\,000 + \frac{f'_c}{300\rho_p} \qquad \text{(Ecuación 18-5, ACI)}$$

Sin embargo, f_{ps} no debe exceder a f_{py} ni a f_{se} + 30 000.

Igual que en los miembros de concreto reforzado, la cantidad de acero en las secciones presforzadas se limita para garantizar fallas a tensión. Esta limitación rara vez presenta problemas, excepto en miembros con cantidades muy pequeñas de presfuerzo o en miembros que no sólo tienen torones de presfuerzo, sino también algunas varillas de refuerzo ordinario.

El ejemplo 19.3 ilustra los cálculos necesarios para determinar la capacidad última permisible de una viga rectangular presforzada. Al final del ejemplo se hacen algunos importantes comentarios generales sobre la solución y sobre los cálculos relativos al momento último.

EJEMPLO 19.3

Determinar la capacidad permisible por momento último de la viga presforzada adherida de la figura 19.9 si $f_{py} =$ 240 000 lb/plg^2, f_{pu} es 275 000 lb/plg^2 y f'_c es 5 000 lb/plg^2.

SOLUCIÓN **Valor aproximado de f_{ps} según el código ACI**

$$\rho_p = \frac{A_{ps}}{bd_p} = \frac{1.40}{(12)(21.5)} = 0.00543$$

$$\frac{f_{py}}{f_{pu}} = \frac{240\ 000}{275\ 000} = 0.873$$

$\therefore \gamma_p = 0.40$, como se indicó antes en esta sección inmediatamente después de la presentación de la ecuación 18-3 del ACI.

Se tiene que f_{ps} = esfuerzo estimado en el refuerzo presforzado bajo resistencia nominal. Observe que $\beta_1 =$ 0.80 para concreto de 5 000 lb/plg^2, y d, la distancia de la fibra extrema a compresión de la viga al centroide de cualquier refuerzo de tensión no presforzado, es igual a cero, ya que no hay tal refuerzo en esta viga.

$$f_{ps} = f_{pu}\left\{1 - \frac{\lambda_p}{\beta_1}\left[\rho_p \frac{f_{pu}}{f'_c} + \frac{d}{d_p}(\omega - \omega')\right]\right\} \qquad \text{(Ecuación 18-3, ACI)}$$

$$= 275\left\{1 - \frac{0.40}{0.80}\left[0.00543\left(\frac{275}{5}\right) + 0\right]\right\} = 233.9 \text{ klb/plg}^2$$

Capacidad por momento

$$a = \frac{A_{ps}f_{ps}}{0.85f'_c b} = \frac{(1.40)(233.9)}{(0.85)(5)(12)} = \underline{\underline{6.42''}}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{6.42}{0.80} = 8.03''$$

$$\epsilon_t = \frac{d_p - c}{c}0.003 = \frac{21.5 - 8.03}{8.03}(0.003)$$
$$= 0.0050$$

$\therefore$ El miembro está controlado a tensión y $\phi = 0.9$

$$\phi M_n = \phi A_{ps} f_{ps}\left(d - \frac{a}{2}\right) = (0.9)(1.40)(233.9)\left(21.5 - \frac{6.42}{2}\right)$$
$$= 5\ 390 \text{ plg-klb} = \underline{\underline{449.2 \text{ pie-klb}}}$$

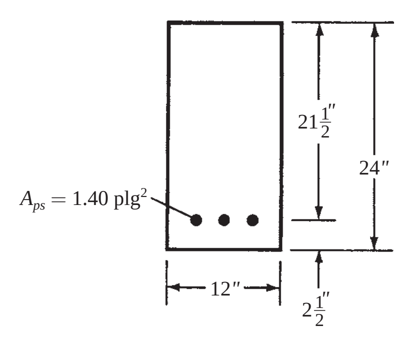


Figura 19.9

Análisis

El valor aproximado de f_{ps} obtenido con la fórmula ACI es muy adecuado para todo fin práctico. De hecho, puede obtenerse un valor ligeramente más exacto de f_{ps} y de la capacidad por momento de la sección, calculando la deformación unitaria en los tendones de presfuerzo, debida al presfuerzo, y sumándola a la deformación unitaria debida al momento último. Esta última deformación unitaria se puede determinar en función de los valores de a y del diagrama de deformación unitaria, como se hizo en los primeros capítulos para verificar si las fallas de tensión rigen en las vigas de concreto reforzado. Con la deformación unitaria total puede obtenerse un esfuerzo más exacto en el cable, haciendo referencia a la curva de esfuerzo-deformación unitaria del acero de presfuerzo utilizado. Tal curva se muestra en la figura 19.10.

El análisis descrito aquí es satisfactorio para vigas pretensadas o para vigas postensadas adheridas, pero no es tan bueno para miembros postensados sin adherencia. En estos miembros, el acero puede deslizarse con respecto al concreto, en consecuencia, el esfuerzo en el acero es casi constante a lo largo del miembro. Los cálculos de M_u para tales miembros son menos exactos que para los miembros adheridos. A menos que se agreguen algunas varillas de refuerzo ordinario a tales elementos, pueden formarse grandes grietas que no son nada útiles y que pueden conducir a la corrosión de los tendones de presfuerzo.

Si una viga presforzada está bien diseñada con cargas de servicio y luego se revisa por métodos de resistencia y se encuentra que no tiene suficiente capacidad para resistir las cargas factorizadas ($M_u = 1.2M_D + 1.6M_L$), puede agregársele un esfuerzo no presforzado para aumentar el factor de seguridad. El incremento en T debido a estas varillas se supone igual a $A_s f_y$ (código 18.7.3). El código (18.8.2) establece además, que la cantidad total de refuerzo presforzado y no presforzado debe ser suficiente para desarrollar un momento último, igual a por lo menos 1.2 veces el momento de agrietamiento de la sección. Este momento de agrietamiento se calcula con el módulo de ruptura del concreto, excepto para miembros a flexión con esfuerzos cortantes y de flexión, iguales cuando menos al doble de los requeridos para soportar las cargas factorizadas y para losas postensadas sin adherencia en dos direcciones. Este acero adicional sirve también para reducir las grietas. (El requisito 1.2 puede se pasado por alto en losas postensadas en dos direcciones no adheridas y en miembros a flexión con resistencia a cortante y flexión por lo menor igual al doble de la requerida por la sección 9.2 del ACI.)

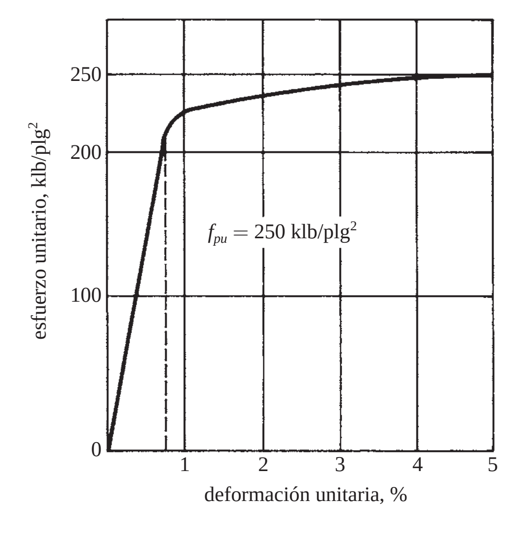


Figura 19.10 Curva típica esfuerzo-deformación unitaria para alambre de acero de alta resistencia.

19.9 DEFLEXIONES

Las deflexiones de las vigas de concreto presforzado deben calcularse muy cuidadosamente. Algunos miembros que son completamente satisfactorios en todo lo demás, no lo son en lo que atañe a la magnitud de sus deflexiones.

En los capítulos anteriores, un método que se usó para limitar las deflexiones consistía en especificar los peraltes mínimos para varios tipos de miembros (como en la tabla 4.1 de este texto). Sin embargo, estos peraltes mínimos son aplicables sólo a secciones no presforzadas. Los cálculos de deflexiones en la práctica se hacen como para miembros con otros materiales, como acero estructural, concreto reforzado, etc. Sin embargo, se tiene el mismo problema que existe con los miembros de concreto reforzado, es decir, la dificultad de determinar el módulo de elasticidad que debe usarse en los cálculos. El módulo varía con la edad, con los diferentes niveles de presfuerzo y con otros factores. Comúnmente, se usa el momento de inercia total para el cálculo inmediato de deflexiones para miembros cuyos esfuerzos calculados para la fibra extrema para las cargas de servicio en la zona de tensión precomprimida son $\leq 7.5\sqrt{f'_c}$ (ACI 18.3.3). Pueden usarse valores transformados de I para otras situaciones como se describe en las secciones 18.3.3, 18.3.4 y 18.3.5 del ACI.

La deflexión debida a la fuerza en un conjunto de tendones rectos es la que primero se considera en esta sección, con referencia a la figura 19.11(*a*). Las fuerzas de presfuerzo causan un momento negativo igual a Pe y por ello una deflexión hacia arriba o una combadura de la viga. Esta deflexión en el ℄ puede calcularse tomando momentos en el punto considerado, cuando la viga conjugada se carga según el diagrama M/EI. En el ℄ la deflexión es

$$-\left(\frac{Pe\ell}{2EI}\right)\left(\frac{\ell}{2}-\frac{\ell}{4}\right) = -\frac{Pe\ell^2}{8EI}\uparrow$$

Si los cables no son rectos, la deflexión será diferente, debido a los diferentes diagramas de momentos negativos producidos por la fuerza en los cables. Si los cables se doblan o curvan hacia abajo, como se muestra en las partes (*b*) y (*c*) de la figura 19.11, puede aplicarse de nuevo la viga conjugada para calcular las deflexiones. Los valores resultantes se muestran en la figura.



Construcción de un puente. (PhotoDisc, Inc./Getty Images.)

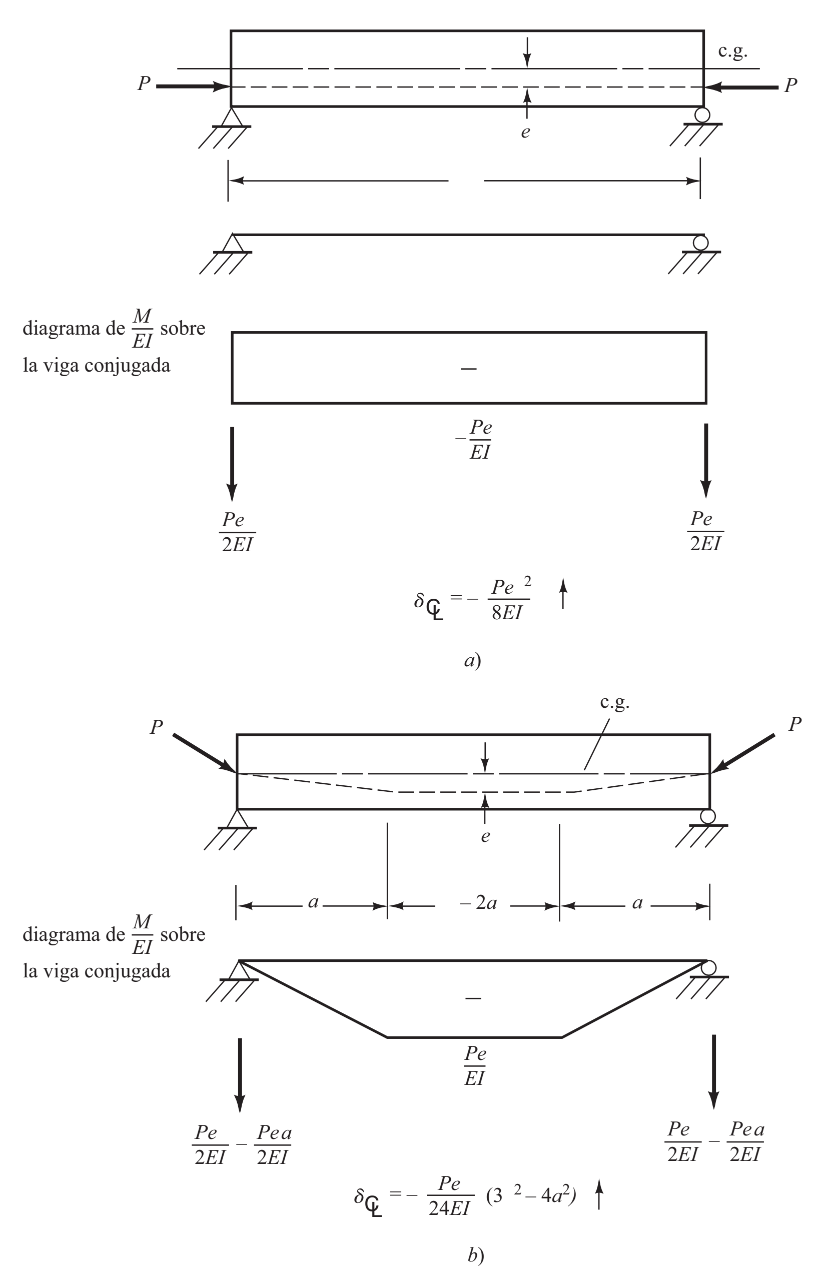


Figura 19.11 Deflexiones en vigas presforzadas. (*Continúa.*)

Las deflexiones debidas a los esfuerzos en los tendones cambian con el tiempo. Antes que nada, las pérdidas de esfuerzo en los tendones presforzados reducen los momentos negativos que producen, y por ende las deflexiones hacia arriba. Por otra parte, los esfuerzos de compresión a largo plazo en el fondo de la viga, debidos a los momentos negativos del presfuerzo, causan fluencia plástica y por tanto un incremento en las deflexiones hacia arriba.

Además de las deflexiones causadas por los esfuerzos en los tendones, existen deflexiones debidas al peso propio de la viga y debidas a las cargas muertas y vivas adicionales que se aplican subsecuente-

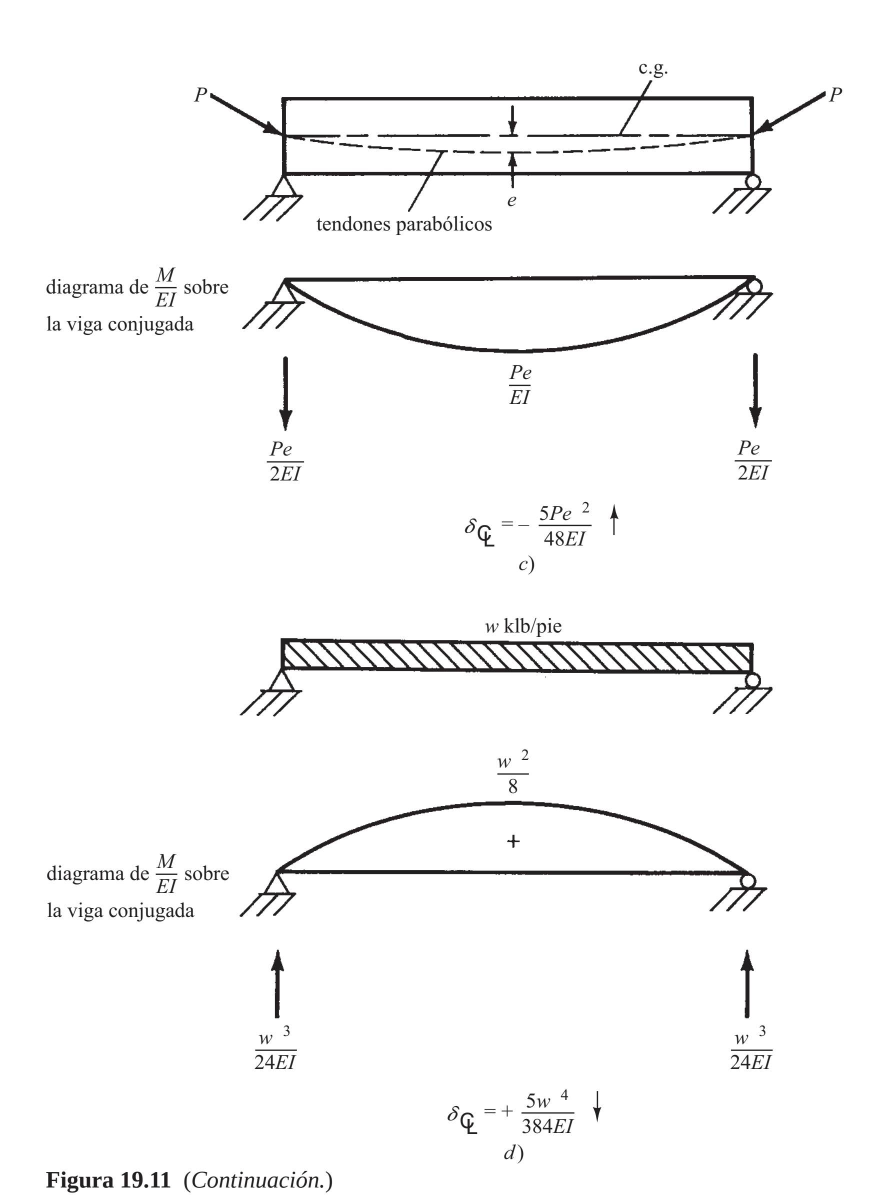


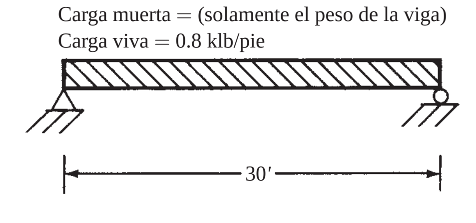
Figura 19.11 (*Continuación.*)

mente a la viga. Estas deflexiones se pueden calcular y superponerse a las causadas por los tendones. La figura 19.11(*d*) muestra la deflexión en el centro del claro de una viga simple con carga uniforme, obtenida al tomar momentos en el centro del claro cuando la viga conjugada está cargada según el diagrama de momentos M/EI.

El ejemplo 19.4 muestra los cálculos de las deflexiones inicial y a largo plazo en una viga rectangular pretensada.

EJEMPLO 19.4

La viga rectangular pretensada mostrada en la figura 19.12 tiene cables rectos con esfuerzos iniciales de 175 klb/plg^2 y esfuerzos finales después de las pérdidas de 140 klb/plg^2. Determinar la deflexión de la viga en el ℄, inmediatamente después de que se cortan los cables. Se tiene que $E = 4 \times 10^6$ lb/plg^2. Suponga concreto no agrietado.



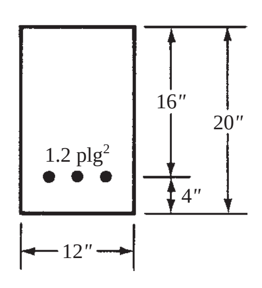


Figura 19.12

SOLUCIÓN

$$I_g = \left(\frac{1}{12}\right)(12)(20)^3 = 8\,000 \text{ plg}^4$$

$$e = 6''$$

$$\text{Peso de la viga} = \frac{(12)(20)}{144}(150) = 250 \text{ lb/pie}$$

Deflexión inmediatamente después de que se cortan los cables

$$\delta \text{ debida al cable} = -\frac{Pe\ell^2}{8EI} = -\frac{(1.2 \times 175\,000)(6)(12 \times 30)^2}{(8)(4 \times 10^6)(8\,000)} = -0.638''\uparrow$$

$$\delta \text{ debida al peso de la viga} = +\frac{5w\ell^4}{384EI} = \frac{(5)\left(\frac{250}{12}\right)(12 \times 30)^4}{(384)(4 \times 10^6)(8\,000)} = \underline{+0.142''\downarrow}$$

$$\text{Deflexión total} = -0.496''\uparrow$$

Comentarios adicionales sobre la deflexión

Las deflexiones a largo plazo pueden calcularse como se describió en el capítulo 6. Sin considerar las cargas externas, puede verse en el ejemplo anterior que la viga tiene una combadura inicial de 0.496 plg; con el paso del tiempo, tal combadura se incrementa debido al flujo plástico del concreto. Esa combadura es a veces de utilidad para contrarrestar las deflexiones causadas por las cargas superpuestas. Sin embargo, en algunos miembros la combadura puede ser muy grande, particularmente en grandes claros y también donde se usan agregados de peso ligero. Si dicho encorvamiento es muy grande, los resultados pueden ser muy perjudiciales para la estructura (torcimiento de los pisos, daños en los trechos, agrietamiento y torcimiento de los muros, etcétera).

Para ilustrar un problema que pudiera presentarse, supongamos que el techo de una escuela se construye colocando T dobles de 50 pies y de agregado ligero, lado a lado sobre un salón de clase. Las combaduras resultantes pueden ser muy grandes y, lo que es peor, pueden no ser iguales en secciones diferentes. Resulta entonces necesario forzar las diferentes secciones a que tengan las mismas deflexiones y unirlas de alguna manera para tener una superficie lisa en el techo. Una vez que la superficie está pareja, los miembros pueden conectarse soldando entre ellos inserciones metálicas, tales como ángulos colados en los bordes de las diferentes secciones con este fin.

Los miembros de concreto reforzado, así como los miembros presforzados con extremos en voladizo, tienen a menudo grandes deflexiones. Las deflexiones totales en los extremos libres de estos miembros

se deben a la suma de las deflexiones normales más el efecto de las rotaciones de los apoyos. Este último efecto con frecuencia puede ser el mayor de los dos y, en consecuencia, la suma de las dos deflexiones puede ser tan grande que afecte desventajosamente la apariencia de la estructura. Por esta razón, muchos proyectistas evitan los miembros en voladizo en la construcción presforzada.

19.10 FUERZA CORTANTE EN SECCIONES PRESFORZADAS

El refuerzo del alma de las secciones presforzadas se trata de manera similar a la de las vigas convencionales de concreto reforzado. En las expresiones que siguen, b_w es el ancho del alma o el diámetro de una sección circular, y d_p es la distancia de la fibra extrema en compresión al centroide del refuerzo de tensión. Si la reacción introduce compresión en la región extrema de un miembro presforzado, las secciones de la viga situadas a distancias menores que $h/2$ de la cara del apoyo pueden diseñarse para la fuerza cortante calculada en $h/2$, donde h es el espesor total del miembro.

$$v_u = \frac{V_u}{\phi b_w d_p}$$

El código (11.3) proporciona dos métodos para estimar la resistencia a cortante que el concreto de una sección presforzada puede resistir. Existe un método aproximado que sólo puede usarse cuando la fuerza efectiva del presfuerzo es igual por lo menos 40% de la resistencia a tensión del refuerzo por flexión f_{pu}, además de otro método más detallado que puede usarse independientemente de la magnitud de la fuerza efectiva de presfuerzo. Estos métodos se analizan en los siguientes párrafos.

Método aproximado

Con este procedimiento, la capacidad nominal por cortante de una sección presforzada puede tomarse como

$$V_c = \left(0.6\lambda\sqrt{f'_c} + \frac{700 V_u d_p}{M_u}\right) b_w d \qquad \text{(Ecuación 11-9, ACI)}$$

El código (11.3.2) establece que independientemente del valor dado por esta ecuación, V_c no tiene que tomarse tan bajo como $2\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$, ni tan grande como $5\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$. En esta expresión, V_u es la fuerza cortante máxima de diseño en la sección bajo consideración, M_u es el momento de diseño en la misma sección que ocurre simultáneamente con V_u, y d es la distancia de la fibra extrema de compresión al centroide de los tendones presforzados. El valor de $V_u d_p/M_u$ se limita a un valor máximo de 1.0.

Análisis más detallado

Si se desea un análisis más detallado (el cual se tendrá que usar si la fuerza de presfuerzo efectivo es menor que 40% de la resistencia a tensión del refuerzo por flexión), la fuerza cortante nominal tomada por el concreto se considera igual al menor de los valores V_{ci} o V_{cw} que se definen a continuación. El término V_{ci} representa la resistencia nominal al cortante del concreto cuando el agrietamiento diagonal es debido a la combinación de cortante y momento. El término V_{cw} representa la resistencia nominal al cortante proporcionada por el concreto cuando el agrietamiento diagonal es debido al esfuerzo excesivo principal de tensión en el concreto. En las dos expresiones que siguen, d es la distancia de la fibra extrema a compresión al centroide de los tendones de presfuerzo, o bien igual a $0.8h$, rigiendo el valor mayor (código 11.3.32).

La capacidad V_{ci} de cortante estimada puede calcularse con la siguiente expresión que da el código ACI (11.3.3.1):

$$V_{ci} = 0.6\lambda\sqrt{f'_c}b_w d_p + V_d + \frac{V_i M_{cr}}{M_{\text{máx}}} \quad \text{pero no tiene que tomarse menor que } 1.7\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$$

(Ecuación 11-10, ACI)

En esta expresión, V_d es la fuerza cortante en la sección considerada debido a la carga muerta de servicio, $M_{\text{máx}}$ es le momento flexionante máximo factorizado en la sección debido a las cargas de diseño aplicadas externamente, V_i es la fuerza cortante que ocurre simultáneamente con $M_{\text{máx}}$, y M_{cr} es el momento de agrietamiento que se debe determinar como sigue:

$$M_{cr} = \left(\frac{I}{y_t}\right)(6\lambda\sqrt{f'_c} + f_{pe} - f_d)$$

(Ecuación 11-11, ACI)

donde

I = momento de inercia de la sección que resiste las cargas aplicadas externamente

y_t = distancia del eje centroidal de la sección total (despreciando el refuerzo) a la fibra extrema en tensión

f_{pe} = esfuerzo de compresión en el concreto debido al presfuerzo después de ocurridas las pérdidas, en la fibra extrema de la sección donde las cargas aplicadas causan tensión

f_d = esfuerzo debido a la carga muerta no factorizada, en la fibra extrema donde las cargas aplicadas causan tensión

Según una teoría algo simplificada de la tensión principal, la capacidad a cortante de una viga es igual al valor dado por la siguiente expresión, pero no tiene que ser menor que $1.7\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$.

$$V_{cw} = (3.5\lambda\sqrt{f'_c} + 0.3f_{pc})b_w d_p + V_p$$

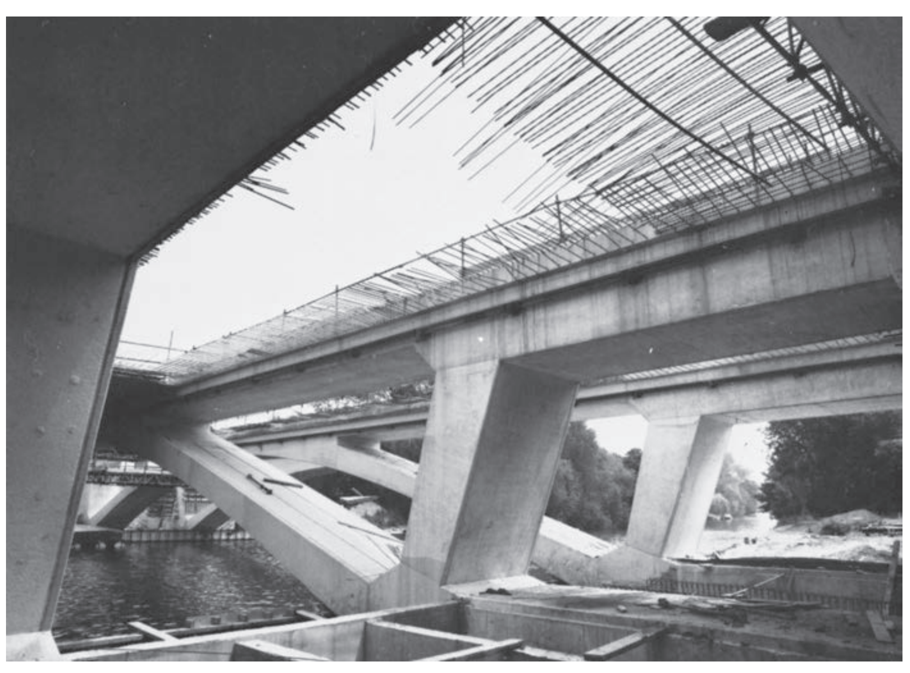
(Ecuación 11-12, ACI)

En esta expresión, f_{pc} es el esfuerzo de compresión calculado (en libras por pulgada cuadrada) del concreto en el centroide de la sección que resiste las cargas aplicadas que causa el presfuerzo efectivo después de ocurridas todas las pérdidas. (Si el centroide está situado en el patín, f_{pc} debe calcularse en la unión del alma con el patín.) V_p es la componente vertical del presfuerzo efectivo en la sección considerada. Alternativamente, el código (11.3.3.2) establece que V_{cw} puede tomarse como la fuerza cortante que corresponde a un múltiplo de la carga muerta más la carga viva, el cual conduce a un esfuerzo principal de tensión calculado, igual a $4\lambda\sqrt{f'_c}$ en el centroide del miembro o en la unión del patín con el alma si el centroide se sitúa en ésta.

Es pertinente aquí un comentario adicional sobre el cálculo de f_{pc} en miembros pretensados, puesto que es afectado por la longitud de transferencia. El código (11.3.4) establece que la longitud de transferencia puede tomarse igual a 50 diámetros en tendones de torones, e igual a 100 diámetros en tendones de alambre. Puede suponerse que la fuerza de presfuerzo varía linealmente de 0 en el extremo del tendón, a un máximo en la distancia de transferencia indicada anteriormente. Si el valor de $h/2$ es menor que la longitud de transferencia, es necesario considerar el presfuerzo reducido al calcular V_{cw} (ACI 11.3.4).

19.11 DISEÑO DEL REFUERZO POR CORTANTE

Si el valor calculado de V_u excede el valor ϕV_c, el área de los estribos verticales (el código no permite estribos inclinados o varillas dobladas en miembros presforzados) no debe ser menor que A_v determinada con la siguiente expresión del código (11.4.7.2):



Puente Runnymede de concreto presforzado sobre el Río Támesis, cerca de Egham, Surey, Inglaterra. (Cortesía de Cement and Concrete Association.)

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \qquad \text{(Ecuación 11-15, ACI)}$$

Igual que en el diseño convencional de concreto reforzado, se requiere un área mínima de refuerzo por cortante en todos los puntos en que V_u es mayor que $\frac{1}{2}\phi V_c$. Esta área mínima se determina con la expresión que sigue si el presfuerzo efectivo es menor que 40% de la resistencia a tensión del refuerzo por flexión (código ACI, 11.4.6.4):

$$A_{v\text{ mín}} = 0.75\sqrt{f'_c}\,\frac{b_w s}{f_{yt}} \text{ pero no debe ser menor que } \frac{50 b_w s}{f_{yt}} \qquad \text{(Ecuación 11-13, ACI)}$$

donde b_w y s están en pulgadas.

Si el presfuerzo efectivo es igual a, o mayor que 40% de la resistencia a tensión del refuerzo por flexión, la siguiente expresión, en la que A_{ps} es el área del refuerzo presforzado en la zona de tensión, deberá usarse para calcular A_v:

$$A_{v,m} = \left(\frac{A_{ps}}{80}\right)\left(\frac{f_{pu}}{f_{yt}}\right)\left(\frac{s}{d}\right)\sqrt{\left(\frac{d}{b_w}\right)} \qquad \text{(Ecuación 11-14, ACI)}$$

La sección 11.4.5.1 del código ACI, establece que en ningún caso la separación máxima podrá exceder de 0.75*h* o 24 plg. Los ejemplos 19.5 y 19.6 ilustran los cálculos necesarios para determinar la resistencia al cortante y para seleccionar los estribos de una viga presforzada.

EJEMPLO 19.5

Calcular la resistencia por cortante de la sección mostrada en la figura 19.13 a 4 pies de los apoyos, usando tanto el método aproximado como el método más detallado permitido por el código ACI. Suponga que el área del acero de presfuerzo es de 1.0 plg^2, que la fuerza efectiva de presfuerzo es de 250 klb, y que $f'_c = 4\ 000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN **Método aproximado**

$$w_u = (1.2)(1.2) + (1.6)(2.1) = 4.8 \text{ klb/pie}$$

$$V_u = (10)(4.8) - (4)(4.8) = 28.8 \text{ klb}$$

$$M_u = (10)(4.8)(4) - (4)(4.8)(2) = 153.6 \text{ pie-klb}$$

$$\frac{V_u d}{M_u} = \frac{(28.8)(24-3-3)}{(12)(153.6)} = 0.281 < 1.0 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$V_c = \left(0.6\lambda\sqrt{f'_c}\right)\ 700\frac{V_u d_p}{M_u}\Big) b_w d \qquad \text{(Ecuación 11-9, ACI)}$$

$$= [(0.6)(1.0)(\sqrt{4\ 000}) + (700)(0.281)](12)(18) = 50\ 684 \text{ lb}$$

$$V_c \text{ mínimo} = (2)(1.0)(\sqrt{4\ 000})(12)(18) = 27\ 322 \text{ lb} < 50\ 684 \text{ lb}$$

$$V_c \text{ máximo} = (5)(1.0)(\sqrt{4\ 000})(12)(18) = 68\ 305 \text{ lb} > 50\ 684 \text{ lb}$$

$$V_c = 50\ 684 \text{ lb}$$

Método más detallado

$$I = \left(\frac{1}{12}\right)(12)(24)^3 = 13\ 824 \text{ plg}^4$$

$$y_t = 12''$$

f_{pe} = esfuerzo de compresión en el concreto debido al presfuerzo después de todas las pérdidas

$$= \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I}$$

$$f_{pe} = \frac{250\ 000}{(12)(24)} + \frac{(250\ 000)(6)(12)}{13\ 824} = 2\ 170 \text{ lb/plg}^2$$

M_d = momento por carga muerta en el punto a $4' = (10)(1.2)(4) - (4)(1.2)(2)$

$$= 38.4 \text{ pie-klb}$$

f_d = esfuerzo debido al momento por carga muerta $= \dfrac{(12)(38\ 400)(12)}{13\ 824}$

$$= 400 \text{ lb/plg}^2$$

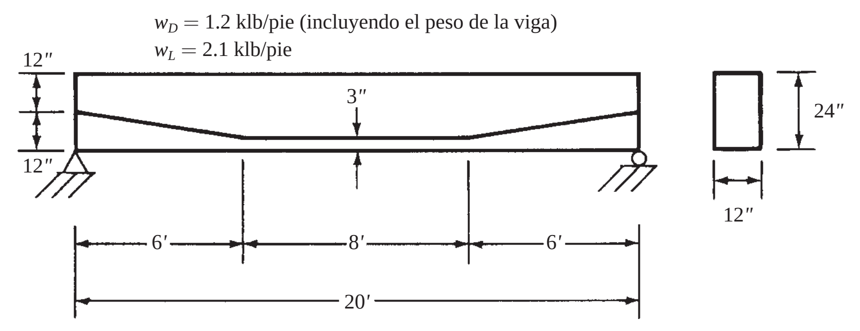


Figura 19.13

$$M_{cr} = \text{momento de agrietamiento} = \left(\frac{I}{y_t}\right)(6\lambda\sqrt{f_c'} + f_{pe} - f_d) \qquad \text{(Ecuación 11-11, ACI)}$$

$$= \left(\frac{13\,824}{12}\right)(6)(1.0)(\sqrt{4\,000} + 2\,170 - 400) = 2\,476\,193 \text{ plg-lb}$$

$$= 206\,349 \text{ pie-lb}$$

$$\text{Peso de la viga} = \frac{(12)(24)}{144}(150) = 300 \text{ lb/pie}$$

$$w_u \text{ sin contar el peso de la viga} = (1.2)(1.2 - 0.3) + (1.6)(2.1) = 4.44 \text{ klb/pie}$$

$$M_{\text{máx}} = (10)(4.44)(4) - (4)(4.44)(2) = 142.08 \text{ pie-klb} = 142\,080 \text{ pie-lb}$$

$$V_i \text{ debida a } w_u \text{ simultánea con } M_{\text{máx}} = (10)(4.44) - (4)(4.44)$$

$$= 26.64 \text{ klb} = 26\,640 \text{ lb}$$

$$V_d = \text{fuerza cortante por carga muerta} = (10)(1.2) - (4)(1.2) = 7.2 \text{ klb} = 7\,200 \text{ lb}$$

$$d = 24 - 3 - 3 = 18'' \text{ o } (0.8)(24) = \underline{\underline{19.2''}}$$

$$V_{ci} = 0.6\lambda\sqrt{f_c'}b_w d_p + V_d + \frac{V_i M_{cr}}{M_{\text{máx}}} \qquad \text{(Ecuación 11-10, ACI)}$$

$$= (0.6)(1.0)(\sqrt{4\,000})(12)(19.2) + 7\,200 + \frac{(26\,640)(206\,349)}{142\,080} = 54\,634 \text{ lb}$$

$$\text{pero no necesita ser menor que } (1.7)(1.0)(\sqrt{4\,000})(12)(19.2) = 24\,772 \text{ lb}$$

Cálculo de V_{cw}

$$f_{pc} = \text{esfuerzo de compresión calculado en lb/plg}^2 \text{ en el centroide del concreto debido al presfuerzo efectivo}$$

$$= \frac{250\,000}{(12)(24)} = 868 \text{ lb/plg}^2$$

$$V_p = \text{componente vertical del presfuerzo efectivo en la sección} = \frac{9}{\sqrt{9^2 + 72^2}}(250\,000)$$

$$= \left(\frac{9}{72.56}\right)(250\,000) = 31\,009 \text{ lb}$$

$$V_{cw} = (3.5\lambda\sqrt{f_c'} + 0.3f_{pc})b_w d + V_p \qquad \text{(Ecuación 11-12, ACI)}$$

$$= (3.5)(1.0)(\sqrt{4\,000} + 0.3 \times 868)(12)(19.2) + 31\,009 = 142\,006 \text{ lb}$$

Uso del menor valor de V_{ci} o V_{cw}

$$V_c = 54\,634 \text{ lb}$$

EJEMPLO 19.6

Determinar la separación requerida entre estribos ⊔ #3 para la viga del ejemplo 19.5 a 4 pies del apoyo extremo si f_{pu} es 250 klb/plg^2 para el acero de presfuerzo y f_y para los estribos es 40 klb/plg^2. Usar el valor de V_c obtenido por el método aproximado, 54 634 lb.

SOLUCIÓN

$$w_u = (1.2)(1.2) + (1.6)(2.1) = 4.8 \text{ klb/pie}$$

$$V_u = (10)(4.8) - (4)(4.8) = 28.8 \text{ klb}$$

$$\phi V_c = (0.75)(54\ 634) = 40\ 976 \text{ lb}$$

$$> V_u = 28\ 800 \text{ lb}$$

$$V_u > \frac{\phi V_c}{2} = 20\ 488 \text{ lb} < \phi V_c$$

Se requiere una cantidad mínima de refuerzo.

Como el presfuerzo efectivo es mayor que 40% de la resistencia a tensión del refuerzo.

$$A_v = \left(\frac{A_{ps}}{80}\right)\left(\frac{f_{pu}}{f_{yt}}\right)\left(\frac{s}{d}\right)\sqrt{\left(\frac{d}{b_w}\right)} \qquad \text{(Ecuación 11-14, ACI)}$$

$$(2)(0.11) = \left(\frac{1.0}{80}\right)\left(\frac{250\ 000}{40\ 000}\right)\left(\frac{s}{18}\right)\sqrt{\frac{18}{12}}$$

$$s = 41.38'', \text{ pero } s \text{ máxima} = \left(\frac{3}{4}\right)(24) = 18''$$

Usar 18″

19.12 TEMAS ADICIONALES

En este capítulo se ha presentado un breve análisis del concreto presforzado. Hay un buen número de temas importantes que se han omitido en dicho capítulo introductorio. Varios de ellos se mencionarán brevemente en los siguientes párrafos.

Esfuerzos en los bloques extremos

La parte de un miembro presforzado alrededor de los anclajes en los extremos de los tendones de acero se llama *bloque de extremo*. En esta región, las fuerzas de presfuerzo se transfieren de áreas muy concentradas a la sección transversal total de la viga. Se ha encontrado que la longitud de transferencia para miembros postensados es menor que el peralte de la viga y probablemente es en realidad mucho menor.

En los miembros postensados se da una compresión directa de apoyo en el anclaje extremo; por ello comúnmente se usan bloques sólidos en los extremos para repartir las fuerzas concentradas de presfuerzo. Para evitar el estallido del bloque, se coloca una malla de alambre o un emparrillado de varillas de refuerzo verticales y horizontales cerca de la cara extrema de la viga. Además, en todo el bloque se colocan varillas de refuerzo horizontales y verticales.

En los miembros pretensados, donde el presfuerzo se transfiere al concreto por adherencia en una distancia aproximadamente igual al peralte de la viga, probablemente no es necesario un bloque sólido en el extremo, pero sí lo es un conjunto de estribos apropiadamente separados. Existe una gran cantidad

de información sobre el tema de los esfuerzos en los bloques de extremo en miembros pretensados y postensados.[4]

Construcción compuesta

Las secciones presforzadas precoladas suelen usarse en edificios y puentes en combinación con concreto colado en el lugar. Si tales miembros se diseñan apropiadamente por transmisión de cortante, de manera tal que las dos partes trabajen como una unidad, se les denomina *secciones compuestas*. Con anterioridad se mostraron ejemplos de tales miembros en la partes (*e*) y (*f*) de la figura 19.8. En la construcción compuesta, las partes que son difíciles de formar y que contienen la mayor parte del refuerzo son precoladas, mientras que las losas y tal vez la parte superior de las vigas, que son relativamente sencillas de formar, se cuelan en el lugar.

Las secciones precoladas se diseñan normalmente para soportar sus pesos propios, más el concreto fresco de las losas coladas en el lugar y cualquier otra carga aplicada durante la construcción. Las cargas muertas y vivas aplicadas después de que la losa fragua, son soportadas por la sección compuesta. La combinación de la dos partes, da una sección compuesta que tiene un gran momento de inercia y por ello un gran momento resistente. Usualmente, es bastante económico usar *a*) una viga presforzada precolada hecha con un concreto de alta resistencia y *b*) una losa hecha con un concreto de grado ordinario. Si se sigue esta práctica, es necesario tomar en cuenta los diferentes módulos de elasticidad de los dos materiales al calcular las propiedades de la sección compuesta (se convierte así en un problema de área transformada).

Miembros continuos

Las secciones presforzadas continuas pueden colarse totalmente en el lugar con sus tendones tendidos en forma continua de un extremo a otro. Debe quedar claro que en tales miembros, cuando las cargas de servicio tienden a generar momentos positivos, los tendones deben generar momentos negativos y viceversa. Esto implica que los tendones deben quedar bajo el centro de gravedad del miembro en las regiones que normalmente son de momento positivo, y arriba del centro de gravedad en las regiones que normalmente son de momento negativo. Para producir las distribuciones deseadas de esfuerzos, es posible usar tendones curvos y miembros de sección transversal constante o tendones rectos con miembros de sección transversal variable. En la figura 19.14 se muestran varias vigas continuas de estos tipos.

Otro tipo de sección continua en Estados Unidos, que se ha usado con mucho éxito, particularmente en la construcción de puentes, consta de miembros presforzados precolados que se hacen continuos mediante concreto colado en el lugar y acero de refuerzo ordinario. La figura 19.14(*d*) muestra un caso así. En este tipo de construcción, la sección precolada resiste una porción de la carga muerta, mientras que la carga viva y la carga muerta que se aplican después de que fragua el concreto colado en el lugar, son resistidas por el miembro continuo.

Presfuerzo parcial

Durante los primeros tiempos del concreto presforzado, el objetivo del proyectista consistía en proporcionar los miembros de manera que nunca estuvieran sometidos a tensión bajo cargas de servicio. Se dice que tales miembros están *totalmente presforzados*. Las subsecuentes investigaciones de miembros

---

[4]Nawy, *Prestressed Concrete*, pág. 173.

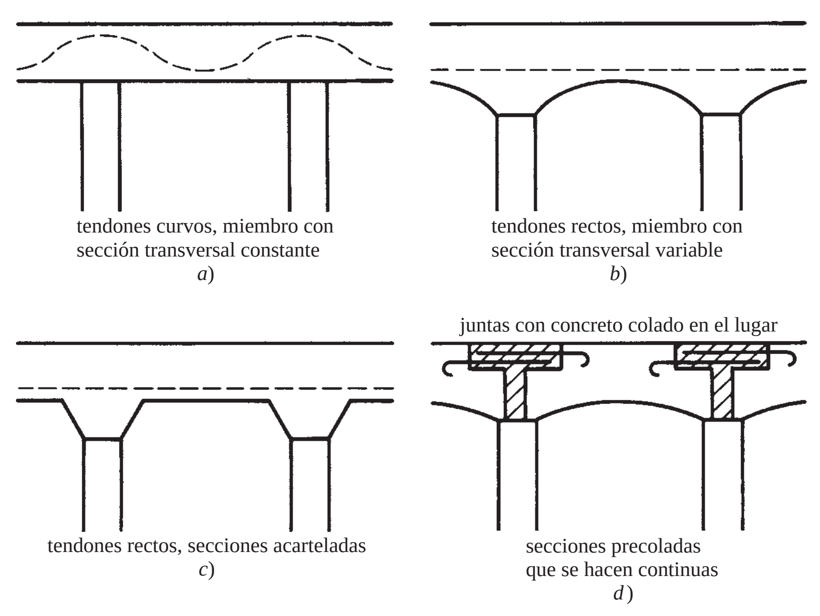


Figura 19.14 Vigas continuas.

totalmente presforzados han mostrado que con frecuencia tienen una cantidad apreciable de resistencia adicional. En consecuencia, muchos proyectistas creen ahora que pueden permitirse ciertas cantidades de esfuerzos de tensión bajo cargas de servicio. A los miembros en que se permiten algunos esfuerzos de tensión se les llama miembros *parcialmente presforzados*.

Una ventaja importante de una viga parcialmente presforzada es su menor combadura. Esto es particularmente importante cuando la carga de la viga o la carga muerta son bastante pequeñas, en comparación con la carga total de diseño.

Para proporcionar más seguridad en las vigas presforzadas parcialmente, es una práctica común añadir algo de refuerzo común. Este refuerzo incrementa la resistencia última por flexión de los miembros y ayuda a tomar los esfuerzos de tensión en las vigas.[5]

19.13 EJEMPLOS CON COMPUTADORA

EJEMPLO 19.7

Use la hoja de cálculo Excel proporcionada en el capítulo 19 para resolver el ejemplo 19.2.

SOLUCIÓN Abra la hoja de cálculo del capítulo 19 y abra la hoja de trabajo de Cálculos de esfuerzos. Ingrese los valores solamente en las celdas sombreadas en amarillo. Los resultados se muestran enseguida. Esta hoja de cálculo hace un número mucho mayor de cálculos. Los que deben compararse con el ejemplo 19.2 están encerrados en un círculo.

[5]Lin, T. Y. y Burns, N. H., 1981, *Design of Prestressed Concrete Structures*, 3a. ed. (Nueva York: John Wiley & Sons), págs. 325-344.

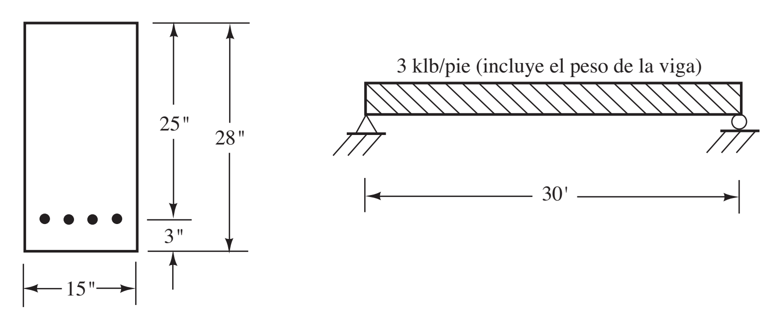
Esfuerzos en vigas de concreto presforzado $P_i =$	**294.118**	**klb**			
$R =$	**0.85**				
$e_{\text{mitad del claro}} =$	**9**	**plg**			
$e_{\text{apoyo}} =$	**9**	**plg**			
diámetro del tendón =	**0.5**	**plg**			
$S_1 =$	**1 152**	**plg**^{3}			
$S_2 =$	**1 152**	**plg**^{3}			
$A =$	**288**	**plg**^{2}			
$f'_{ci} =$	**3 500**	**lb/plg**^{2}	$f_{ti} =$	**177**	**lb/plg**^{2}
$f'_c =$	**5 000**	**lb/plg**^{2}	$f_{ts} =$	**849**	**lb/plg**^{2}
$\gamma_c =$	**145**	**lb/plg**^{3}	$\beta_1 =$	**0.8**	
$\ell =$	**20**	**pie**			
$w_D =$	**1 700**	**lb/pie lineal**			
$w_L =$	**1 000**	**lb/pie lineal**			
% de w_L **sustentado**	**50.00%**				
$e_{0.4l} =$	**9**	**pulgadas**			
$e_{50\ \text{diám.}}$	**9.00**	**pulgadas**			
$w_o =$	**300.00**	**lb/pie lineal**			
$M_0 =$	**180**	**plg-klb**			
$M_s =$	**1 500**	**plg-klb**			
$M_T =$	**1 800**	**plg-klb**			

					esfuerzo					
					a la mitad del claro	**para** $x = 0.4$	**para 50 diám.**	**en el apoyo**	**permisible**	
Cálculo del esfuerzo al liberar	$f_1 =$	$-P_i/A$	$+P_ie/S_1$	$-M_o/S_1$						
		–1 021	**2 298**	**–156.25**	**1 120**	**1 127**	**1277**	**1 277**	**177**	$= f_{ti}$ **a la mitad del claro**
									355	$= f_{ti}$ **extremos**
	$f_2 =$	$-P_i/A$	$-P_ie/S_2$	$+M_o/S_2$						
		–1 021	**–2 298**	**156**	**–3 163**	**–3 169**	**–3 319**	**–3 319**	**–2 100**	$= f_{ci}$
Cargada(M_t**)**	$f_1 =$	$-P_e/A$	$+P_ee/S_1$	$-M_T/S_1$						
		–868	**1 953**	**–1 562.5**	**–477**	**–415**	**1 085**	**1 085**	**–3 000**	$= f_{cs}$**(para** M_t**)**
Cargada(M_s**)**	$f_1 =$	$-P_e/A$	$+P_ee/S_1$	$-M_s/S_1$						
		–868	**1 953**	**–1 302.1**	**–217**	**–165**	**1 085**	**1 085**	**–2 250**	$= f_{cs}$**(para** M_s**)**
	$f_2 =$	$-P_e/A$	$-P_ee/S_2$	$+M_T/S_1$						
		–868	**–1 953**	**1 563**	**–1 259**	**–1 321**	**–2 821**	**–2 821**	**849**	

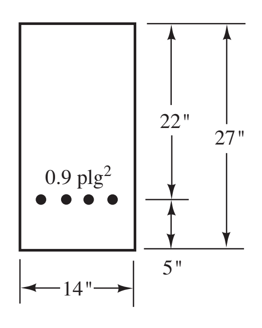
PROBLEMAS

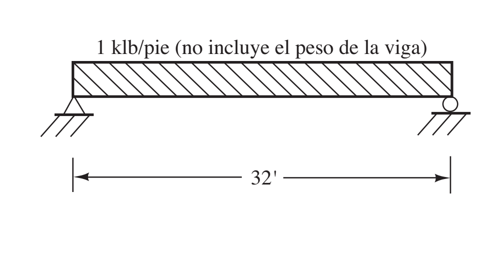
Para todos los problemas, a menos que se diga otra cosa, suponga que el concreto es de peso normal.

19.1 La viga mostrada en la ilustración acompañante tiene un presfuerzo total efectivo de 240 klb. Calcule los esfuerzos en las fibras superior e inferior de la viga en los extremos y en el ℄. Suponga que los tendones son rectos. (*Resp.:* $f_{\text{sup}} = -1.291$ klb/plg^2, $f_{\text{inf}} = +0.148$ klb/plg^2 en el ℄.)



19.2 Calcule los esfuerzos en las fibras superiores e inferiores de la viga mostrada, en sus extremos y en el centro del claro, inmediatamente después de que se corten los cables. Suponga cables rectos y pérdidas de 10%. Presfuerzo inicial de 170 klb/plg^2.



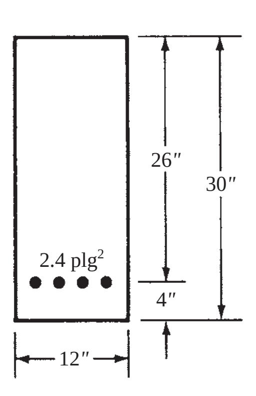


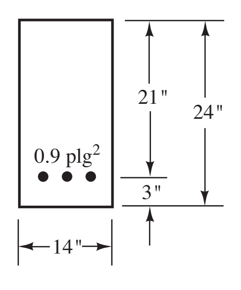
19.3 La viga mostrada en la figura tiene un claro simple de 30 pies; $f'_c = 5\,000$ lb/plg^2, $f_{pu} = 250\,000$ lb/plg^2, y el presfuerzo inicial es 160 000 lb/plg^2, $f_{py} = 0.85\, f_{pu}$, y 10% de pérdidas.

a) Calcule los esfuerzos en el concreto en la parte superior e inferior de la viga a medio claro inmediatamente después de que se corten los tendones. (*Resp.*: $f_{\text{sup.}} = +0.183$ klb/plg^2, $f_{\text{inf.}} = -1.041$ klb/plg^2.)

b) Recalcule los esfuerzos en el centro del claro después de la supuesta pérdida de presfuerzo de 20% en los tendones. (*Resp.*: $f_{\text{sup.}} = +0.076$ klb/plg^2, $f_{\text{inf.}} = -0.762$ klb/plg^2.)

c) ¿Qué carga máxima viva de servicio puede soportar esta viga además de su propio peso si los esfuerzos permisibles son de $0.6\, f'_c$ en compresión y $12\sqrt{f'_c}$ en tensión? (*Resp.*: 1.605 klb/pie.)





19.4 Con los mismos esfuerzos permisibles del problema 19.3, ¿Qué carga uniforme total puede soportar la viga mostrada en un claro simple de 50 pies, además de su propio peso? Suponga 20% de pérdida de presfuerzo.

19.5 Calcule el momento de agrietamiento y la capacidad permisible última por momento en la viga del problema 19.3 si $f'_c = 5\,000$ lb/plg^2 y $f_{py} = 200\,000$ lb/plg^2. (*Resp.*: $M_{cr} = 144.74$ pie-klb, $\phi M_n = 300$ pie-klb.)

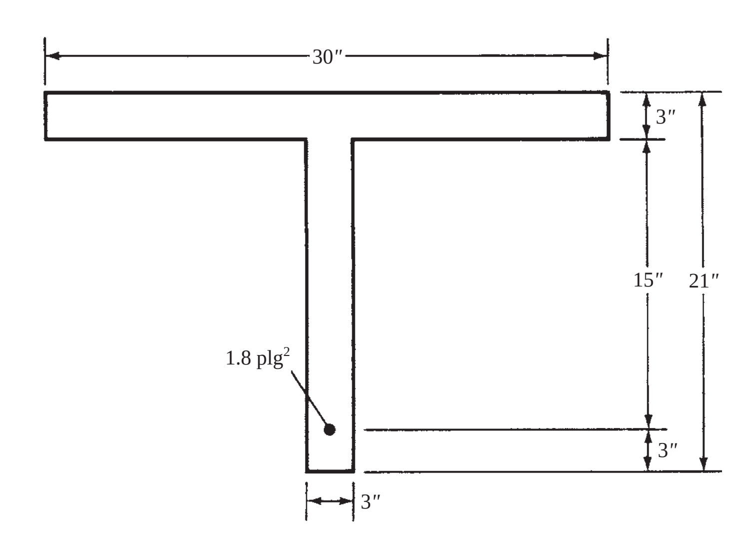
19.6 Calcule los esfuerzos en las fibras superiores e inferiores en el ℄ de la viga del problema 19.1, si al transportarla es levantada por el centro del claro. Suponga 100% de impacto. El concreto pesa 150 lb/pie^3.

19.7 Determine los esfuerzos en los tercios de la viga del problema 19.6 si durante el transporte es levantada por esos puntos. (*Resp.*: $f_{\text{sup.}} = +1.009$ klb/plg^2, $f_{\text{inf.}} = -2.151$ klb/plg^2.)

19.8 Calcule la capacidad por momento de diseño de una viga pretensada de 12 plg × 20 plg presforzada con tendones de acero de 1.2 plg^2 esforzados a un esfuerzo inicial de 160 klb/plg^2. El centro de gravedad de los tendones está 3 plg arriba del fondo de la viga; $f'_c = 5\,000$ lb/plg^2, $f_{py} = 200\,000$ lb/plg^2 y $f_{pu} = 250\,000$ lb/plg^2.

19.9 Calcule la capacidad por momento de diseño de la viga pretensada del problema 19.2 si $f'_c = 5\,000$ lb/plg^2, $f_{py} = 200\,000$ lb/plg^2, y $f_{pu} = 225$ klb/plg^2. Suponga $\frac{f_{py}}{f_{pu}} > 0.85$. (*Resp.*: 293.1 pie-klb.)

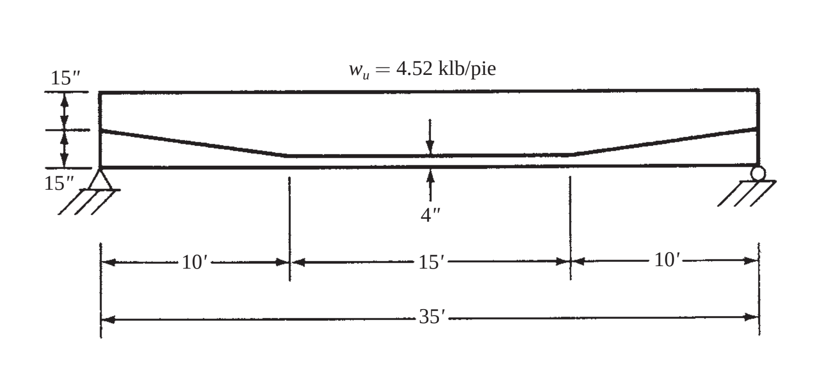
19.10 Calcule la capacidad por momento de diseño de la viga T adherida, mostrada en la ilustración acompañante si $f'_c = 5\,000$ lb/plg², $f_{pu} = 250\,000$ lb/plg², y el esfuerzo inicial en los cables es 160 000 lb/plg². También $f_{py} = 200\,000$ lb/plg².

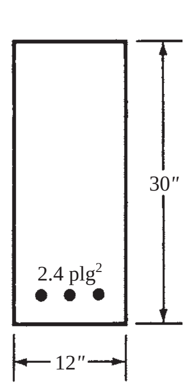


19.11 Calcule la deflexión en el ℄ de la viga en el problema 19.3 inmediatamente después de que son cortados los cables, suponiendo un esfuerzo en los cables = 160 000 lb/plg². (*Resp.:* −0.225 plg ↑.)

19.12 Calcule la deflexión en el ℄ de la viga del problema 19.1 inmediatamente después de que se cortan los cables, suponiendo P inicial = 240 klb y P después de las pérdidas = 190 klb. Repita el cálculo después de las pérdidas si cargas vivas concentradas de 20 klb están localizadas en los tercios del claro de la viga y f'_c = 5 000 lb/plg². Suponga que los cables son rectos y que no se tiene ninguna otra carga aparte del peso propio y las dos cargas de 20 klb. Use I_g en todos los cálculos.

19.13 Determine la resistencia por cortante de la viga mostrada en la figura a 3 pies del apoyo, usando el método aproximado permitido por el código ACI. Determine en la misma sección la separación requerida entre estribos ⊔ #3, si $f'_c = 5\,000$ lb/plg², $f_{pu} = 250\,000$ lb/plg², f_y para los estribos = 50 000 lb/plg², y $f_{se} = 200\,000$ lb/plg². (*Resp.:* $s = 21.73''$.)



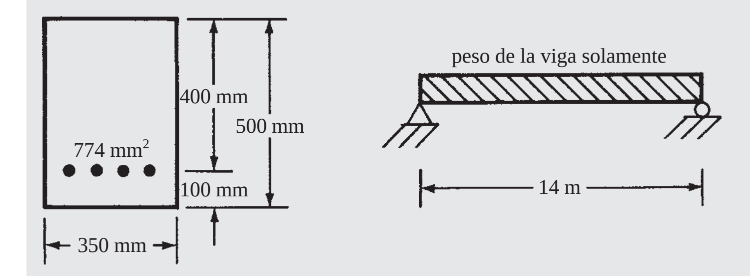


19.14 Repita el problema 19.1 usando la hoja de cálculo del capítulo 19.

19.15 Repita el problema 19.3 usando la hoja de cálculo del capítulo 19. (*Resp.:* la misma que para el problema 19.3.)

Problemas con unidades del SI

19.16 Inmediatamente después de cortar los cables en la viga mostrada, éstos tienen un presfuerzo efectivo de 1.260 GPa. Determine los esfuerzos en las partes superior e inferior de la viga en los extremos y en el centro del claro. El concreto pesa 23.5 kN/m^3. Los cables son rectos. $E = 27\ 800$ MPa. $f_{py} = 0.8 f_{pu}$.

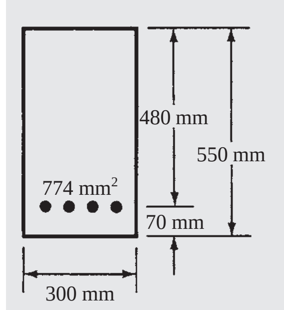


19.17 La viga mostrada tiene un claro simple de 12 m: $f'_c = 35$ MPa, $f_{pu} = 1.725$ GPa, y el presfuerzo inicial es 1.10 GPa.

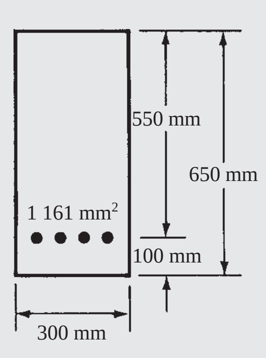
a) Calcule los esfuerzos en el concreto en las partes superior e inferior de la viga en el centro del claro, inmediatamente después de que se corten los tendones. (*Resp.:* $f_{sup.} = +1.766$ MPa, $f_{inf.}$ $-12\ 086$ MPa.)

b) Recalcule los esfuerzos después de pérdidas supuestas en los tendones de 18%. (*Resp.:* $f_{sup.} = +0.618$ MPa, $f_{inf.} = -9.08$ MPa.)

c) ¿Qué carga viva máxima uniforme de servicio puede soportar la viga además de su propio peso, si los esfuerzos permisibles son: $0.45 f'_c$ en compresión y $0.5\sqrt{f'_c}$ en tensión? (*Resp.:* 10.095 kN/m.)



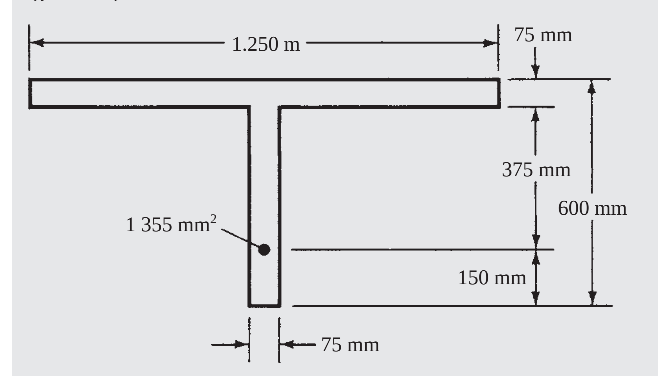
19.18 Con Los mismos esfuerzos permisibles y los esfuerzos en los cables del problema 19.17, ¿Qué carga uniforme total, incluyendo el peso propio, puede soportar la viga mostrada en la figura en un claro simple de 15 m?



19.19 calcule el momento de agrietamiento y la capacidad por momento de diseño en la viga adherida del problema 19.17 si $f_{py} = 0.8 f_{pu}$. (*Resp.:* 181.68 kN · m, 438.07 kN · m.)

20.20 Calcule los esfuerzos en las fibras superior e inferior de la viga del problema 19.16 si se levanta en los tercios de su longitud. Suponga un impacto de 100%.

19.21 Calcule la capacidad por momento de diseño de la viga T adherida mostrada en la figura. $f'_c = 35$ MPa, $f_{pu} = 1.725$ GPa, $f_{py} = 0.8f_{pu}$ y el esfuerzo inicial en los cables es 1.100 GPa. (*Resp.*: 843.6 kN · m.)



19.22 Calcule la deflexión en el ℄ de la viga del problema 19.16, inmediatamente después de que se corten los cables. Use I_g.

20

Cimbras

20.1 INTRODUCCIÓN

La obra de cimbrado para el concreto consiste en moldes en los que se coloca dicho material en estado semilíquido. Los moldes, o cimbra, tienen que ser lo suficientemente fuertes para contener el concreto en la forma y tamaño deseados hasta que endurezca. Puesto que la cimbra es en sí una estructura, debe diseñarse cuidadosa y económicamente para que soporte las cargas impuestas, usando los métodos requeridos en el diseño de otras estructuras de ingeniería.

La seguridad es un aspecto muy importante del diseño de las cimbras ya que un gran porcentaje de los accidentes que ocurren durante la construcción de estructuras de concreto se deben a su falla. Normalmente, las fallas en las cimbras no son causadas por la aplicación de una carga de gravedad excesiva. Si bien tales fallas ocurren ocasionalmente, las usuales son debidas a las fuerzas laterales que ocasionan el desplazamiento de los miembros de soporte. Estas fuerzas laterales pueden ser causadas por el viento, por el movimiento de equipo sobre las cimbras, por la vibración del tránsito vehicular o por la presión lateral del concreto fresco vibrado. Desafortunadamente, la mayoría de estas fallas pudieran haberse evitado con la colocación de unas cuantas varillas adicionales de soporte lateral. Por supuesto, hay otras causas de fallas, tales como el descimbrado antes de tiempo y el mal manejo de la rapidez de colado del concreto.

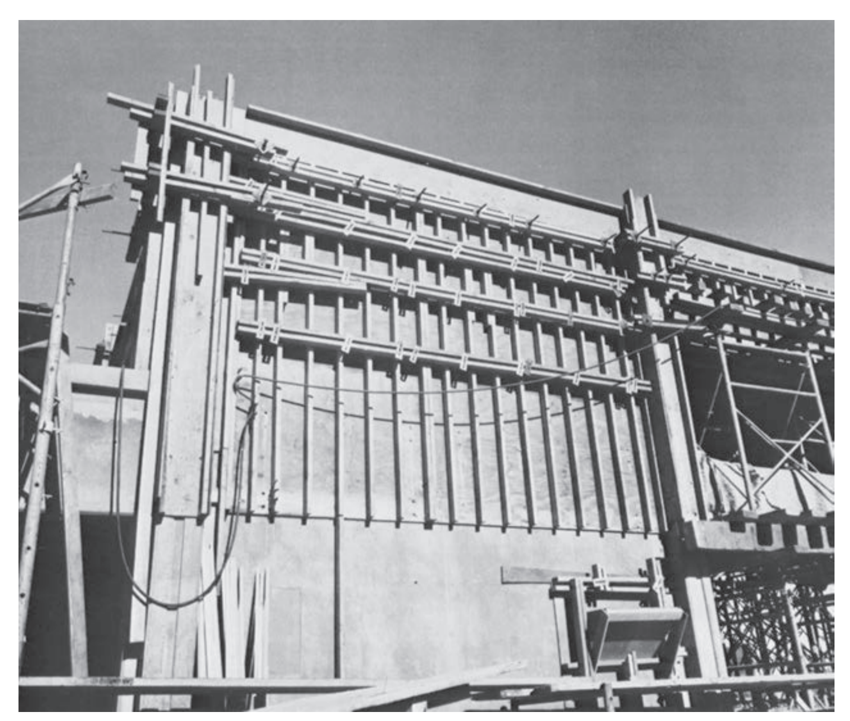
Aunque podría pensarse que la forma, el acabado y la seguridad son las consideraciones más importantes en la cimbra de concreto, debe estar claro que la economía es también una consideración principal. El costo de cimbrar, que puede variar de un tercio a casi dos tercios del costo total de una estructura de concreto, es a menudo mayor que el costo del concreto y del acero de refuerzo. Para una estructura promedio de concreto, se considera que la cimbra representa aproximadamente 50% del costo total. *Por tanto, es obvio que cualquier esfuerzo que se haga para mejorar los costos de las estructuras de concreto, debe concentrarse principalmente en la reducción del costo del cimbrado*. La cimbra debe tratarse como una parte integral de la programación de obra general y el contratista que ofrezca la menor cotización, será el que haya planeado la manera más económica de realizar el trabajo de cimbrado.

Cuando los proyectistas consideran los costos, tienden a pensar sólo en cantidades de material. En consecuencia, a veces diseñan una estructura muy cuidadosamente con miembros que son lo más ligeros posible y terminan con una cimbra complicada y cara.

20.2 RESPONSABILIDAD EN EL DISEÑO DE CIMBRAS

Los proyectistas de estructuras temporales, en Estados unidos, tales como las cimbras para concreto, deben cumplir con los requisitos de la *Occupational Safety and Health Act* (OSHA) del gobierno de ese país. Además, podrán existir códigos de seguridad estatales y locales que los proyectistas deben observar.

Normalmente, el ingeniero estructural es responsable del diseño de las estructuras de concreto reforzado, mientras que el diseño de la cimbra y su construcción es responsabilidad del contratista. Sin embargo, en algunas estructuras donde la cimbra es muy compleja, como en los cascarones, las placas



Planta de tratamiento de aguas residuales, Santa Rosa, California. (Cortesía de Simpson Timber Company.)

plegadas y los arcos, es conveniente que el proyectista se responsabilice del diseño de la cimbra. Existe la tendencia, particularmente en las grandes obras, de emplear ingenieros estructurales para diseñar y detallar el cimbrado.

En los documentos contractuales debe especificarse claramente la responsabilidad de cada persona que participe en la obra. Normalmente, es conveniente dar al contratista tanta libertad como sea razonable para que planee y elabore los detalles de construcción de su propia cimbra, porque así se obtendrán las propuestas más económicas.

Debe recordarse que en los documentos de contratación (y aun cuando si en ellos se describe con exactitud la forma de ejecución, pero al mismo tiempo los resultados que deben obtenerse) generalmente no se presentan obligaciones. En otras palabras, si los detalles exactos de construcción se especifican en el contrato y son cumplidos por el contratista, si la cimbra falla, el contratista no puede ser responsable.

20.3 MATERIALES USADOS EN LA CIMBRA

Hace varias décadas, la madera era el material que se usaba exclusivamente para construir las cimbras para concreto. Las cimbras se construían, se usaban una sola vez y se desmantelaban; poco de ellas se salvaba, si acaso uno que otro tablón. Esta práctica aún existe en algunas partes del mundo donde el costo de la mano de obra es relativamente bajo. En países como Estados Unidos, donde la mano de obra es muy cara, la tendencia desde hace ya varias décadas ha sido usar las cimbras varias veces, las que se hacen de muchos materiales diferentes. Sin embargo, la madera es aún el material más usado y cualquiera que sea el material que se emplee, siempre se requerirá algo de madera como complemento ya sea madera normal o madera contrachapada ("triplay").

La madera usada para las cimbras generalmente proviene de las especies de las maderas suaves tales como pino del sur, pino amarillo, abeto Douglas y pino abeto. Estas maderas son relativamente ligeras

y fáciles de conseguir. El pino del sur y el abeto Douglas son dos maderas de las más duras de este tipo, generalmente están disponibles y por ello se usan con mucha frecuencia para la cimbra. La madera para cimbra debe secarse sólo parcialmente, porque si está muy verde, se contrae y se alabea en los climas secos y calientes. Si está muy seca, se expande mucho al humedecerse. La madera debe cepillarse si va a estar en contacto con el concreto, pero puede usarse en estado burdo para contravientos y puntales.

La madera estructural se clasifica de acuerdo con las reglas establecidas por varias agencias y publicadas en el *American Softwood Standard*. Puede clasificarse visualmente de acuerdo con la norma ASTM-D245, "Methods for Establishing Standard Grades and Related Allowable Properties for Visually Graded Lumber". Puede también clasificarse por medio de una máquina con pruebas no destructivas.

La introducción de la madera contrachapada condujo a grandes avances en la construcción de cimbras. Las grandes láminas de este material ahorran una gran cantidad de trabajo en la construcción de las cimbras y, al mismo tiempo, permiten la construcción de grandes superficies de concreto sin juntas, lo cual reduce correspondientemente los costos de acabado y barnizado del concreto expuesto. La madera contrachapada también tiene bastante resistencia a los cambios de cimbra cuando se humedece, es resistente y puede flexionarse hasta cierto punto, haciendo posible la construcción de superficies curvas.

Las cimbras de acero son sumamente importantes en la actualidad en la construcción de concreto. Los sistemas de tableros de acero no sólo son importantes para edificios, sino que los contravientos y los elementos primarios estructurales de acero son muy útiles donde pueden usarse cimbras de madera simple o contrachapada. Si las cimbras de acero reciben un mantenimiento apropiado, pueden usarse muchas veces. Además, con sus grandes resistencias pueden usarse en lugares donde otros materiales no serían factibles, como en la obra falsa de estructuras con grandes claros. Las cimbras de otros tipos de estructuras suelen hacerse con frecuencia en acero por conveniencia. En esta categoría se sitúan las cimbras para columnas redondas, túneles, etcétera.

Las cimbras de fibra de papel Sonotube son empleadas a menudo para columnas redondas. Estas cimbras patentadas son unidades de peso ligero de una sola pieza que pueden aserrarse para ajustarse a vigas, salidas de servicio y otros elementos estructurales. Tienen barreras contra la humedad incorporadas que ayudan al curado. Como son desechables, no causan costos por limpieza, reembarque o inventario. Pueden recortarse rápidamente con sierras eléctricas o herramientas manuales.

Otros dos materiales que se usan a menudo como cimbras de concreto son el plástico reforzado con fibra de vidrio y los tableros aislantes. El plástico reforzado con fibra de vidrio puede rociarse sobre bases de madera o puede usarse para fabricar cimbras especiales, como las empleadas en los pisos de casetones. Existe en el mercado una gran variedad de tableros aislantes que se usan como cimbra. Éstos se fijan a las cimbras y cuando éstas se retiran, los tableros quedan adheridos al concreto o se quedan en su lugar mediante algún tipo de sujetador.

20.4 ABASTECIMIENTO DE CIMBRAS

Existen empresas que se especializan en la construcción de obra falsa donde pueden rentarse o comprarse cimbras, apuntalamientos y accesorios diversos. El contratista puede solicitar a esas empresas cotizaciones para las cimbras de columnas, pisos y muros. Si las estructuras se diseñan con dimensiones estándares, el uso de cimbras rentadas puede resultar la solución más económica. Esto hace el trabajo del contratista un poco más fácil. Puede aligerar la carga de trabajo de su compañía delegando la responsabilidad de la obra falsa a una empresa que se especialice en ese aspecto de la construcción. La renta de la cimbra permite al contratista reducir su inversión en muchos artículos, tales como separadores, sujetadores, etc., que tendría que tener en existencia si él hiciera todo el trabajo de cimbrado.

Si las cimbras de los tamaños deseados no se pueden rentar o comprar, el contratista puede fabricar sus propias cimbras o mandarlas hacer en alguna compañía que se especialice en eso. Con esta última alternativa se obtiene una cimbra de muy alta calidad.

Finalmente, las cimbras pueden construirse en la obra. Si bien la calidad que resulta no es tan alta como en las otras dos alternativas, puede ser la única opción para estructuras complicadas en las que las cimbras no pueden utilizarse de nuevo. Por supuesto, en muchas obras pueden combinarse las cimbras rentadas, las construidas en la obra y las mandadas a hacer, para lograr un mejor costo en la operación del cimbrado.

20.5 ECONOMÍA EN EL CIMBRADO

Las primeras oportunidades para economizar en la cimbra se presentan durante el diseño de la estructura. Los proyectistas de concreto pueden a menudo ahorrarle al propietario mucho dinero si toman en cuenta, durante el diseño de la estructura, aquellos factores que permiten economizar en la cimbra. Entre las medidas que pueden tomarse, se cuentan las siguientes:

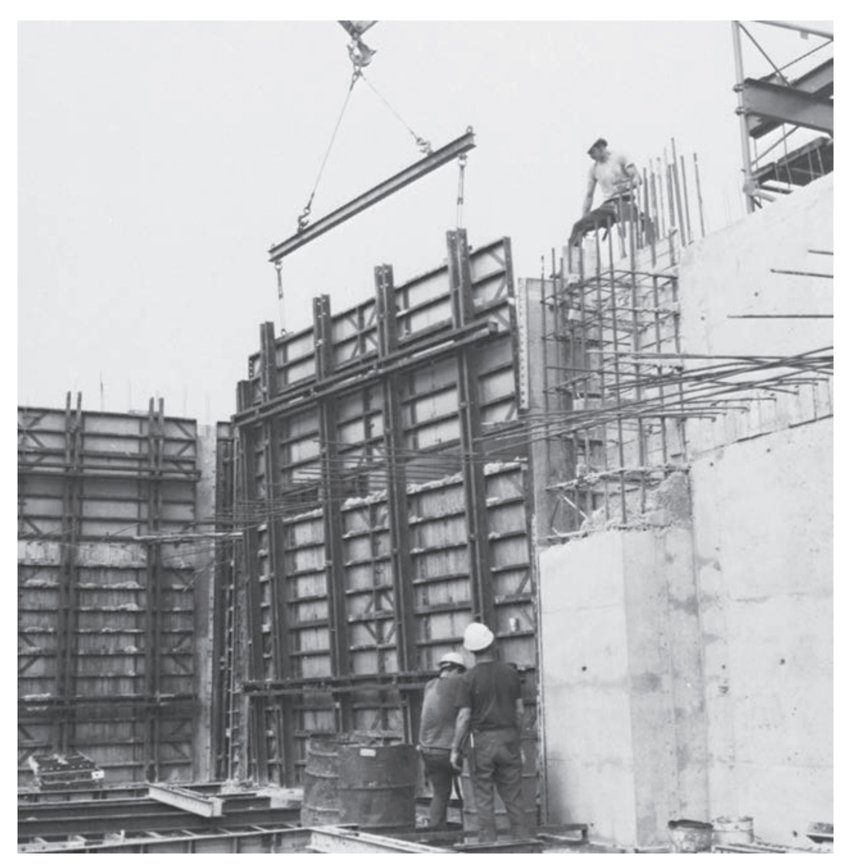
1. Procure coordinar el diseño de ingeniería con el arquitectónico, por ejemplo, variando un poco el tamaño de los locales para permitir el uso de cimbras estándar.
2. Mantenga las alturas de los pisos iguales, así como el tamaño de las vigas, losas y columnas en tantos pisos como sea posible, con el fin de poder usar de nuevo la cimbra y no tener que cambiarla de piso en piso. Sin duda, el factor más importante en el costo total de la cimbra, es el número de veces que ésta puede volver a usarse.
3. Las vigas deben ser al menos tan anchas como las columnas para que las uniones sean más sencillas. Cuando las vigas son más estrechas que las columnas, la cimbra resulta más complicada y cara.
4. Al diseñar columnas para edificios de muchos pisos, recuerde que su tamaño puede mantenerse constante cambiando el porcentaje de acero de piso en piso, comenzando en el piso superior con aproximadamente 1% de acero e incrementándolo piso por piso hasta alcanzar el porcentaje máximo. Asimismo, la resistencia del concreto puede incrementarse para los pisos inferiores.
5. Cuantas más columnas se construyan del mismo tamaño, menores serán los costos. Si resulta necesario cambiar el tamaño de una columna al movernos verticalmente en un edificio, es conveniente hacerlo en incrementos de 2 plg, una en un lado de una columna en un piso y luego una en el otro lado en el otro piso.
6. Diseñe estructuras que permitan el uso de cimbras comerciales, tales como los casetones metálicos o las láminas corrugadas de metal para las losas de piso o de techo.
7. Es conveniente usar el mismo espesor en todos los muros de concreto reforzado de un proyecto dado. Las aberturas en los muros deben ser las menos posibles y si se puede, estar situadas en el mismo lugar en cada muro. Además, es conveniente mantener constantes las elevaciones de la cimentación bajo un muro. Cuando esto no sea factible, deben utilizarse los menos escalones posibles en la cimentación.
8. Use vigas y columnas que no tengan cartelas, salientes o recortes complicados.
9. Usualmente, las vigas planas anchas son más económicas que las vigas estrechas profundas, porque en éstas es más difícil armar el refuerzo y colar el concreto.
10. En los marcos de concreto reforzado, las losas de piso con su cimbra requerida son usualmente los elementos más caros. Desde el punto de vista de la cimbra, las losas planas en una y en dos direcciones, son los sistemas de piso más económicos; en cambio, los pisos de vigas y losas en una y dos direcciones, requieren las cimbras más caras. Entre estos dos extremos están los pisos con casetones en una y dos direcciones.
11. Deje que el contratista use sus propios métodos en la construcción de la cimbra, haciéndolo responsable solamente de lo adecuado de ésta.

20.6 MANTENIMIENTO DE LA CIMBRA

Para poder usar un cimbrado varias veces, es claro que el mismo debe removerse, mantenerse y almacenarse apropiadamente. Para prolongar la vida útil de la cimbra, el contratista puede hacer que sean las mismas cuadrillas de trabajadores las que monten y desmonten las cimbras. Si al desmontar un conjunto de cimbras los trabajadores saben que tendrán que montar después las mismas en otra zona u obra, serán más cuidadosos en su manejo y mantenimiento. (En algunas zonas tal vez no sea posible usar las mismas cuadrillas para ambos trabajos, debido a las reglamentaciones contractuales.)

No deben usarse barretas metálicas o alzaprimas para desmantelar las cimbras de madera contrachapada, pues éstas fácilmente pueden resultar dañadas. Es preferible usar cuñas de madera que se insertan y se golpean ligeramente para separar las cimbras del concreto endurecido. Después de retiradas las cimbras, éstas deben limpiarse minuciosamente y aceitarse. Cualquier porción de concreto que haya quedado adherido a las partes metálicas de las cimbras debe rasparse cuidadosamente. Los agujeros en las caras de las cimbras de madera ocasionados por clavos, tirantes (que se describirán en la sección 20.7) y otros dispositivos, deben rellenarse cuidadosamente con placas metálicas, corcho o materiales plásticos. Después de terminar la limpieza y reparación, las cimbras deben recubrirse con aceite u otro conservador. Las cimbras de acero deben recubrirse al frente y atrás para evitar su oxidación y evitar que el concreto derramado se adhiera a ellas.

Las superficies de madera contrachapada deben aceitarse ligeramente y las cimbras deben almacenarse en posición horizontal con las superficies aceitadas en contacto. Los paneles almacenados deben mantenerse alejados de los rayos del sol y de la lluvia, o cubrirse ligeramente para permitir la circulación



Cimbrado para Water Tower Place, Chicago, Illinois. (Cortesía de Symons Corporation.)

del aire entre ellos y que no guarden calor. Además, pueden colocarse soleras de madera entre las cimbras para aumentar la ventilación. Aunque se dice que algunas cimbras de madera contrachapada han sido usadas 20 veces o más, es normal, con un mantenimiento apropiado, usarlas 30 o 40 veces aproximadamente. Cuando los paneles de madera contrachapada ya no sirven como cimbra, pueden usarse como base de pisos o como revestimiento para muros o techos.

Antes de usar las cimbras, sus superficies deben humedecerse y aceitarse, o recubrirse con algún tipo de material que no manche o debilite el concreto. Este recubrimiento se usa principalmente para que el concreto no se adhiera a las cimbras. Hay un gran número de compuestos en el mercado que reducen tal adherencia y sirven, al mismo tiempo, como selladores o recubrimientos protectores que reducen considerablemente la absorción de agua por las cimbras proveniente del concreto.

Varios tipos de compuestos de aceite se han usado en el pasado como agentes de separación de las superficies de las cimbras, tanto de las de madera como de las metálicas. Existen muchos agentes separadores y selladores de cimbras, pero antes de probar uno nuevo en una obra grande, el contratista debe hacerlo en porciones pequeñas. No debe usarse ningún material que forme una capa que interfiera con la del concreto para el curado después de retirar la cimbra. De la misma manera, si el concreto va a ser pintado o enyesado posteriormente, el recubrimiento no debe dejar una capa cérea o aceitosa que afecte la adherencia de la pintura o del yeso.

Existen varios tipos de productos para recubrir la madera contrachapada durante su fabricación. Algunos fabricantes de estos productos afirman que no es necesario aceitar la cimbra en la obra, una vez que ésta ha sido recubierta con sus productos. Las cimbras de plástico reforzado con fibra de vidrio, de gran uso en el concreto precolado y en el concreto arquitectónico debido al excelente acabado superficial que producen, tienen que ser aceitadas sólo ligeramente antes de usarse. De hecho, han sido usadas satisfactoriamente por algunos contratistas sin ninguna capa previa de aceite.

20.7 DEFINICIONES

En esta sección se presentan varios términos relativos a la cimbra que usted debe conocer. No están ordenados alfabéticamente, sino en el orden que el autor cree que será más conveniente para que el lector entienda el contenido del texto en las secciones subsecuentes de este capítulo.

Clavos de doble cabeza: se ha desarrollado un gran número de dispositivos para simplificar el montaje y desmontaje de las cimbras. Uno de ésos son los clavos de doble cabeza que pueden ser fácilmente extraídos, lo que permite desmantelar rápidamente los contravientos y la cimbra.



Clavo de doble cabeza.

Forro: es el material que forma la cara de contacto de la cimbra con el concreto (véase la figura 20.1).

Viguetas: son las vigas, usualmente horizontales, que soportan el revestimiento para las losas del piso o techo (véase la figura 20.1).

Largueros: son las vigas, usualmente horizontales, que soportan las viguetas y que descansan sobre los soportes verticales (véase la figura 20.1).

Puntales: son miembros provisionales (de madera o de metal) usados como soportes verticales para la cimbra que contiene el concreto fresco (véase la figura 20.1). El sistema de soportes verticales para una estructura se denomina apuntalamiento. Otros nombres para estos miembros son puntales, poste y accesorios.

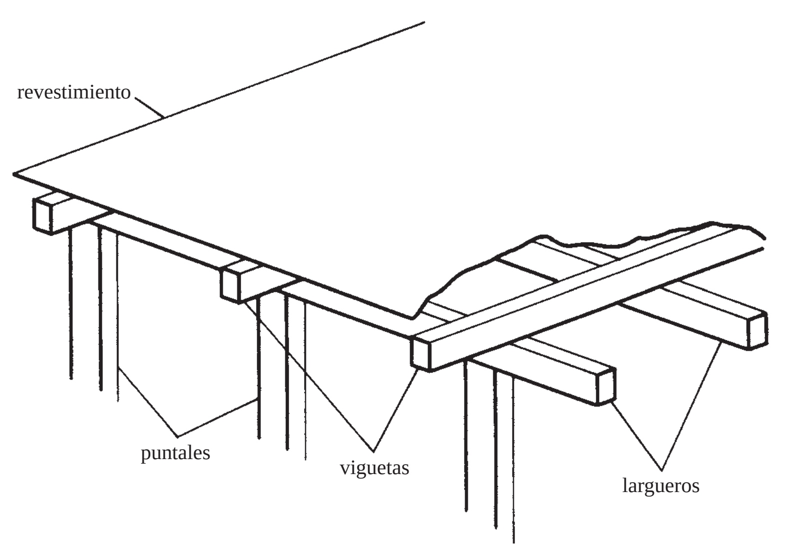


Figura 20.1 Cimbra de madera para una losa de piso.

Tirantes: dispositivos usados para soportar ambos lados de las cimbras de los muros contra la presión lateral del concreto. Atraviesan el concreto y se sujetan a cada lado (véase la figura 20.2). La presión lateral causada por el concreto fresco, que tiende a empujar hacia afuera la cimbra, es resistida a tensión por los tirantes. Si se usan correctamente, pueden eliminar la mayoría de

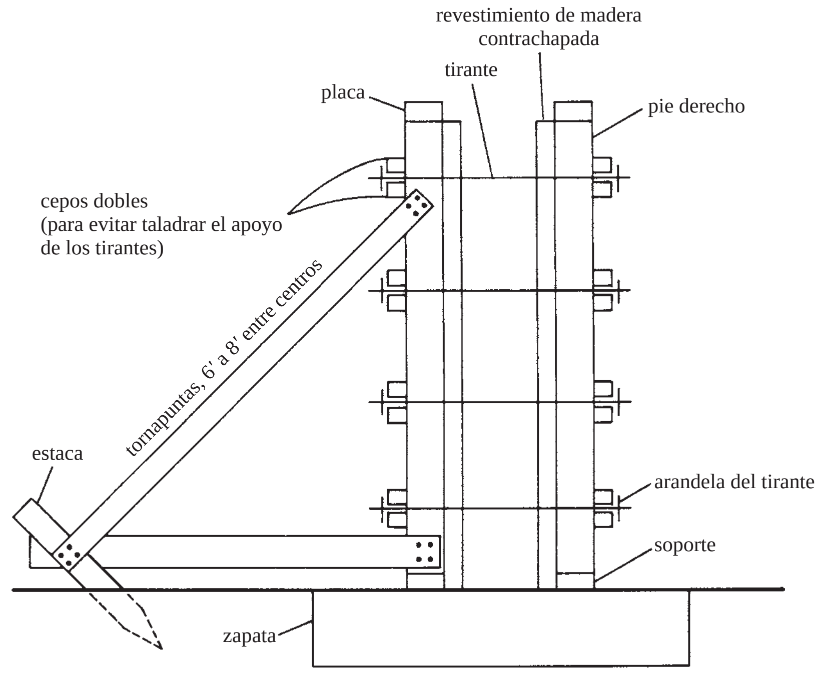


Figura 20.2 Cimbra de madera para un muro.

las tornapuntas externas requeridas en las cimbras de muros. Pueden tener o no separadores para mantener separadas a las cimbras la distancia requerida.

Separadores: tornapuntas, generalmente hechas de madera, que se colocan en las cimbras para mantenerlas separadas. Deben quitarse al colar el concreto para que no queden embebidas.

Tirantes dentados: en vez de usar separadores no unidos a los tirantes, es más frecuente utilizar un tipo de separador llamado separador dentado, en combinación con el del tipo común. Los extremos de estos artefactos patentados pueden torcerse o recortarse a una pequeña distancia de la superficie del concreto. Después de quitar las cimbras, los pequeños agujeros que quedan pueden rellenarse fácilmente con mortero de cemento.

Abrazaderas de columna: estos dispositivos se usan alrededor de la cimbra de las columnas, para soportar la presión hacia fuera del concreto fresco.

Pies derechos: miembros verticales que soportan el revestimiento de la cimbra de muros (véase la figura 20.2).

Cepos: miembros horizontales largos que soportan los pies derechos (véase la figura 20.2). Observe que cada cepo consiste usualmente en dos polines entre los que pasa un tirante, de manera que no hay que perforar agujeros en ellos.

20.8 FUERZAS APLICADAS A LAS CIMBRAS PARA CONCRETO

La cimbra debe diseñarse para resistir todas las cargas verticales y laterales aplicadas a ella, hasta que el concreto adquiera suficiente resistencia para resistirlas por sí mismo. Las cargas verticales aplicadas a la cimbra incluyen el peso propio del concreto, el del acero de refuerzo y el de la misma cimbra, así como las cargas vivas de construcción. Las cargas laterales incluyen la presión del concreto fresco, las fuerzas eólicas y las fuerzas laterales causadas por el movimiento del equipo de construcción. Estas fuerzas se analizan en los siguientes párrafos.

Cargas verticales

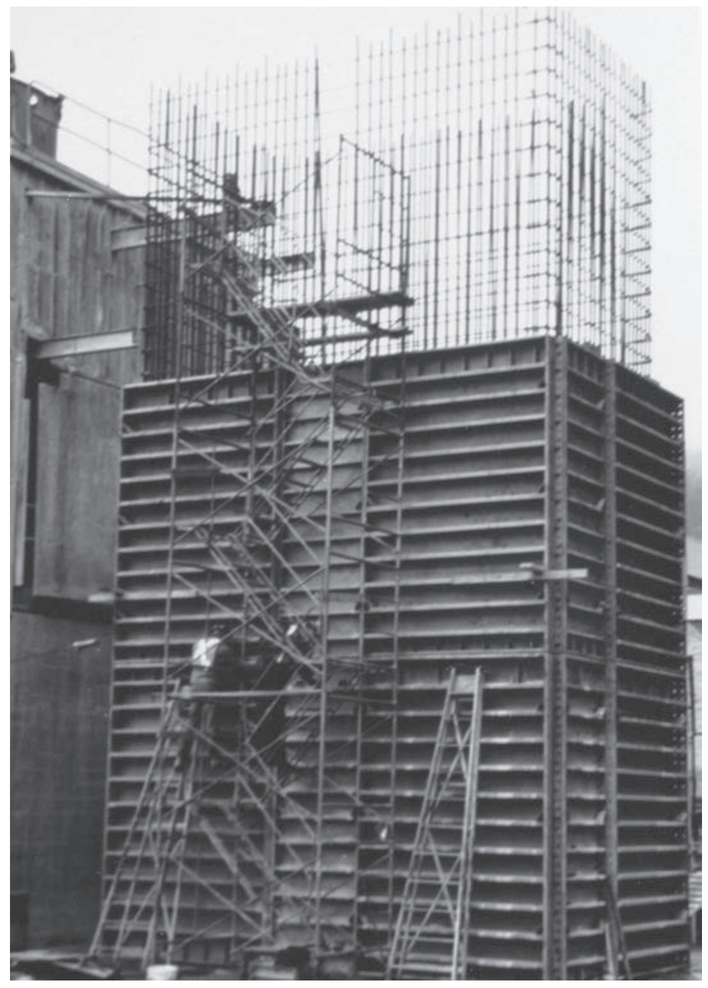
Las cargas muertas verticales que debe soportar la cimbra, además de su peso propio, incluyen el peso del concreto y sus varillas de refuerzo. El peso del concreto ordinario, incluido su refuerzo, se toma igual a 150 lb/pie^3. El peso de la cimbra, que suele despreciarse en los cálculos de diseño, puede variar entre 3 lb/pie^2 o 4 lb/pie^2 hasta 12 lb/pie^2 o 15 lb/pie^2.

La carga viva vertical que debe soportarse incluye el peso de los trabajadores, el equipo de construcción y el almacenamiento de materiales sobre las losas recién fraguadas. El Comité 347 del ACI[1] recomienda una carga mínima de 50 lb/pie^2 de proyección horizontal. Este valor incluye el peso de los trabajadores, del equipo, de los pasadizos y del impacto. Cuando se usan carretillas de motor, este valor debe incrementarse por lo menos a 75 lb/pie^2. Además, para tomar en cuenta el posible almacenamiento de materiales en las losas recién fraguadas (circunstancia frecuente), es común en la práctica diseñar la cimbra de las losas con 150 lb/pie^2 de carga viva vertical.

Cargas laterales

Las cargas en los muros y las columnas son diferentes de las de las losas. El concreto semilíquido se vierte en la cimbra y ejerce presiones laterales contra ésta, como lo haría cualquier líquido. La magnitud de

[1]Comité 347 del ACI, *Guide to Formwork for Concrete* (ACI 347 R-94) (Detroit: American Concrete Institute), 33 págs.



Horno de una fábrica de pulpa de madera, cerca de Castlegar, Columbia británica. (Cortesía de Economy Forms Corporation.)

esta presión depende del peso del concreto por pie cúbico, de la velocidad del colado, de la temperatura del concreto y de la manera de colarlo.

Las presiones exactas aplicadas a la cimbra por el concreto fresco son difíciles de estimar, debido a varios factores. Entre éstos se cuentan los siguientes:

1. La rapidez con que se vierte el concreto. Es obvio que cuanto más rápido se vierta el concreto, mayor será la presión.

2. La temperatura del concreto. la presión liquida sobre la cimbra varía bastante con la temperatura. Por ejemplo, cuando la temperatura es de 50 °F, la presión será sensiblemente mayor que cuando el concreto esté a 70 °F. La razón de esto es que el concreto colado a 50 °F fragua más lentamente que cuando se cuela a 70 °F. En consecuencia, el concreto más frío permanece en un estado semilíquido durante mayor tiempo y por tanto, a una mayor profundidad; las presiones pueden entonces incrementarse 25% o más. Debido a esto, la cimbra para el concreto colado en invierno debe diseñarse para presiones laterales mucho mayores que para el concreto colado en verano.

3. Manera de colar el concreto. Si se usan vibradores de alta frecuencia, el concreto se mantiene en estado líquido a profundidades bastante grandes y se comporta como un líquido de peso por pie cúbico igual al del concreto. La vibración puede incrementar las presiones laterales hasta 20% más que en el concreto picado.
4. Tamaño y forma de la cimbra, así como consistencia y proporción del concreto. Estos factores influyen en las presiones laterales hasta cierto grado, pero en las estructuras ordinarias son insignificantes. El uso de concreto autoconsolidante producirá presiones laterales mayores que las de otras proporciones de mezcla de concreto. Nasvik[2] recomienda el uso de una carga de presión de líquido total. Cuando se bombea desde el fondo, incremente la carga de presión de líquido total en 25% para considerar las presiones de la bomba.

Las presiones que ocurren en la cimbra debido al concreto semilíquido pueden alcanzar valores que no creería la gente no enterada ya que pueden ser de 1 500 lb/pie^2, de 1 800 lb/pie^2, o mayores. El Comité 347 del ACI ha publicado fórmulas recomendadas para el cálculo de las presiones laterales del concreto para diferentes temperaturas y velocidades de colado. En estas expresiones, dadas a continuación, p es la presión máxima de líquido equivalente (en libras por pie cuadrado) a cualquier elevación en la cimbra, R es la rapidez de colado vertical del concreto (en pie/h), T es la temperatura (Fahrenheit) del concreto en la cimbra y h es la altura máxima (en pies) del concreto fresco arriba del punto considerado. Estas expresiones deben usarse en muros en que el concreto, con un revenimiento no mayor de 4 plg, se cuele a una velocidad que no exceda de 7 pie/h. La profundidad del vibrado se limita a 4 pies debajo de la superficie del concreto.[3]

En muros, cuando *R* no exceda de 7 pie/h

$$p = 150 + \frac{9\,000R}{T} \quad (\text{máxima: } 2\,000 \text{ lb/pie}^2 \text{ o } 150h, \text{ la que sea menor})$$

En muros, cuando *R* es mayor que 7 pie/h, pero no mayor que 10 pie/h

$$p = 150 + \frac{43\,400}{T} + \frac{2\,800R}{T} \quad (\text{máxima: } 2\,000 \text{ lb/pie}^2 \text{ o } 150h, \text{ la que sea menor})$$

Las cimbras para columnas suelen llenarse muy rápidamente. De hecho, pueden llenarse por completo en menos tiempo que el requerido para que el concreto del fondo fragüe. Además, la vibración se extiende con frecuencia en toda la profundidad de la cimbra. En consecuencia, se producen mayores presiones laterales que las esperadas para las condiciones en muros antes consideradas. El Comité 347 del ACI recomienda la siguiente ecuación para estimar las presiones máximas en el diseño de cimbras para columnas.

Columnas con dimensión horizontal máxima de 6 pies o menor

$$p = 150 + \frac{9\,000R}{T} \quad (\text{máxima: } 3\,000 \text{ lb/pie}^2 \text{ o } 150h, \text{ la que sea menor})$$

En la figura 20.3 se comparan las presiones calculadas con las expresiones anteriores, para un rango de temperatura de 30 a 100 °F.

Además de las presiones laterales sobre la cimbra causadas por el concreto fresco, es necesario que las tornapuntas y el apuntalamiento se diseñen para resistir todas las otras fuerzas laterales posibles, tales como el viento, el desparramado del concreto, el movimiento del equipo, los topetones del equipo, la tensión en los cables, el colado no uniforme del concreto, etcétera.

[2]Formwork for self-consolidating concrete, Nasvik, Joe Concrete Construction, octubre 2004.
[3]Comité 347 del ACI, *Guide to Formwork for Concrete* (ACI 347 R-94).

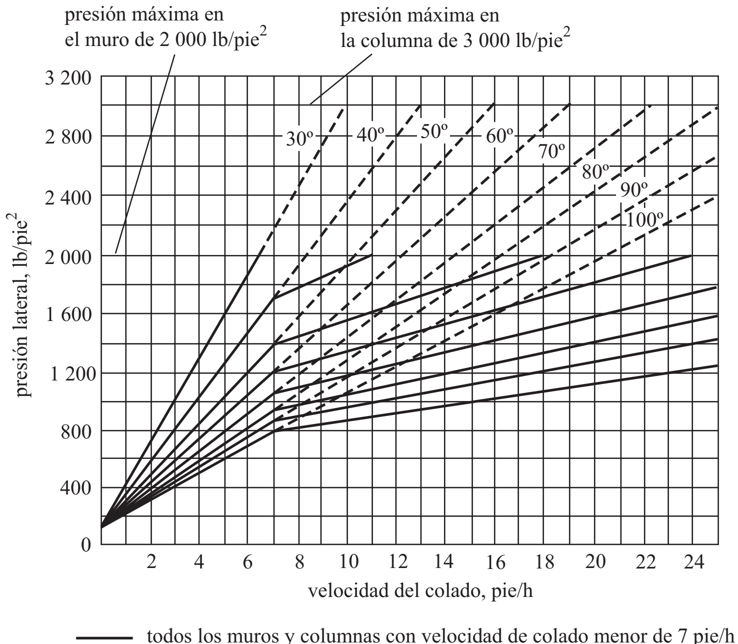


Figura 20.3 Presión lateral del concreto fresco en columnas y muros. (Cortesía de American Plywood Association.)

20.9 ANÁLISIS DE CIMBRAS PARA LOSAS DE PISOS Y TECHOS

Esta sección se dedica a los cálculos necesarios para el análisis de cimbras para losas de pisos y techos de concreto; su diseño se presenta en la siguiente sección. Como las cimbras de madera son las más usadas en la práctica, los análisis y ejemplos de este capítulo tendrán que ver principalmente con la madera.

Los miembros de madera tienen una propiedad muy útil, que es su capacidad de soportar cargas excesivas durante periodos cortos. Como resultado de esta característica, es práctica común permitir 25% de incremento en sus esfuerzos permisibles normales, si las cargas aplicadas son de corta duración.

La cimbra se considera comúnmente un tipo de estructura temporal porque permanece en el lugar sólo un tiempo corto. Además, las cargas soportadas por la cimbra alcanzan el valor máximo durante el proceso del colado y luego disminuyen muy rápidamente cuando el concreto fragua alrededor del refuerzo y empieza a tomar las cargas. En consecuencia, el proyectista buscará usar valores incrementados de los esfuerzos permisibles siempre que sea posible. La capacidad de la madera de tomar sobrecargas se basa en el tiempo total de aplicación de éstas. En otras palabras, si la cimbra va a usarse varias veces, la cantidad de sobrecarga que puede resistir no es tan grande como en el caso en que la cimbra se utiliza sólo una vez.

En los párrafos que siguen se analizan la flexión, el cortante y las deflexiones que ocurren en las cimbras.

Flexión

Normalmente, el revestimiento, las viguetas y los largueros son continuos sobre varios claros. Para tales casos, parece razonable suponer que el momento máximo es igual al momento máximo que se presenta

en un claro cargado uniformemente y continuo sobre tres o más claros. Este valor es aproximadamente igual a

$$M = \frac{w\ell^2}{10}$$

Esfuerzo cortante

Los esfuerzos cortantes, horizontal y vertical, en un punto cualquiera de una viga son iguales. En los materiales cuyas resistencias son las mismas en cualquier dirección, no se hace ninguna distinción entre los valores del cortante que actúan en direcciones diferentes. Sin embargo, los materiales como la madera tienen resistencias al cortante enteramente diferentes en direcciones diferentes. La madera tiende a escindirse entre sus fibras (usualmente paralelas al eje de la viga). Como el cortante horizontal es bastante crítico en los miembros de madera, es común usar el término *cortante horizontal* en cimbras de madera.

El esfuerzo cortante horizontal en los miembros rectangulares de madera puede calcularse con las fórmulas usuales, como sigue:

$$f_v = \frac{VQ}{Ib} = \frac{(V)[b \times (h/2) \times (h/4)]}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)(b)} = \frac{3V}{2bh} = \frac{3V}{2A}$$

En esta expresión, V es igual a $w\ell/2$ para claros simples uniformemente cargados. Igual que en los capítulos anteriores relativos al concreto reforzado, se permite calcular el esfuerzo cortante a una distancia h de la cara del apoyo. Si h se da en pulgadas y w es la carga uniforme por pie, la fuerza cortante externa a una distancia h del apoyo puede calcularse como sigue:

$$V = 0.5w\ell - \frac{h}{12}w$$

$$V = 0.5w\left(\ell - \frac{2h}{12}\right)$$

El revestimiento, los largueros, las viguetas y los cepos para cimbras normalmente son continuos. Para vigas con carga uniforme continua sobre tres o más claros, V es aproximadamente igual a $0.6w\ell$. A una distancia h del apoyo, el cortante se *supone* igual a:

$$V = 0.6w\left(\ell - \frac{2h}{12}\right)$$

Los esfuerzos cortantes permisibles para madera de construcción son bastante bajos y el proyectista no se aleja de la realidad si incrementa los esfuerzos cortantes dados permisibles un poco más de 25% si las cimbras se usan sólo una vez. Tales incrementos se incluyen en los esfuerzos permisibles dados posteriormente en este capítulo. Usualmente, no es necesario revisar los esfuerzos cortantes en el revestimiento, donde suelen ser muy bajos.

Deflexiones

La cimbra debe diseñarse para limitar las deflexiones a ciertos valores máximos. Si las deflexiones no se controlan, el resultado final será un concreto con desagradables protuberancias y acaso con grietas. La deflexión permitida depende del acabado deseado para el concreto, así como de su localización. Por ejemplo, donde se usa un acabado burdo, las deflexiones pequeñas podrían no ser muy obvias, pero si se desean superficies lisas, dichas deflexiones son fácilmente visibles y francamente objetables.

En algunas cimbras para concreto, se consideran satisfactorias las limitaciones para deflexión de $\ell/240$ o bien $\ell/270$, mientras que en otras, particularmente en superficies horizontales, puede requerirse

un límite de $\ell/360$. En algunos casos, particularmente para exposición arquitectónica, pueden requerirse límites aún más estrictos, tal vez de $\ell/480$.

También debe estar claro que las vigas y trabes perfectamente rectas se ven desde cierta distancia como combadas hacia abajo; en consecuencia, una pequeña deflexión hacia abajo se ve muy grande en detrimento de la apariencia de la estructura. Por esta razón, se considera conveniente combar hacia arriba las cimbras de esos miembros para que no parezca que tienen deflexión. Una combadura frecuentemente usada es de aproximadamente $\frac{1}{4}$ plg por cada 10 pies de longitud.

Para vigas de igual claro, uniformemente cargadas y continuas sobre tres o más claros, las deflexiones máximas en sus centros pueden determinarse aproximadamente con la siguiente expresión:

$$\delta = \frac{w\ell^4}{128EI}$$

Al usar las expresiones para deflexiones, debe notarse que las deflexiones que ocurren en la cimbras serán permanentes en la estructura terminada, por lo que el módulo de elasticidad E no debe incrementarse aun si las cimbras van a usarse sólo una vez. De hecho, puede ser necesario reducirlo en vez de incrementarlo en algunas partes de la cimbra. Cuando la madera se humedece, se vuelve más flexible, con las consiguientes deflexiones mayores. Está claro que una cimbra húmeda, particularmente la de revestimientos, es el caso normal. Por ello, es aconsejable usar una E menor que la normalmente permitida y es común especificar un factor de reducción de $\frac{10}{11}$.

En esta sección se presentan tres tablas de utilidad tanto para el análisis como para el diseño de cimbras. La primera de éstas, la tabla 20.1, da las propiedades de varios tamaños de perfiles de madera usados comúnmente para cimbras. Se incluyen las dimensiones cepilladas, las áreas de las secciones

Tabla 20.1 Propiedades de perfiles de madera usados comúnmente para cimbras. (Cortesía del American Concrete Institute.)

Tamaño nominal en pulgadas, $b \times h$	Tamaño estándar americano en pulgadas, $b \times h$ S4S*, 19% de humedad máxima	Área de la sección, $A = bh$ (plg^2)		Momento de inercia (plg^4) $I = \frac{bh^3}{12}$		Módulo de sección (plg^3) $S = \frac{bh^2}{6}$		Pie tablón por pie lineal de pieza
		Sin cepillar	S4S	Sin cepillar	S4S	Sin cepillar	S4S	
4×1	$3\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$	3.17	2.62	0.20	0.12	0.46	0.33	$\frac{1}{3}$
6×1	$5\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$	4.92	4.12	0.31	0.19	0.72	0.52	$\frac{1}{2}$
8×1	$7\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$	6.45	5.44	0.41	0.25	0.94	0.68	$\frac{2}{3}$
10×1	$9\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$	8.20	6.94	0.52	0.32	1.20	0.87	$\frac{5}{6}$
12×1	$11\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$	9.95	8.44	0.63	0.39	1.45	1.05	1
$4 \times 1\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2} \times 1$	4.08	3.50	0.43	0.29	0.76	0.58	$\frac{5}{12}$
$6 \times 1\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{2} \times 1$	6.33	5.50	0.68	0.46	1.19	0.92	$\frac{5}{8}$
$8 \times 1\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{4} \times 1$	8.3	7.25	0.87	0.60	1.56	1.21	$\frac{5}{6}$
$10 \times 1\frac{1}{4}$	$9\frac{1}{4} \times 1$	10.55	9.25	1.11	0.77	1.98	1.54	$1\frac{1}{24}$
$12 \times 1\frac{1}{4}$	$11\frac{1}{4} \times 1$	12.80	11.25	1.35	0.94	2.40	1.87	$1\frac{1}{4}$
$4 \times 1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{4}$	4.98	4.37	0.78	0.57	1.14	0.91	$\frac{1}{2}$
$6 \times 1\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{4}$	7.73	6.87	1.22	0.89	1.77	1.43	$\frac{3}{4}$
$8 \times 1\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4}$	10.14	9.06	1.60	1.18	2.32	1.89	1

Tabla 20.1 (*Continuación.*)

Tamaño nominal en pulgadas, $b \times h$	Tamaño estándar americano en pulgadas, $b \times h$ S4S*, 19% de humedad máxima	Área de la sección, $A = bh$ (plg^2)		Momento de inercia (plg^4) $I = \frac{bh^3}{12}$		Módulo de sección (plg^3) $S = \frac{bh^2}{6}$		Pie tablón por pie lineal de pieza
		Sin cepillar	S4S	Sin cepillar	S4S	Sin cepillar	S4S	
$10 \times 1\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4}$	12.89	11.56	2.03	1.50	2.95	2.41	$1\frac{1}{4}$
$12 \times 1\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4}$	15.64	14.06	2.46	1.83	3.58	2.93	$1\frac{1}{2}$
4×2	$3\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2}$	5.89	5.25	1.30	0.98	1.60	1.31	$\frac{2}{3}$
6×2	$5\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2}$	9.14	8.25	2.01	1.55	2.48	2.06	1
8×2	$7\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{2}$	11.98	10.87	2.64	2.04	3.25	2.72	$1\frac{1}{3}$
10×2	$9\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{2}$	15.23	13.87	3.35	2.60	4.13	3.47	$1\frac{2}{3}$
12×2	$11\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{2}$	18.48	16.87	4.07	3.16	5.01	4.21	2
2×4	$1\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$	5.89	5.25	6.45	5.36	3.56	3.06	$\frac{2}{3}$
2×6	$1\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2}$	9.14	8.25	24.10	20.80	8.57	7.56	1
2×8	$1\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{4}$	11.98	10.87	54.32	47.63	14.73	13.14	$1\frac{1}{3}$
2×10	$1\frac{1}{2} \times 9\frac{1}{4}$	15.23	13.87	111.58	98.93	23.80	21.39	$1\frac{2}{3}$
2×12	$1\frac{1}{2} \times 11\frac{1}{4}$	18.48	16.87	199.31	177.97	35.04	31.64	2
3×4	$2\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$	9.52	8.75	10.42	8.93	5.75	5.10	1
3×6	$2\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2}$	14.77	13.75	38.93	34.66	13.84	12.60	$1\frac{1}{2}$
3×8	$2\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{4}$	19.36	18.12	87.74	79.39	23.80	21.90	2
3×10	$2\frac{1}{2} \times 9\frac{1}{4}$	24.61	23.12	180.24	164.89	38.45	35.65	$2\frac{1}{2}$
3×12	$2\frac{1}{2} \times 11\frac{1}{4}$	29.86	28.12	321.96	296.63	56.61	52.73	3
4×4	$3\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$	13.14	12.25	14.39	12.50	7.94	7.15	$1\frac{1}{3}$
4×6	$3\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2}$	20.39	19.25	53.76	48.53	19.12	17.65	2
4×8	$3\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{4}$	26.73	25.38	121.17	111.15	32.86	30.66	$2\frac{2}{3}$
4×10	$3\frac{1}{2} \times 9\frac{1}{4}$	33.98	32.38	248.91	230.84	53.10	49.91	$3\frac{1}{3}$
6×3	$5\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}$	14.77	13.75	8.48	7.16	6.46	5.73	$1\frac{1}{2}$
6×4	$5\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$	20.39	19.25	22.33	19.65	12.32	11.23	2
6×6	$5\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2}$	31.64	30.25	83.43	76.26	29.66	27.73	3
6×8	$5\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2}$	42.89	41.25	207.81	193.36	54.51	51.56	4
8×8	$7\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2}$	58.14	56.25	281.69	263.67	73.89	70.31	$5\frac{1}{3}$

*Las dimensiones sin cepillar son $\frac{1}{8}$ plg mayores en ambas dimensiones.

transversales, los momentos de inercia y los módulos de sección. La mayoría de las piezas se han considerado planas en sus cuatro lados, de modo que sus superficies y dimensiones sean uniformes. Este tipo de madera de construcción se identifica como S4S (cepillada en sus cuatro lados).

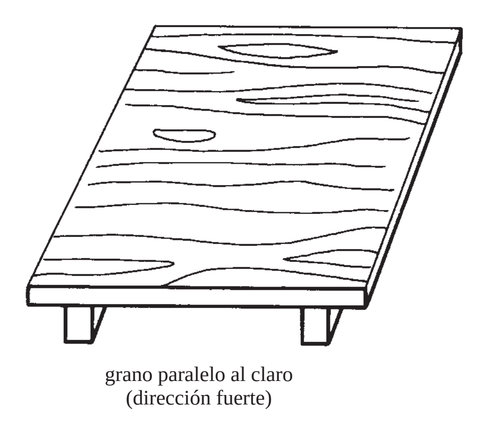
La madera en capas (o “triplay”) es el material estándar que se usa para el revestimiento de combas para pisos y muros y la usaremos en los ejemplos presentados en este capítulo. Casi toda la madera en capas para exteriores fabricada con pegamento impermeable al agua puede usarse satisfactoriamente, pero la industria maderera produce un tipo particular llamado *plyform* (madera contrachapada para cimbra), diseñada especialmente para tal objetivo. En el resto de este capítulo, será éste el producto al cual nos referiremos.

La madera contrachapada se fabrica pegando un número impar de láminas de madera, con el grano de cada una perpendicular al grano de la lámina adjunta. La alternación de los granos de las láminas de madera (llamado *entrecruce*) reduce considerablemente la contracción y el alabeo de los paneles resultantes. Se obtiene también un material cuyas capas adyacentes no tienen las mismas propiedades (cuando menos en una dirección común). En consecuencia, las propiedades de sección de la madera contrachapada (tales como el momento de inercia y el módulo de la sección), se calculan usando la aproximación del área transformada. La madera contrachapada puede obtenerse en espesores de $\frac{1}{8}$ a $1\frac{1}{8}$ plg. Sin embargo, muchos distribuidores tienen sólo en existencia los tamaños de $\frac{5}{8}$ plg y $\frac{3}{4}$ plg y los demás tienen que ordenarse especialmente.

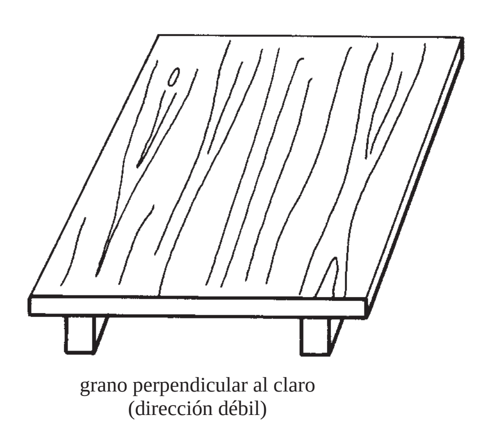
Los diversos tipos de maderas usados para fabricar la madera contrachapada (pino, abeto, alerce, secoya, cedro, etc.), tienen diferentes resistencias y rigideces. Aquellos tipos de maderas que tienen propiedades similares se asignan a una clase en particular. Para simplificar los cálculos de diseño, la industria maderera ha tomado en cuenta tanto las diferentes clases como los efectos de pegar las láminas con grano alternado, al calcular las propiedades dadas en la tabla 20.2. Por ello, el proyectista sólo tiene que considerar los esfuerzos permisibles y las propiedades de la madera contrachapada dados en la tabla.

Se observará que en la tabla 20.2 se dan las propiedades de sección para los esfuerzos aplicados tanto paralela como perpendicularmente al grano. Si el grano superficial se orienta paralelamente a la dirección de la flexión, la sección será mas resistente; resultará más débil si se orienta en la dirección opuesta. Esta situación se muestra en la figura 20.4.

En la madera contrachapada, los esfuerzos cortantes entre las capas o a lo largo de las superficies de pegamento se calculan con la expresión usual $H = f_v = VQ/lb$ y se denominan *esfuerzos cortantes de laminado*. Por conveniencia al hacer estos cálculos, se presentan en la tabla los valores de Ib/Q para los



grano paralelo al claro
(dirección fuerte)



grano perpendicular al claro
(dirección débil)

Figura 20.4

Tabla 20.2 Propiedades de sección y esfuerzos permisibles para algunos tamaños de madera contrachapada (plyform). (Cortesía de la American Plywood Association.)

		Propiedades del esfuerzo aplicado paralelo al grano			Propiedades del esfuerzo aplicado perpendicular al grano		
Espesor (pulgadas)	Peso aproximado (lb/pie^2)	Momento de inercia, I (plg^4/pie)	Módulo efectivo de sección, K_s (plg^3/pie)	Constante del cortante de laminado, lb/Q (plg^2/pie)	Momento de inercia, I (plg^4/pie)	Módulo efectivo de sección, K_s (plg^3/pie)	Constante del cortante de laminado, lb/Q (plg^2/pie)
Clase I							
$\frac{1}{2}$	1.5	0.077	0.268	5.127	0.035	0.167	2.919
$\frac{5}{8}$	1.8	0.130	0.358	6.427	0.064	0.250	3.692
$\frac{3}{4}$	2.2	0.199	0.455	7.854	0.136	0.415	4.565
$\frac{7}{8}$	2.6	0.280	0.553	8.204	0.230	0.581	5.418
1	3.0	0.427	0.737	8.871	0.373	0.798	7.242
$1\frac{1}{8}$	3.3	0.554	0.894	9.872	0.530	0.986	8.566
Clase II							
$\frac{1}{2}$	1.5	0.075	0.267	4.868	0.029	0.182	2.671
$\frac{5}{8}$	1.8	0.130	0.357	6.463	0.053	0.320	3.890
$\frac{3}{4}$	2.2	0.198	0.455	7.892	0.111	0.530	4.814
$\frac{7}{8}$	2.6	0.280	0.553	8.031	0.186	0.742	5.716
1	3.0	0.421	0.754	8.614	0.301	1.020	7.645
$1\frac{1}{8}$	3.3	0.566	0.869	9.571	0.429	1.260	9.032
Estructural I							
$\frac{1}{2}$	1.5	0.078	0.271	5.166	0.042	0.229	3.076
$\frac{5}{8}$	1.8	0.131	0.361	6.526	0.077	0.343	3.887
$\frac{3}{4}$	2.2	0.202	0.464	7.926	0.162	0.570	4.812
$\frac{7}{8}$	2.6	0.288	0.569	7.539	0.275	0.798	6.242
1	3.0	0.479	0.827	7.978	0.445	1.098	7.639
$1\frac{1}{8}$	3.3	0.623	0.955	8.841	0.634	1.356	9.031

Nota: todas las propiedades están ajustadas para tomar en cuenta la eficacia reducida de las capas con el grano perpendicular al esfuerzo aplicado.

diferentes tamaños de madera contrachapada y H puede determinarse simplemente para un caso particular dividiendo V entre el valor apropiado Ib/Q tomado de la tabla.

Las aplicaciones normales de la madera contrachapada son en condiciones húmedas y deben entonces hacerse ajustes en los esfuerzos permisibles para esas características, así como para la duración de la carga y otros factores producto de la experiencia. Como resultado de estos ajustes, se dan normalmente los siguientes esfuerzos permisibles para la madera contrachapada:

	Madera contrachapada, clase I	Madera contrachapada, clase II	Madera contrachapada, tipo estructural
Módulo de elasticidad (lb/plg^2)	1 650 000	1 430 000	1 650 000
Esfuerzo de flexión (lb/plg^2)	1 930	1 330	1 930
Esfuerzo cortante de laminado (lb/plg^2)	80	72	102

La tabla 20.3 muestra los esfuerzos permisibles por flexión, los esfuerzos permisibles de compresión perpendiculares y paralelos al grano, los esfuerzos cortantes permisibles y los módulos de elasticidad para varios tipos de maderas que se usan como cimbras.

El ejemplo 20.1 ilustra los cálculos necesarios para determinar los esfuerzos de flexión y cortantes, así como las deflexiones máximas que se presentan en el revestimiento, en los largueros y las viguetas usadas como cimbras de losas de concreto con carga viva. En un problema real de diseño, puede ser necesario considerar diversos arreglos de los largueros, viguetas, etc. y diversos grados de madera con sus diferentes esfuerzos permisibles, antes de efectuar el diseño definitivo.

EJEMPLO 20.1

La cimbra para una losa de piso de concreto reforzado de 6 plg de espesor de peso normal, consiste en un revestimiento de madera contrachapada Clase II de $\frac{3}{4}$ plg soportado por viguetas de 2×6 plg a 2 pies 0 plg entre centros, que a su vez están soportadas por largueros de 2×8 pulgadas a 4 pies 0 plg entre centros. Los largueros están soportados por puntales a 4 pies 0 plg entre centros.

Las viguetas y los largueros están hechos con pino Douglas, tipo costa del oeste y serán usados muchas veces. El esfuerzo permisible de flexión en los miembros de pino es de 1 875 lb/plg^2, el esfuerzo cortante permisible horizontal es de 180 lb/plg^2 y el módulo de elasticidad es de 1 760 000 lb/plg^2. Para la madera contrachapada los valores correspondientes son 1 330 lb/plg^2, 72 lb/plg^2 y 1 430 000 lb/plg^2, con el esfuerzo aplicado paralelamente al grano.

Para una carga viva de 150 lb/pie^2, revisar los esfuerzos de flexión y cortante en el revestimiento, las viguetas y los largueros. Revísense también las deflexiones, suponiendo que la deflexión máxima permisible en cada uno de esos elementos es de $\ell/360$ para todas las cargas.

SOLUCIÓN ***Revestimiento***

Propiedades de una pieza de madera contrachapada de $\frac{3}{4}''$ de espesor y $12''$ de ancho, según la tabla 20.2

$$S = 0.455 \text{ plg}^3, \quad I = 0.198 \text{ plg}^4, \quad \frac{Ib}{Q} = 7.892 \text{ plg}^2$$

Cargas (despreciando el peso de la cimbra)

$$\text{Concreto} = \left(\frac{6}{12}\right)(150) = 75 \text{ lb/pie}^2$$

$$\text{Carga viva} = 150$$

$$\text{Carga total} = \overline{225} \text{ lb/pie}^2$$

Tabla 20.3 Esfuerzos de trabajo sugeridos para el diseño de cimbras de madera.

	Cimbra clase I, uso simple o construcción ligera					Cimbra clase II, uso múltiple o construcción pesada				
	Esfuerzo permisible unitario, lb/plg^2					Esfuerzo permisible unitario, lb/plg^2				
Especies y grados de madera para cimbra	Flexión en fibra extrema	Compresión perpendicular al grano	Compresión paralela al grano	Cortante horizontal	Módulo de elasticidad, lb/plg^2	Flexión en fibra extrema	Compresión perpendicular al grano	Compresión paralela al grano	Cortante horizontal	Módulo de elasticidad, lb/plg^2
Pino Douglas, construcción tipo costero	1 875	490	1 500	180	1 760 000	1 500	390	1 200	145	1 760 000
Pino Douglas, construcción tierra adentro, estructural común	1 815	475	1 565	180	1 760 000	1 450	380	1 250	145	1 760 000
Pinabete, construcción tipo costa occidental	1 875	455	1 380	150	1 540 000	1 500	365	1 100	120	1 540 000
Alerce, construcción estructural	1 815	490	1 660	180	1 650 000	1 450	390	1 325	145	1 650 000
Pino del sur, No. 1 SR	1 875	490	1 625-1 875	220	1 760 000	1 500	390	1 300-1 500	175	1 760 000
Secoya, duramen estructural	1 625	400	1 380	135	1 320 000	1 300	320	1 100	110	1 320 000
Abeto oriental, 1 450 f estructural	1 815	375	1 310	160	1 320 000	1 450	300	1 050	130	1 320 000
Madera contrachapada pino Douglas, forma B-B para concreto	2 000	(Apoyo sobre cara) 435	1 500	*	1 600 000	1 500	(Apoyo sobre cara) 325	1 100	*	1 600 000
Tablero de revestimiento, todas las especies	Use 100% del valor para las especies indicadas arriba	Use 67% del valor para las especies indicadas arriba	Use 90% del valor para las especies indicadas arriba	Use 100% del valor para las especies indicadas arriba	Use $\frac{10}{11}$ del valor para las especies indicadas arriba	Use 100% del valor para las especies indicadas arriba	Use 67% del valor para las especies indicadas arriba	Use 90% del valor para las especies indicadas arriba	Use 100% del valor para las especies indicadas arriba	Use $\frac{10}{11}$ del valor para las especies indicadas arriba

*El cortante no es una consideración que rige el diseño de paneles de madera contrachapada, excepto en el caso de claros muy cortos fuertemente cargados. Si se usan paneles de 1 plg o $1\frac{1}{8}$ plg, revise el cortante de laminación de acuerdo con las indicaciones de los fabricantes de la madera contrachapada.

Fuente: Obtenido de "National Design Specifications for Stress-Grade Lumber and Its Fastenings", edición 1960, corregida y de "Recommendations of the Douglas Fir Plywood Association".

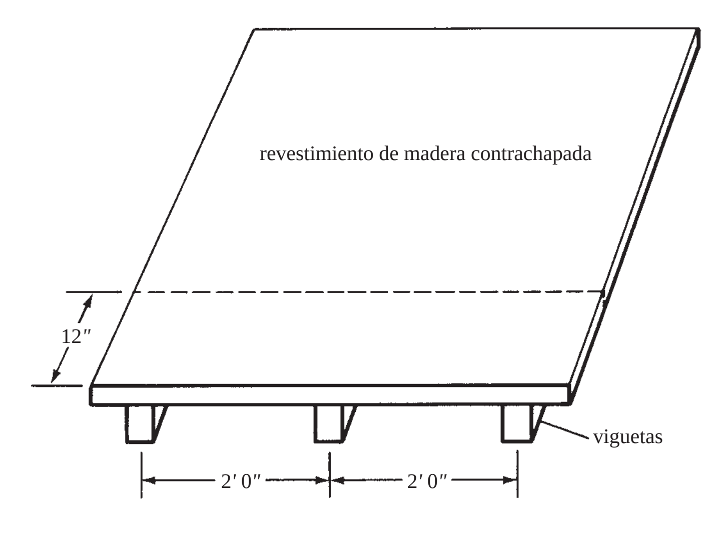


Figura 20.5

Esfuerzos de flexión (con referencia a la figura 20.5)

$$M = \frac{w\ell^2}{10} = \frac{(225)(2)^2}{10} = 90 \text{ pie-lb}$$

$$f_b = \frac{(12)(90)}{0.455} = 2\,374 \text{ lb/plg}^2 > 1\,330 \text{ lb/plg}^2 \qquad \underline{\underline{\text{No es satisfactoria}}}$$

Esfuerzos cortantes (usualmente no se revisan en el revestimiento)

$$V = 0.6w\left(\ell - \frac{2h}{12}\right) = (0.6)(225)\left(2 - \frac{2 \times \frac{3}{4}}{12}\right) = 253 \text{ lb}$$

$$f_v = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V}{Ib/Q} = \frac{253}{7.892} = 32 \text{ lb/plg}^2 < 72 \text{ lb/plg}^2 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Deflexión

$$\text{Deflexión permisible} = \left(\frac{1}{360}\right)(12 \times 2) = 0.067''$$

$$\delta \text{ real} = \frac{w\ell^4}{128EI} = \frac{\left(\frac{225}{12}\right)(12 \times 2)^4}{(128)(1.43 \times 10^6)(0.198)} = 0.172'' > 0.067'' \qquad \underline{\underline{\text{No es satisfactoria}}}$$

Viguetas

Propiedades de viguetas de 2 × 6 con dimensiones acabadas de $1\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2}$ (tabla 20.1)

$$A = 8.250 \text{ plg}^2, \quad I = 20.80 \text{ plg}^4, \quad S = 7.56 \text{ plg}^3$$

$$\text{Carga por pie} = (2)(225) = 450 \text{ lb/pie}$$

Esfuerzos por flexión y cortante

$$M = \frac{w\ell^2}{10} = \frac{(450)(4)^2}{10} = 720 \text{ pie-lb}$$

$$f_b = \frac{(12)(720)}{7.56} = 1\,143 \text{ lb/plg}^2 < 1\,875 \text{ lb/plg}^2 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$V = 0.6w\left(\ell - \frac{2h}{12}\right) = (0.6)(450)\left(4 - \frac{2 \times 5.50}{12}\right) = 832.5 \text{ lb}$$

$$f_v = \frac{3V}{2A} = \frac{(3)(832.5)}{(2)(8.25)} = 151 \text{ lb/plg}^2 > 180 \text{ lb/plg}^2 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Deflexión

$$\text{Deflexión permisible} = \left(\frac{1}{360}\right)(12 \times 4) = 0.133''$$

$$\delta \text{ real} = \frac{w\ell^4}{128EI} = \frac{\left(\frac{450}{12}\right)(12 \times 4)^4}{(128)(1.76 \times 10^6)(20.80)} = 0.0425'' < 0.133'' \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Largueros

Propiedades de largueros de 2 × 8 con dimensiones terminadas de $1\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{4}$ (tabla 20.1)

$$A = 10.87 \text{ plg}^2, \quad I = 47.63 \text{ plg}^4, \quad S = 13.14 \text{ plg}^3$$

$$\text{carga/pie} = (4)(225) = 900 \text{ lb/pie}$$

Esfuerzos de flexión y cortante

$$M = \frac{w\ell^2}{10} = \frac{(900)(4)^2}{10} = 1\,440 \text{ pie-lb}$$

$$f_b = \frac{(12)(1\,440)}{13.14} = 1\,315 \text{ lb/plg}^2 < 1\,875 \text{ lb/plg}^2 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$V = 0.6w\left(\ell - \frac{2h}{12}\right) = (0.6)(900)\left(4 - \frac{2 \times 7.25}{12}\right) = 1\,507 \text{ lb}$$

$$f_v = \frac{(3)(1\,507)}{(2)(10.87)} = 208 \text{ lb/plg}^2 > 180 \text{ lb/plg}^2 \qquad \underline{\underline{\text{No es satisfactorio}}}$$

Deflexión

$$\text{Deflexión permisible} = \left(\frac{1}{360}\right)(12 \times 4) = 0.133''$$

$$\delta \text{ real} = \frac{\left(\frac{900}{12}\right)(12 \times 4)^4}{(128)(1.76 \times 10^6)(47.63)} = 0.0371'' < 0.133'' \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

20.10 DISEÑO DE CIMBRAS PARA LOSAS DE PISOS Y TECHOS

Con base en los mismos principios usados para calcular los esfuerzos de flexión y cortante y las deflexiones en la sección anterior, es posible calcular los claros máximos permisibles para ciertos tamaños de revestimientos, viguetas y largueros. A modo de ilustración, se supone que va a usarse una sección rectangular para soportar una carga total uniforme de *w* lb/pie sobre tres o más claros iguales continuos. El



El sistema de tablero armadura para la formación de la cubierta. (Cortesía de Symons Corporation.)

término ℓ usado en las ecuaciones que siguen es el claro, centro a centro, de los soportes en pulgadas y f es el esfuerzo permisible de flexión.

Momento

El momento flexionante puede calcularse en plg-lb e igualarse al momento resistente, también en plg-lb. De la expresión resultante puede despejarse ℓ, el claro permisible máximo, en pulgadas.

$$M = \frac{w\ell^2}{10} \text{ en pie-lb} = \frac{w\ell^2}{120} \text{ en plg-lb}$$

$$M_{\text{res}} = fS \text{ en plg-lb}$$

Igualando y despejando ℓ

$$\frac{w\ell^2}{120} = fS$$

$$\ell = 10.95\sqrt{\frac{fS}{w}}$$

Cortante

De la misma manera, puede escribirse una expresión para el claro máximo permisible desde el punto de vista del cortante horizontal. En la expresión que sigue, H es el esfuerzo cortante permisible en libras por pulgada cuadrada, mientras que V es la fuerza cortante máxima externa aplicada al miembro a una distancia h del apoyo, supuesta previamente igual a $0.6w[\ell - (2h/12)]$.

$$H = \frac{3V}{2A} = \frac{(3)(0.6w)[\ell - (2h/12)]}{2bh}$$

El valor de ℓ usado en la expresión anterior se dio en pies; por tanto, cuando se despeja ℓ de esta expresión, debe multiplicarse por 12 para tener la respuesta en pulgadas, de modo que coincida con las unidades de las expresiones para el momento y las deflexiones.

$$\ell = 12\left(\frac{Hbh}{0.9w} + \frac{2h}{12}\right)$$

Deflexión

Si la deflexión máxima en el centro del claro se iguala a la deflexión máxima permisible, de la ecuación resultante puede despejarse ℓ. Para este caso, la deflexión máxima permisible se supone igual a $\ell/360$.

$$\delta = \frac{w\ell^4}{128EI} = \frac{(w/12)(\ell^4)}{128EI} = \frac{\ell}{360}$$

$$\ell = 1.62\sqrt[3]{\frac{EI}{w}}$$

EJEMPLO 20.2

Se desea soportar una carga uniforme total de 200 lb/pie^2 sobre una losa de piso con madera contrachapada Clase II de $\frac{3}{4}$ plg. Si las cimbras van a usarse muchas veces y la deflexión máxima permisible es $\ell/360$, determinar el claro máximo permisible (centro a centro) del revestimiento de las viguetas, considerando $f = 1\,330$ lb/plg^2 y $E = 1\,430\,000$ lb/plg^2. Desprecie el cortante en el revestimiento. Haga cálculos similares, pero considere valores del cortante para viguetas de 2×4 pulgadas espaciadas a 1 pie 6 plg entre centros y los valores $f = 1\,500$ lb/plg^2, $H = 180$ lb/plg^2 y $E = 1\,700\,000$ lb/plg^2.

SOLUCIÓN **Revestimiento**

Considerando una pieza de madera contrachapada de 12 plg de ancho (tabla 20.2)

$$S = 0.455 \text{ plg}^3, \quad I = 0.198 \text{ plg}^4$$

Momento

$$\ell = 10.95\sqrt{\frac{fS}{w}} = 10.95\sqrt{\frac{(1\,330)(0.455)}{200}} = 19.05''$$

Deflexión

$$\ell = 1.62\sqrt[3]{\frac{EI}{w}} = 1.62\sqrt[3]{\frac{(1\,430\,000)(0.198)}{200}} = \underline{\underline{18.19''}}$$

Viguetas

Propiedades de viguetas de 2×4 con dimensiones terminadas de $1\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$ (tabla 20.2)

$$A = 5.250 \text{ plg}^2, \quad I = 5.36 \text{ plg}^4, \quad S = 3.063 \text{ plg}^3$$

Carga por pie si las viguetas están separadas $1'6''$ entre centros = (1.50) (200) = 300 lb/pie

Momento

$$\ell = 10.95\sqrt{\frac{(1\,500)(3.063)}{300}} = \underline{\underline{42.85''}}$$

Cortante

$$\ell = (12)\left(\frac{Hbh}{0.9w} + \frac{2h}{12}\right) = (12)\left(\frac{180 \times 1.50 \times 3.50}{0.9 \times 300} + \frac{2 \times 3.50}{12}\right) = 49.00''$$

Deflexión

$$\ell = 1.62\sqrt[3]{\frac{1\,700\,000 \times 5.36}{300}} = 50.55'' \quad \text{RESP.: } \ell = 18 \text{ plg}$$

Para el trabajo práctico de diseño se dispone de muchas tablas que simplifican y aceleran los cálculos. Una de ellas es la tabla 20.4, que muestra las separaciones centro a centro máximas permisibles de soportes para largueros, viguetas y otras vigas continuas sobre cuatro o más soportes, para un grado particular de madera.

20.11 DISEÑO DEL APUNTALAMIENTO

Los puntales de madera se diseñan usualmente como columnas simplemente apoyadas, usando una fórmula modificada de la ecuación de Euler. Si la citada ecuación se divide entre un factor de seguridad de 3 y si r se remplaza por 0.3 veces d (dimensión lateral mínima de puntales cuadrados o rectangulares), se tiene que:

$$\frac{P}{A} = \frac{\pi^2 E}{3(\ell/0.3d)^2}$$

que es la fórmula de la *National Forest Products Association* (Asociación Nacional de Productos Forestales); de ella se obtiene:

$$\frac{P}{A} = \frac{0.3E}{(\ell/d)^2}$$

El valor ℓ/d máximo normalmente especificado es 50. Si se usa un puntal redondo, éste puede remplazarse, para fines de cálculo, por un puntal cuadrado que tenga la misma área en su sección transversal. Si un puntal está soportado lateralmente en puntos diferentes, de manera que tenga diferentes longitudes no soportadas a lo largo de sus distintas caras, será necesario calcular las razones ℓ/d en cada dirección y usar la mayor para determinar el esfuerzo permisible.

El esfuerzo permisible usado no debe ser mayor que el valor obtenido con esta ecuación, ni mayor que el esfuerzo unitario permisible en compresión paralelo al grano, para el grado y tipo de madera considerada. Si la cimbra va a usarse sólo una vez, el esfuerzo permisible en la columna puede razonablemente incrementarse 25%. El ejemplo 20.3 muestra el cálculo de la carga permisible de columna para un puntal. Existen tablas para efectuar tanto los cálculos de puntales como los de vigas y de revestimientos. Por ejemplo, la tabla 20.5 da las cargas permisibles de columnas, tal como se determinan aquí para un conjunto de puntales simples.

EJEMPLO 20.3

¿Son satisfactorios los puntales de 4 × 6 pulgadas (S4S) de 10 pies de altura y 4 pies entre centros para soportar el sistema de piso del ejemplo 20.1? Suponga que el esfuerzo de compresión permisible paralelo al grano es de 1 000 lb/plg^2 y $E = 1.70 \times 10^6$ lb/plg^2.

Tabla 20.4 Separación segura (en pulgadas) de soportes para largueros, pies derechos (u otros componentes de vigas para cimbra), continuos sobre tres o más claros. (Cortesía de American Concrete Institute.)

Carga uniforme, lb/pie lineal (igual a una carga uniforme sobre cimbras multiplicada por la separación entre largueros o pies derechos, pie)	$f = 1\,875$ lb/plg^2									$E = 1\,700\,000$ lb/plg^2				$H = 225$ lb/plg^2						
	Tamaño nominal de madera S4S																			
	2 × 4	2 × 6	2 × 8	2 × 10	2 × 12	3 × 4	3 × 6	3 × 8	3 × 10	4 × 2	4 × 4	4 × 6	4 × 8	6 × 2	6 × 4	6 × 6	6 × 8	8 × 2	8 × 8	10 × 2
100	76	111	137	164	190	90	126	156	187	43	98	138	169	50	110	154	195	55	210	60
200	59	92	115	138	160	72	106	131	157	34	80	116	142	40	92	130	164	44	177	47
300	48	75	99	125	145	62	96	118	142	30	70	105	129	35	81	117	148	38	160	41
400	41	65	86	110	133	54	84	110	132	27	63	97	120	32	74	109	138	35	149	38
500	37	58	77	98	119	48	75	99	125	24	57	89	113	29	69	103	130	32	141	35
600	33	52	69	88	107	44	69	91	116	22	52	81	107	28	65	98	124	30	134	33
700	29	46	61	78	95	40	64	84	107	20	48	75	99	26	60	94	120	29	129	31
800	27	42	55	70	86	38	59	78	100	19	45	70	93	24	56	88	116	28	125	30
900	24	38	51	65	79	36	56	74	94	18	42	66	87	23	53	83	112	26	121	29
1 000	23	36	47	60	73	33	52	69	88	17	40	63	83	21	50	79	109	25	118	28
1 100	21	33	44	56	68	31	48	64	82	16	38	60	79	20	48	75	103	24	115	27
1 200	20	32	42	53	65	29	45	60	76	16	37	57	76	20	46	72	99	23	113	25
1 300	19	30	40	50	61	27	43	56	72	15	35	55	73	19	44	69	94	22	110	24
1 400	18	29	38	48	59	26	40	53	68	14	33	52	69	18	42	67	91	21	106	24
1 500	17	27	36	46	56	24	38	51	65	13	31	49	65	18	41	64	88	20	103	23
1 600	17	26	35	44	54	23	37	48	62	13	30	47	62	17	40	62	85	19	100	22
1 700	16	26	34	43	52	22	35	46	59	12	29	45	59	16	38	61	83	19	97	21
1 800	16	25	33	42	51	22	34	45	57	12	27	43	57	16	37	59	80	18	94	21
1 900	15	24	32	40	49	21	33	43	55	11	26	41	56	16	36	57	78	18	91	20
2 000	15	23	31	39	48	20	32	42	53	11	25	40	53	15	35	56	76	17	89	20
2 100	14	23	30	38	47	19	31	40	51	10	24	38	51	15	34	54	74	17	87	19
2 200	14	22	29	37	45	19	30	39	50	10	24	37	49	14	33	52	71	17	85	19

(continúa)

Tabla 20.4 (Continuación)

Carga uniforme, lb/pie lineal (igual a una carga uniforme sobre cimbras multiplicada por la separación entre largueros o pies derechos, pie)	$f = 1\ 875$ lb/plg^2									$E = 1\ 700\ 000$ lb/plg^2							$H = 225$ lb/plg^2			
	Tamaño nominal de madera S4S																			
	2 × 4	2 × 6	2 × 8	2 × 10	2 × 12	3 × 4	3 × 6	3 × 8	3 × 10	4 × 2	4 × 4	4 × 6	4 × 8	6 × 2	6 × 4	6 × 6	6 × 8	8 × 2	8 × 8	10 × 2
2 300	14	22	29	37	44	18	29	38	49	10	23	36	48	14	32	50	69	16	83	18
2 400	14	21	28	36	44	18	28	37	47	10	22	35	46	13	31	49	66	16	81	18
2 500	13	21	27	35	43	17	27	36	46	9	22	34	45	13	30	47	63	16	80	18
2 600	13	20	27	34	42	17	27	35	45	9	21	33	44	12	29	46	61	15	78	17
2 700	13	20	27	34	41	17	26	35	44	9	20	32	43	12	28	45	60	15	77	17
2 800	13	20	26	33	41	16	26	34	43	9	20	32	42	12	28	43	59	15	75	17
2 900	12	19	26	32	40	16	25	33	42	8	20	31	41	11	27	42	58	14	73	16
3 000	12	19	25	32	39	16	25	32	41	8	19	30	40	11	26	41	56	14	71	16
3 200	12	19	25	31	38	15	24	31	40	8	18	29	38	11	25	39	54	13	68	16
3 400	12	18	24	31	37	15	23	30	39	8	18	28	37	10	24	38	51	13	65	15
3 600	11	18	24	30	37	14	22	30	38	7	17	27	36	10	23	36	49	12	62	15
3 800	11	17	23	30	36	14	22	29	37	7	17	26	34	9	22	35	48	12	59	14
4 000	11	17	23	29	35	14	21	28	36	7	16	25	33	9	21	34	46	11	57	13
4 500	10	16	22	28	34	13	20	27	34	6	15	24	31	8	20	31	43	10	53	12
5 000	10	16	21	27	33	12	19	25	32	6	14	22	30	8	18	29	40	9	49	11

Nota: los valores anteriores de los claros arriba de la línea continua están regidos por deflexión. Los valores dentro del marco con línea punteada corresponden a los claros regidos por cortante. $\Delta_{máx} = \ell/360$, pero sin exceder $\frac{1}{4}$ plg.

Tabla 20.5 Carga permisible en libras en puntales simples de madera* para madera de la resistencia indicada, con base en la longitud no soportada. (Cortesía del American Concrete Institute.)

	c, paralela al grano = 1 150 lb/plg^2		E = 1 400 000 lb/plg^2				$\frac{\ell}{d_{máx}} = 50$				$\frac{P}{A_{máx}} = \frac{0.30E}{(\ell/d)^2}$			
Tamaño nominal de la madera, pulgadas	2 × 4		3 × 4		4 × 4		4 × 2		4 × 3		4 × 6		6 × 6	
	R**	S4S**	R	S4S	R	S4S	R	S4S	R	S4S	R	S4S	R	S4S
Longitud no soportada, pies							Contraventeo requerido†							
4	2 800	2 200	10 900	10 000	15 100	15 000	6 800	6 000	10 900	10 100	23 400	22 100	36 400	34 800
5	1 800	1 400	7 700	6 400	15 100	15 000	6 800	6 000	10 900	10 100	23 400	22 100	36 400	34 800
6	1 300	1 000	5 300	4 400	14 400	12 200	6 300	5 200	10 100	8 700	21 700	19 100	36 400	34 800
7			3 900	3 300	10 300	8 900	4 600	3 800	7 400	6 400	15 900	14 000	36 400	34 800
8			3 000	2 500	7 870	6 800	3 500	2 900	5 700	4 900	12 200	10 700	36 400	34 800
9			2 400	2 000	6 200	5 400	2 800	2 300	4 500	3 900	9 700	8 500	36 200	32 900
10			1 900	1 600	5 000	4 400	2 300	1 900	3 600	3 100	7 800	6 900	29 200	26 700
11			—	—	4 200	3 600	1 900	1 500	3 000	2 600	6 500	5 700	24 100	22 100
12					3 500	3 000	1 600	1 300	2 500	2 200	5 400	4 800	20 300	18 500
13					3 000	2 600	1 300	1 100	2 200	1 800	4 600	4 100	17 300	15 800
14					2 600	2 200	1 200	1 000	1 900	1 600	4 000	3 500	14 900	13 600
15					2 200	—	1 000	—	1 600	—	3 500	—	13 000	11 900
16					—		—		—				11 400	10 400
17													10 100	9 200
18													8 000	8 200
19													8 100	7 100
20													7 300	6 700

*Calculada a las 100 lb más cercanas.

**R indica madera burda; S4S indica madera terminada en los cuatro lados.

†La dimensión usada para determinar ℓ/d es la mostrada primero en la columna de tamaños. Cuando ésta es la dimensión mayor, la columna debe contraventearse en la otra dirección, de manera que ℓ/d sea igual o menor que la usada para determinar las cargas mostradas. Para piezas de 4 × 2, el contraventeo en el plano de la dimensión de 2 plg debe estar a intervalos no mayores que 0.4 veces la longitud no soportada. Para piezas de 4 × 3, el contraventeo en el plano de la dimensión de 3 plg debe estar a intervalos no mayores que 0.7 veces la longitud no soportada.

Table 20.5 (Continuación)

c, paralela al grano = 1 100 lb/plg^2 E = 1 600 000 lb/plg^2 $\dfrac{\ell}{d_{máx}} = 50$ $\dfrac{P}{A_{máx}} = \dfrac{0.30E}{(\ell/d)^2}$

Tamaño nominal de la madera, pulgadas	2 × 4		3 × 4		4 × 4		4 × 2		4 × 3		4 × 6		6 × 6	
	R**	S4S**	R	S4S	R	S4S	R	S4S	R	S4S	R	S4S	R	S4S
Longitud no soportada, pies							Contraventeo requerido†							
4	3 200	2 500	9 500	8 700	13 100	12 200	5 900	5 200	9 500	8 700	20 400	19 200	31 600	30 200
5	2 100	1 600	8 700	7 300	13 100	12 200	5 900	5 200	9 500	8 700	20 400	19 200	31 600	30 200
6	1 400	1 100	6 100	5 100	13 100	12 200	5 900	5 200	9 500	8 700	20 400	19 200	31 600	30 200
7	—	—	4 500	3 700	11 700	10 200	5 300	4 400	8 500	7 300	18 200	16 000	31 600	30 200
8			3 400	2 800	9 000	7 800	4 000	3 300	6 500	5 600	13 900	12 300	31 600	30 200
9			2 700	2 200	7 100	6 200	3 200	2 600	5 100	4 400	11 000	9 700	31 600	30 200
10			2 200	1 800	5 800	5 000	2 600	2 100	4 200	3 600	8 900	7 900	31 600	30 200
11			—	—	4 800	4 100	2 100	1 800	3 400	2 900	7 400	6 500	27 600	25 200
12					4 000	3 500	1 800	1 500	2 900	2 500	6 200	5 500	23 200	21 200
13					3 400	3 000	1 500	1 300	2 500	2 100	5 300	4 600	19 700	18 000
14					2 900	2 500	1 300	1 100	2 100	1 800	4 600	4 000	17 000	15 600
15					2 600	—	1 100	—	1 800	—	4 000	—	14 800	13 600
16					—		—		—		—		13 000	11 900
17													11 500	10 500
18													10 300	9 400
19													9 200	8 400
20													8 300	7 600

*Calculada a las 100 lb más cercanas.

**R indica madera burda; S4S indica madera terminada en los cuatro lados.

†La dimensión usada para determinar ℓ/d es la mostrada primero en la columna de tamaños. Cuando ésta es la dimensión mayor, la columna debe contraventearse en la otra dirección, de manera que ℓ/d sea igual o menor que la usada para determinar las cargas mostradas. Para piezas de 4 × 2, el contraventeo en el plano de la dimensión de 2 plg debe estar a intervalos no mayores que 0.4 veces la longitud no soportada. Para piezas de 4 × 3, el contraventeo en el plano de la dimensión de 3 plg debe estar a intervalos no mayores que 0.7 veces la longitud no soportada.

(continúa)

Tabla 20.5 (Continuación)

c paralela al grano = 1 100 lb/plg^2 E = 1 700 000 lb/plg^2 $\frac{\ell}{d_{máx}} = 50$ $\frac{P}{A_{máx}} = \frac{0{:}30E}{(\ell/d)^2}$

Tamaño nominal de la madera pulgadas	2 × 4		3 × 4		4 × 4		4 × 2		4 × 3		4 × 6		6 × 6	
	R**	S4S**	R	S4S	R	S4S	R	S4S	R	S4S	R	S4S	R	S4S
Longitud no soportada pies							Contraventeo requerido†							
4	3 400	2 600	9 500	8 800	13 100	12 300	5 900	5 300	9 500	8 800	20 400	19 200	31 600	30 200
5	2 200	1 700	9 300	7 700	13 100	12 300	5 900	5 300	9 500	8 800	20 400	19 200	31 600	30 200
6	1 500	1 200	6 500	5 400	13 100	12 300	5 900	5 300	9 500	8 800	20 400	19 200	31 600	30 200
7	—	—	4 700	4 000	12 500	10 800	5 600	4 600	9 000	7 700	19 400	17 000	31 600	30 200
8			3 600	3 000	9 600	8 300	4 300	3 600	6 900	5 900	14 800	13 100	31 600	30 200
9			2 900	2 400	7 600	6 600	3 400	2 800	5 500	4 700	11 700	10 300	31 600	30 200
10			2 300	1 900	6 100	5 300	2 700	2 300	4 400	3 800	9 500	8 400	31 600	30 200
11			—	—	5 100	4 400	2 300	1 900	3 700	3 100	7 900	6 900	29 300	28 000
12					4 200	3 700	1 900	1 600	3 100	2 600	6 600	5 800	24 600	22 500
13					3 600	3 100	1 600	1 300	2 600	2 200	5 600	4 900	21 000	19 200
14					3 100	2 700	1 400	1 200	2 300	1 900	4 800	4 300	18 100	16 500
15					2 700	—	1 200	—	2 000	—	4 200	—	15 800	14 400
16					—		—		—		—		13 800	12 600
17													12 300	11 200
18													10 900	10 000
19													9 800	9 000
20													8 900	8 100

*Calculada a las 100 lb más cercanas.

**R indica madera burda; S4S indica madera terminada en los cuatro lados.

†La dimensión usada para determinar ℓ/d es la mostrada primero en la columna de tamaños. Cuando ésta es la dimensión mayor, la columna debe contraventearse en la otra dirección, de manera que ℓ/d sea igual o menor que la usada para determinar las cargas mostradas. Para piezas de 4 × 2, el contraventeo en el plano de la dimensión de 2 plg debe estar a intervalos no mayores que 0.4 veces la longitud no soportada. Para piezas de 4 × 3, el contraventeo en el plano de la dimensión de 3 plg debe estar a intervalos no mayores que 0.7 veces la longitud no soportada.

SOLUCIÓN **Usando puntales de 4 × 6 (dimensiones cepilladas $3\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2}$, A = 19.250 plg²)**

$$\text{Carga aplicada en cada piso } = (4)(4)(225) = 3\,600 \text{ lb}$$

$$\frac{\ell}{d} = \frac{(12)(10)}{3.5} = 34.29 < 50 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\frac{P}{A} \text{ permisible} = \frac{(0.3)(1.70 \times 10^6)}{(34.29)^2} = 434 \text{ lb/plg}^2 < 1\,000 \text{ lb/plg}^2 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$P \text{ permisible} = (434)(19.250) = 8\,354 > 3\,600 \text{ lb} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Los puntales de madera pueden consistir en diferentes piezas clavadas o atornilladas entre sí para formar columnas o puntales compuestos de mayor tamaño. A tales miembros se les asignan esfuerzos permisibles menores que a los que están formados por miembros de una sola pieza o redondos. Estos puntales compuestos pueden ser columnas separadas que consisten en dos piezas de madera con bloques separadores entre ellas.

Los puntales separados son muy importantes en la cimbra, debido a factores económicos. Los troncos pueden aserrase en material de 2 × (2 × 4, 2 × 6, etc.). El costo de las piezas mayores, como las 4 ×, 6 ×, etc., no se refleja en un uso eficiente de los troncos y su precio resulta considerablemente mayor. Como resultado, frecuentemente se usan puntales espaciados. Los esfuerzos permisibles, las relaciones máximas ℓ/d y otros factores, son algo diferentes en los puntales simples.

Existen algunos sistemas de apuntalamiento ajustable. El tipo más sencillo se fabrica traslapando dos miembros de madera. Los trabajadores usan un mecanismo portátil de gateo para hacer los ajustes verticales. Existen diferentes tipos de ferretería para unir los puntales a los largueros usando una cantidad mínima de clavos. Otro tipo de puntal ajustable consiste en piezas de madera combinadas con una columna de acero y una especie de gato (*jack*). Algunos fabricantes producen únicamente puntales de metal, llamados *puntales ajustables con gato,* que se ajustan a alturas de 4 a 16 pies.[4]

20.12 ESFUERZOS DE APLASTAMIENTO O APOYO

Los esfuerzos de apoyo o aplastamiento producidos cuando un miembro descansa sobre otro pueden ser críticos en el diseño de cimbras. Estos esfuerzos deben revisarse cuidadosamente donde las viguetas se apoyan sobre los largueros, donde éstos se apoyan en los puntales y donde los pies derechos se apoyan en los cepos, así como donde los tirantes se apoyan sobre los cepos a través de ménsulas o arandelas. En cada uno de los casos mencionados, las fuerzas de apoyo aplicadas a los miembros horizontales de madera generan esfuerzos de compresión perpendiculares al grano. Los esfuerzos permisibles de compresión perpendiculares al grano son mucho menores que los esfuerzos de compresión paralelos al grano y, de hecho, suelen ser menores que los esfuerzos permisibles de compresión en puntales determinados con la fórmula de la *National Forest Products Association*.

Como primera ilustración, consideraremos los esfuerzos de apoyo en largueros al descansar éstos en puntales. Un detalle particular que debe observarse es que el área de apoyo puede ser menor que el área total de la sección transversal del puntal. Por ejemplo, en los ejemplos 20.1 y 20.3, los largueros de 2 × 8 pulgadas están soportados por puntales de 4 × 6 pulgadas, como se muestra en la figura 20.6. Está claro que el área de apoyo no es igual al área total de las sección transversal de 4 × 6 (3.50 × 5.50 = 19.25 plg²), sino que es igual a la menor área sombreada (1.50 × 5.50 = 8.25 plg²).

---

[4]Hurd, M.K., 1989, *Formwork for Concrete*, 5a. ed. (Detroit: American Concrete Institute), págs. 68-69.

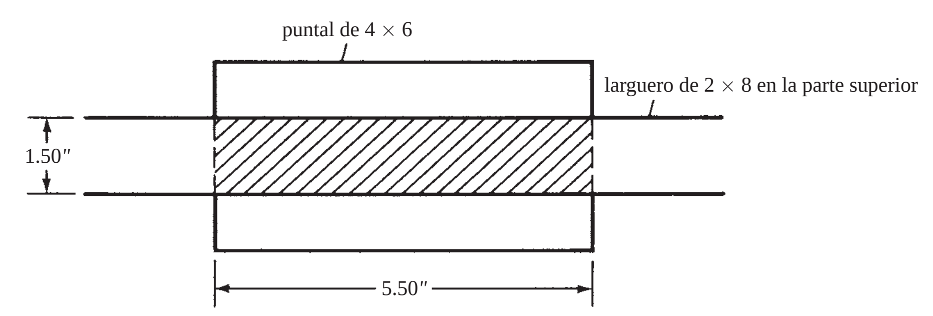


Figura 20.6

El esfuerzo de apoyo puede calcularse dividendo la carga total que se aplica al puntal (3 600 lb en el ejemplo 20.3) entre el área sombreada de la figura 20.6.

$$\text{Esfuerzo de apoyo} = \frac{3\ 600}{8.25} = 436 \text{ lb/plg}^2$$

De la tabla 20.3, el esfuerzo permisible de apoyo perpendicular al grano en el larguero es de 490 lb/plg² para la madera de pino Douglas, construcción tipo costero, usada en los ejemplos de este capítulo. Los valores dados en esta tabla para la compresión perpendicular al grano son en realidad aplicables al apoyo distribuido sobre cualquier longitud en el extremo de un miembro y para el apoyo en una longitud de 6 plg o mayor en posiciones interiores.

Si el apoyo está localizado a más de 3 plg del extremo de una viga y es menor que 6 plg en longitud, los esfuerzos permisibles de compresión perpendicular al grano pueden incrementarse con seguridad al multiplicarlos por el siguiente factor, en donde ℓ es la longitud del apoyo medido a lo largo del grano. Si la zona de apoyo es circular, como en el caso de una arandela, la longitud del apoyo se considera igual al diámetro del círculo.

$$\text{Multiplicador} = \frac{\ell + \frac{3}{8}}{1}$$

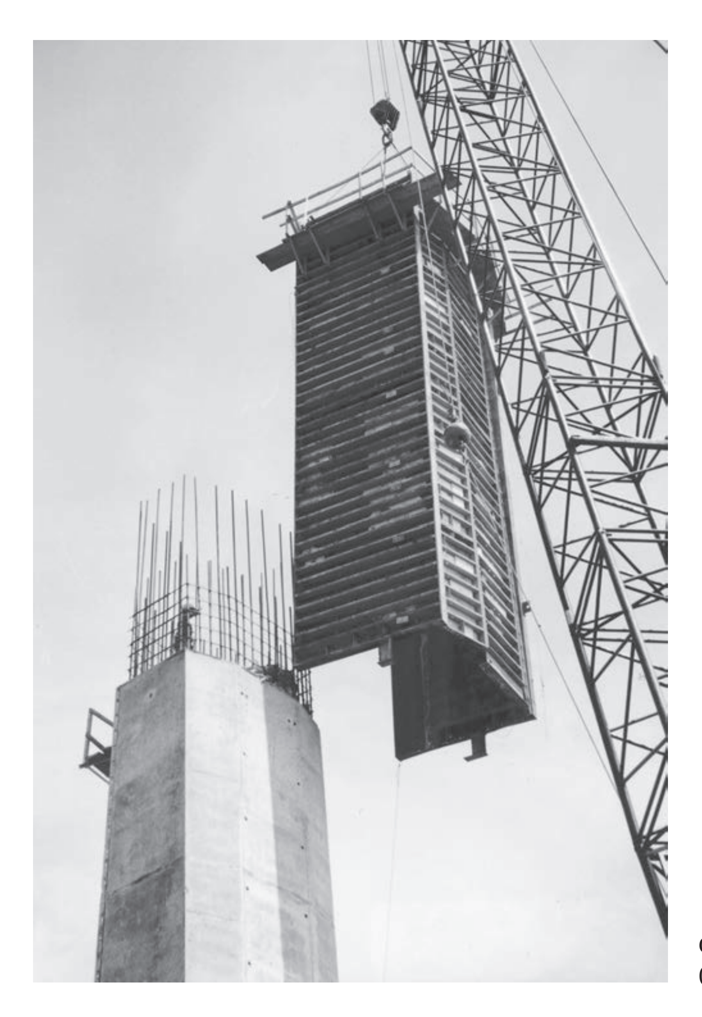
Si el puntal recibe al larguero en una región interior de éste en la figura 20.6, el esfuerzo permisible de compresión perpendicular al grano es igual a

$$\left(\frac{\ell + \frac{3}{8}}{\ell}\right)(490) = \left(\frac{5.50 + 0.375}{5.50}\right)(490) = 523 \text{ lb/plg}^2 > 436 \text{ lb/plg}^2 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Si el esfuerzo de apoyo calculado excede el esfuerzo permisible, es necesario ampliar la zona de apoyo de la carga usando miembros mayores o usando una placa de apoyo sobre el puntal.[5]

Otro caso de determinación del esfuerzo de apoyo se presenta en el ejemplo 20.4, donde se considera el esfuerzo de apoyo causado en los cepos de una cimbra de muro por los tirantes de la cimbra.

[5]Hurd, *Formwork for Concrete*, págs. 88-93.



Cimbra para pilares, Steamboat Rock, Iowa. (Cortesía de EFCO.)

EJEMPLO 20.4

Los tirantes para la cimbra de un muro están sometidos a una fuerza de 5 000 lb generada por el concreto fresco dentro de la cimbra. La carga se transmite a cepos dobles de 2 × 4 pulgadas a través de arandelas de 3½ pulgadas, como se muestra en la figura 20.7. ¿Son los esfuerzos calculados de apoyo menores que los permisibles, si los cepos están hechos con madera de pino Douglas, construcción tipo costa y considerando que las zonas de apoyo están en regiones interiores de los cepos?

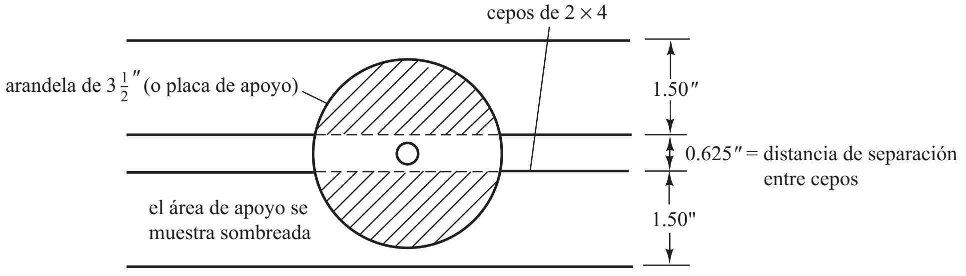


Figura 20.7

SOLUCIÓN

$$\text{Área de apoyo} = \frac{(\pi)(3.50)^2}{4} - (0.625)(3.50)$$

$$= 7.43 \text{ plg}^2$$

$$\text{Esfuerzo de apoyo} = \frac{5\,000}{7.43} = 673 \text{ lb/plg}^2$$

$$\text{Compresión permisible perpendicular al grano} = \left(\frac{\ell + \frac{3}{8}}{\ell}\right)(490)$$

$$= \left(\frac{3.50 + 0.375}{3.50}\right)(490)$$

$$= 543 \text{ lb/plg}^2 < 673 \text{ lb/plg}^2$$ No satisfactoria

Hay que usar arandelas mayores o menor espacio entre los tirantes, porque el esfuerzo permisible de apoyo no es satisfactorio.

20.13 DISEÑO DE CIMBRAS PARA MUROS

En la sección 20.8 se analizaron las presiones laterales sobre las cimbras de muros y de columnas. Estas presiones varían desde un mínimo en la parte superior a un máximo en el fondo del concreto semilíquido. En ocasiones, esta presión variable se toma en cuenta en el diseño, pero casi siempre es más práctico considerar que la presión máxima actúa sobre toda la altura. Por conveniencia durante la construcción, el revestimiento, los pies derechos, los cepos y tirantes se mantienen usualmente del mismo tamaño y con la misma separación sobre toda la altura de un muro, así como los cepos y tirantes. Por tanto, se suponen de hecho presiones uniformes máximas.

El revestimiento y los pies derechos para un muro se diseñan como el revestimiento y las viguetas para losas de pisos y techos. Además, los cepos se diseñan como los largueros para losas, con los claros considerados como las separaciones centro a centro entre tirantes.

Si los cepos se colocan en ambos lados, los tirantes pasan a través de la cimbra y se unen a los cepos en cada lado, como se ilustra en la figura 20.2. La fuerza de tensión aplicada a cada tirante depende entonces de la presión del concreto líquido y de las separaciones horizontales y verticales de los tirantes. Si la separación entre tirantes para un cierto muro es de 2 pies verticalmente y de 3 pies horizontalmente y la presión calculada en el muro es de 800 lb/pie^2, la fuerza de tensión total en cada tirante es igual a $2 \times 3 \times 800 = 4\,800$ lb, suponiendo una presión uniforme.

Si el concreto se cuela a 50 °F con una rapidez de 4 pie/h en un muro de 12 pies de altura, la presión lateral del concreto semilíquido puede calcularse con la expresión del ACI como sigue:

$$p = 150 + \frac{9\,000R}{T} = 150 + \frac{(9\,000)(4)}{50} = 870 \text{ lb/pie}^2$$

El diagrama de presión resultante para el muro sería como se muestra en la figura 20.8.

Suponiendo una presión uniforme de 870 lb/pie^2, la separación de los pies derechos podría escogerse igual a la de las viguetas para la cimbra de la losa de piso. El ejemplo 20.5 muestra el procedimiento de diseño para el revestimiento, los pies derechos, los cepos y tirantes en la cimbra de un muro.

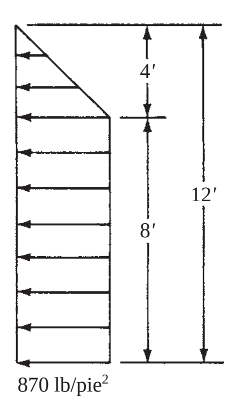


Figura 20.8

EJEMPLO 20.5

Diseñar la cimbra para un muro de concreto de 12 pies de altura, en donde el concreto se verterá a una velocidad de 4 pies/h y a una temperatura de 50 °F (véase la figura 20.8). Usar los siguientes datos:

1. Revestimiento de madera contrachapada Clase I de $\frac{3}{4}$ plg; $f = 1\,930$ lb/plg^2 y $E = 1\,650\,000$ lb/plg^2.
2. Pies derechos y cepos hechos de pino Douglas, construcción tipo costa; $f = 1\,875$ lb/plg^2, $H = 180$ lb/plg^2 y $E = 1\,760\,000$ lb/plg^2. Compresión permisible perpendicular al grano = 490 lb/plg^2.
3. Los tirantes pueden tomar 5 000 lb cada uno y sus arandelas son del mismo tamaño que las mostradas en la figura 20.7.
4. Se usarán cepos dobles para evitar taladrar los tirantes.
5. La deflexión máxima en cualquier elemento de la cimbra deberá ser de $\frac{1}{360}$ del claro.

SOLUCIÓN **Diseño del revestimiento**

Propiedades de una pieza de madera contrachapada de $\frac{3}{4}''$ con 12 plg de ancho de la tabla 20.2.

$$S = 0.455 \text{ plg}^3, \quad I = 0.199 \text{ plg}^4$$

$$\text{Carga} = 870 \text{ lb/pie}$$

Momento

$$\ell = 10.95\sqrt{\frac{fS}{w}} = 10.95\sqrt{\frac{(1\,930)(0.455)}{870}} = \underline{\underline{11.00''}}$$

Deflexión

$$\ell = 1.62\sqrt[3]{\frac{EI}{w}} = 1.62\sqrt[3]{\frac{(1\,650\,000)(0.199)}{870}} = 11.71''$$

Use pies derechos a 0′11″ entre centros

Diseño de los pies derechos (separados a 0 pies 11 plg entre centros)

Suponiendo pies derechos de $2 \times 4\left(1\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}\right)$, de la tabla 20.1

$$I = 5.36 \text{ plg}^4, \quad S = 3.06 \text{ plg}^3$$

$$\text{Carga} = \left(\frac{11}{12}\right)(870) = 797.5 \text{ lb/pie}$$

Momento

$$\ell = 10.95\sqrt{\frac{(1\,875)(3.06)}{797.5}} = 29.37''$$

Deflexión

$$\ell = 1.62\sqrt[3]{\frac{(1\,760\,000)(5.36)}{797.5}} = 36.91''$$

Cortante

$$\ell = 12\left(\frac{Hbh}{0.9w} + \frac{2h}{12}\right) = (12)\left(\frac{180 \times 1.50 \times 3.50}{0.9 \times 797.5} + \frac{2 \times 3.50}{12}\right)$$

$$= \underline{\underline{22.80''}} \qquad \underline{\underline{\text{Usar } 1'10'' \text{ como separación entre centros de cepos}}}$$

$$\text{Carga sobre los cepos} = \left(\frac{22}{12}\right)(870) = 1\,595 \text{ lb/pie}$$

$$\text{Separación máxima de los tirantes} = \frac{5\,000}{1\,595} = 3.13'$$

Diseño de los cepos

Se consideran dos cepos de 2 × 4 ($I = 2 \times 5.36 \times 10.72$ plg^4, $S = 2 \times 3.06 = 6.12$ plg^3)

Momento

$$\ell = 10.95\sqrt{\frac{(1\,875)(6.12)}{1\,595}} = 29.37''$$

Deflexión

$$\ell = 1.62\sqrt[3]{\frac{(1\,760\,000)(6.12)}{1\,595}} = 30.62''$$

Cortante

$$\ell = (12)\left(\frac{180 \times 3.00 \times 3.50}{0.9 \times 1595} + \frac{2 \times 3.50}{12}\right) = 22.80''\leftarrow$$

$$\underline{\underline{\text{Usar tirantes en cada tercer pie derecho a } 1'10'' \text{ entre centros}}}$$

Revisión del apoyo entre pies derechos y cepos

$$\text{Máxima carga transferida} = \frac{(22)(11)}{144}(870) = 1\,462 \text{ lb}$$

$$\text{Área de apoyo (véase la figura 20.9)} = (2)(1.50)(1.50) = 4.50 \text{ plg}^2$$

$$\text{Esfuerzo de apoyo} = \frac{1\,462}{4.50} = 325 \text{ lb/plg}^2 < 490 \text{ lb/plg}^2 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Revisión del apoyo entre tirantes y cuñas

Se suponen las mismas dimensiones que en la figura 20.7

$$\text{Carga de apoyo} = \frac{(22)(22)}{144}(870) = 2\,924 \text{ lb}$$

$$\text{Esfuerzo de apoyo} = \frac{2924}{7.43} = 394 \text{ lb/plg}^2 < 543 \text{ lb/plg}^2$$

como se determinó en el ejemplo 20.4 OK

Referencias seleccionadas para cimbras:

1. Chen, W.F. y Mosallam, K.H., 1991, *Concrete Buildings, Analysis for Safe Construction* (Boca Raton, FL: CRC Press).
2. *Concrete Forming*, 1988 (Tacoma, WA: American Plywood Association).
3. Hurd, M.K., 1989, *Formwork to Concrete*, 5a. ed. (Detroit: American Concrete Institute).
4. Moore, C.E., 1977, *Concrete Form Construction* (Nueva York: Van Nostrand Reinhold).
5. *Plywood Design Specification* (Tacoma, WA: American Plywood Association).

PROBLEMAS

20.1 Repita el ejemplo 20.1 si las viguetas están separadas entre sí a 1 pie 6 plg entre centros, los largueros a 6 pies 0 plg entre centros como los puntales y la carga viva es de 100 lb/pie^2. (*Resp.:* el revestimiento y las viguetas son satisfactorios, pero no los largueros, tanto por flexión como por cortante y deflexión.)

20.2 Repita el ejemplo 20.1 si se usa revestimiento de madera contrachapada Clase II de $1\frac{1}{8}$ plg, viguetas de 2 × 8 separadas 2 pies 0 plg entre centros y largueros de 2 × 8 separados 6 pies 0 plg entre centros.

20.3 Se quiere soportar una carga uniforme total de 150 lb/pie^2 para una losa de piso con madera contrachapada Clase I de $\frac{5}{8}$ plg. Si la cimbra va a usarse varias veces y la deflexión máxima permisible es $\ell/360$, determine el claro máximo permisible del revestimiento entre centros de las viguetas, si $f = 1\,930$ lb/plg^2 y $E = 1\,650\,000$ lb/plg^2. No tome en cuenta el cortante en el revestimiento. Haga cálculos similares, pero considere valores del cortante para viguetas de 2 × 4 (S4S) separadas 1 pie 6 plg entre centros si $f = 1\,815$ lb/plg^2, $H = 180$ lb/plg^2 y $E = 1\,760\,000$ lb/plg^2. (*Resp.:* revestimiento 18.25″, viguetas 54.40″.)

20.4 Repita el problema 20.3 usando madera contrachapada Clase I estructural de $\frac{3}{4}$″.

20.5 Repita el problema 20.3 si se usa madera contrachapada Clase II de 1 plg con $f = 1\,330$ lb/plg^2. Suponga que las viguetas están separadas a 2 pies 0 plg entre centros. (*Resp.:* revestimiento 27.00″, viguetas 47.11″.)

20.6 ¿Es satisfactorio un puntal de 4 × 4 plg (S4S) de 10 pies de longitud para soportar una carga de compresión axial de 4 000 lb si el esfuerzo permisible de compresión paralelo al grano es de 1 150 lb/plg^2 y $E = 1\,400\,000$ lb/plg^2?

20.7 Repita el problema 20.6 si se usan puntales de 6 × 6 pulgadas hechos con madera burda de 14 pies de longitud, para soportar cada uno una carga axial de compresión de 16 000 lb. (*Resp.:* $P = 14\,893$ lb < 16 000 lb, no son satisfactorios.)

20.8 Diseñe la cimbra para un muro de concreto de 15 pies de altura, donde el concreto será colado a razón de 5 pie/h a una temperatura de 70 °F. Use los siguientes datos:

1. Revestimiento de $\frac{3}{4}$ plg de madera contrachapada Clase II, $f = 1\,330$ lb/plg^2 y $E = 1\,430\,000$ lb/plg^2.
2. Los pies derechos y cepos serán de pino Douglas, construcción costera, $f = 2\,000$ lb/plg^2, $H = 180$ lb/plg^2 y $E = 1\,600\,000$ lb/plg^2. Compresión permisible perpendicular al grano = 435 lb/plg^2.
3. Los tirantes pueden tomar 5 000 lb cada uno y las arandelas son del mismo tamaño que las mostradas en la figura 20.7.
4. Se usarán capos dobles a fin de evitar taladrar para los tirantes.
5. La deflexión máxima en cualquier parte de la cimbra debe ser $\frac{1}{360}$ del claro.

21

Diseño sísmico de las estructuras de concreto reforzado

21.1 INTRODUCCIÓN

El diseño sísmico de las estructuras de concreto reforzado es un tema que fácilmente podría llenar un libro de texto completo. Muchas organizaciones están dedicadas a estudiar la respuesta de un terremoto y al diseño de las estructuras. Cada terremoto nos enseña nuevas lecciones y continuamente refinamos nuestros requisitos del código basándonos en estas lecciones.

Los terremotos producen movimientos del suelo horizontales y verticales que sacuden la base de una estructura. Debido a que el movimiento del resto de la estructura es resistido por la masa de la estructura (inercia), el sacudimiento del suelo crea deformaciones en la estructura y estas deformaciones producen fuerzas en la estructura. Los movimientos del terremoto producen cargas sísmicas en las estructuras, aun aquellas que no son parte del sistema resistente a las cargas laterales. Estas fuerzas pueden ser horizontales y verticales y pueden someter a los elementos estructurales a fuerzas axiales, momentos y fuerzas cortantes cuyas magnitudes dependen de muchas de las propiedades de la estructura, tales como su masa, su rigidez y su ductilidad. También es importante el periodo de vibración de la estructura (el tiempo que toma a la estructura vibrar en sentido lateral en ambos sentidos). En este capítulo, el diseño sísmico de las estructuras de concreto reforzado se enfoca desde el punto de vista de la aplicación del código. Se aborda el cálculo de las fuerzas del diseño sísmico; se explica el diseño de los elementos y el detallado de estas fuerzas; y se suministran ejemplos.

El diseño sísmico de las estructuras de concreto reforzado es abordado por las disposiciones generales de diseño del ACI 318 y también por las disposiciones especiales de diseño sísmico del capítulo 21 del ASCI 138. Las estructuras de concreto reforzado diseñadas y detalladas de acuerdo con el ACI 318 están pensadas para resistir terremotos sin colapso estructural. En términos generales, la intensidad de un terremoto depende de las aceleraciones, velocidades y desplazamientos del movimiento del suelo que aquél produce. Las cargas de diseño sísmico están prescritas en *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures* (ASCE/SEI 7-05).[1] En ese documento, la severidad del movimiento del terremoto de diseño para una estructura de concreto se describe en términos de la *categoría de diseño sísmico* de la estructura (SDC: *Seismic Design Category*), que depende de la ubicación geográfica de la estructura y también del suelo sobre el cual está construida. Las estructuras asignadas a la categoría de diseño sísmico más baja, SDC A, deben cumplir solamente las disposiciones generales de diseño del ACI 318 y no tienen que cumplir los requisitos especiales del capítulo 21. Sin embargo, las estructuras asignadas a SDC mayores (B, C, D, E o F) tienen demandas sísmicas crecientes y deben cumplir los requisitos del capítulo 21, los cuales aumentan su severidad con un mayor SDC. Para esas categorías de diseño sísmico más altas, los requisitos del capítulo 21 del ACI 318 se basan en la hipótesis de que una estructura de concreto reforzado responde inelásticamente. El comportamiento inelástico se caracteriza por la fluencia

[1]American Society of Civil Engineers, *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*, capítulos 11-23, Reston, Virginia.

del acero de refuerzo como se describe en la sección 3.6 de este libro. Los miembros estructurales cuyo acero de refuerzo fluye pueden disipar algo de la energía impartida a la estructura por un terremoto y las fuerzas que se desarrollan en estos miembro durante un terremoto son menores que lo que serían si la estructura respondiera elásticamente. Las categorías de diseño sísmico se estudian con más detalle en la sección 21.5 de este libro. Por ahora, continuemos con el estudio de los pasos fundamentales del diseño sísmico de acuerdo con las disposiciones de carga del ASCE7-05 y las disposiciones del diseño de los elementos y de detallado del capítulo 21 del ACI 318-08.

21.2 TERREMOTO MÁXIMO CONSIDERADO

Las áreas con un alto riesgo de movimiento del suelo importante, tal como la costa oeste de Estados Unidos, tienen el nivel más alto de riego sísmico. Sin embargo, la mayoría de las áreas de Estados Unidos tiene cuando menos algún nivel de riesgo sísmico. Una gran parte de ASCE 7-05 está dedicada a determinar las fuerzas de diseño sísmico. Estas fuerzas se basan en el “terremoto máximo considerado” (MCE: Maximum Considered Earthquake), el cual es un terremoto extremo, que se considera que ocurre sólo una vez cada 2 500 años. La severidad de la sacudida del suelo al nivel de MCE se describe en términos de los parámetros de aceleración de la respuesta espectral S_S y S_1, cuyos valores se dan en mapas de curvas de isovalores suministrados con el ASCE 7 y también están disponibles en el sitio de la Red del Servicio Geológico de Estados Unidos (USGS: United Estates Geological Survey) (www.usgs.gov.). El parámetro S_S es una medida de la intensidad con que el MCE afecta a las estructuras con un periodo corto (0.2 seg). El parámetro S_1 es una medida de la intensidad con que el MCE afecta a las estructuras con un periodo más largo (1 seg). A éstos se les llama “parámetros de respuesta espectral” y sus valores se proporcionan en las figuras 22-1 a 22-14 del ASCE/SEI 7-05.[2] Si S_1 es menor que o igual a 0.04 y S_S es menor que o igual a 0.15, a la estructura se le asigna un valor de SDC A. Los valores más altos de S_1 y S_S corresponden a categorías de diseño sísmico sucesivamente mayores. S_S y S_1 son proporciones o razones de gravedad. Por ejemplo, en partes de California del sur, el valor de S_S puede ser 1.0 (100% de la aceleración de la gravedad), mientras que en partes del oeste medio puede ser solamente un cierto porcentaje.

21.3 CLASIFICACIÓN DE SUELO EN EL SITIO

Los parámetros de respuesta espectral determinados anteriormente se modifican basándose en la *clase de suelo en el sitio* de la estructura. El suelo en el sitio se clasifica como clase A de suelo en el sitio hasta F de acuerdo con la tabla 20.3-1 y la sección 20.3 del ASCE/SEI 7, usando solamente la capa superior de 100 pies del perfil del sitio. La clase de suelo en el sito más baja, la clase A del sitio (roca dura), da una fuerza de diseño sísmico relativamente baja. Las clases más altas de suelo en el sitio dan fuerzas de diseño sísmico más altas. Si no se dispone de estos datos específicos del sitio, el ASCE/SEI 7 permite que el profesional de diseño que está registrado y que está preparando el reporte de investigación del suelo estime las propiedades del suelo a partir de las condiciones geológicas conocidas. Si las propiedades del suelo no se conocen lo suficiente, se usa la clase D del sitio, a menos que la autoridad que tenga jurisdicción o los datos geotécnicos determinen que la clase E o F del sitio es la apropiada. Una vez que se asigna la clase de suelo en el sitio, se determinan los correspondientes coeficientes del sitio para periodos cortos y largos, F_a y F_v, respectivamente, usando la tabla 21.1 y los valores de S_S y S_1 como se describió anteriormente.

Aceleraciones de la respuesta espectral del MCE y aceleraciones de respuesta de diseño

Las aceleraciones de la respuesta espectral del MCE (relacionadas con las fuerzas de diseño) para periodos cortos (S_{MS}) y para periodos más largos ($1 - s$) (S_{M1}) se obtienen multiplicando cada parámetro de

[2] ASCE/SEI 7-05, págs. 210-227.

Tabla 21.1 Parámetros de la aceleración de la respuesta espectral del terremoto máximos considerado.

Clase del sitio	Parámetro cartografiado de la aceleración de la respuesta espectral del terremoto máximo considerado para periodos cortos				
	$S_S \leq 0.25$	$S_S = 0.5$	$S_S = 0.75$	$S_S = 1.0$	$S_S = 1.25$
A	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
B	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
C	1.2	1.2	1.1	1.0	1.0
D	1.6	1.4	1.2	1.1	1.0
E	2.5	1.7	1.2	0.9	0.9
F	Debe realizarse un análisis de respuesta del sitio (véase la sección 11.4.7, ASCI/ACI 7-05).				

Nota: Use interpolación lineal para los valores intermedios de S_S.

a) El coeficiente del sitio, F_a, basado en la clase del sitio y en el parámetro cartografiado de la aceleración de la respuesta espectral del terremoto máximo considerado para periodos cortos (de ASCE/SEI 7-05,[1] American Society of Civil Engineers/ Structural Engineers Institute, Cargas mínimas de diseño para edificios y otras estructuras. ASCE 7-05 (Reston, VA: American Society of Civil Engineers) tabla 11.4-1, coeficiente del sitio, F_a).

Clase del sitio	Parámetro cartografiado de la aceleración de la respuesta espectral del terremoto máximo considerado para periodos de 1 segundo				
	$S_S \leq 0.1$	$S_S = 0.2$	$S_S = 0.3$	$S_S = 0.4$	$S_S = 0.5$
A	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
B	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
C	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3
D	2.4	2.0	1.8	1.6	1.5
E	3.5	3.2	2.8	2.4	2.4
F	Debe realizarse un análisis de respuesta del sitio (véase la sección 11.4.7, ASCI/ACI 7-05).				

Nota: Use interpolación lineal para los valores intermedios de S_1.

b) Parámetro cartografiado de la aceleración de la respuesta espectral del terremoto máximo considerado para periodos de 1 segundo (de ASCE/SEI 7-05,[1] American Society of Civil Engineers/Structural Engineers Institute, Cargas mínimas de diseño para edificios y otras estructuras. ASCE 7-05 (Reston, VA: American Society of Civil Engineers) tabla 11.4-2, coeficiente del sitio, F_v).

aceleración de respuesta espectral (S_S y S_1) por su correspondiente coeficiente de sitio:

$$S_{MS} = F_a S_s \qquad \text{(Ecuación 11.4-1, ASCE/SEI)}$$

$$S_{M1} = F_v S_1 \qquad \text{(Ecuación 11.4-2, ASCE/SEI)}$$

Los coeficientes de sitio pueden ser tan altos como 2.5 para S_S y tan altos como 3.5 para S_1 (clase E de sitio). Si el proyectista usa el valor por omisión de clase D de sitio en vez de una clase de sitio más baja para evitar el gasto de un reporte de suelos, las fuerzas requeridas de diseño sísmico pueden aumentar significativamente.

Las fuerzas de diseño se basan en un terremoto de diseño (menos severo que el terremoto máximo considerado, considerando que ocurre sólo una vez cada 500 años). Los parámetros de aceleración del espectro de diseño, S_{DS} y S_{D1}, se obtienen multiplicando los valores de S_{MS} y S_{M1} por 2/3:

$$S_{DS} = \frac{2}{3} S_{MS} \qquad \text{(Ecuación 11.4-3, ASCE/SEI)}$$

$$S_{D1} = \frac{2}{3} S_{M1} \qquad \text{(Ecuación 11.4-4, ASCE/SEI)}$$

21.4 FACTORES DE OCUPACIÓN Y DE IMPORTANCIA

La ocupación de un edificio es una consideración importante al determinar su SDC. Un cobertizo de un agua en una granja es obviamente menos importante que un hospital, una estación de bomberos o una estación de policía. El capítulo 1 del ASCE/SEI 7 lista cuatro categorías de ocupación en la tabla 1.1. Estas categorías de ocupación se correlacionan con factores de importancia que varían de 1.0 a 1.5 (ASCE/SEI 7-05, tabla 11.5-1). Las categorías de ocupación y los factores de importancia se combinan en una sola tabla (tabla 21.2), que se muestra más adelante.

21.5 CATEGORÍAS DE DISEÑO SÍSMICO

Las categorías de diseño sísmico se asignan usando la tabla 21.3 del ASCE/SEI 7-05 y dependen del *nivel de riesgo sísmico, del tipo de suelo, de la ocupación y del uso*. El nivel de riesgo sísmico depende de la ubicación geográfica de la estructura. Si S_1 es menor que 0.75, la categoría de diseño sísmico puede determinarse de la tabla 21.3(*a*) de este libro solamente cuando son aplicables ciertas condiciones.[3] Si la tabla 21.3(*a*) y (*b*) da resultados diferentes para la misma estructura, se usa la SDC más severa. La tabla 21.3 no contiene la SDC E o el SDC F. A las estructuras con categoría de ocupación I, II o III que estén localizadas donde el parámetro de aceleración de respuesta espectral cartografiado para el periodo $1 - s$, S_1, es mayor que o igual a 0.75, se les asigna un valor de SDC E. A las estructuras con categoría de ocupación IV que se localizan donde $S_1 \geq 0.75$ se les asigna un valor de SDC F.

21.6 CARGAS DE DISEÑO SÍSMICO

Fuerzas verticales

Las cargas verticales sísmicas, E_v, se basan en el valor de S_{DS} (el parámetro de aceleración de respuesta espectral de diseño) y en la carga muerta, D.

$$E_v = 0.2S_{DS}D \qquad \text{(Ecuación 12.4-4, ASCE/SEI 70-5)}$$

Debe considerarse que la carga sísmica vertical actúa ya sea hacia arriba o hacia abajo, lo que sea más crítico para el diseño. La combinación de cargas de diseño crítico para la mayoría de las columnas de concreto reforzado se presenta por debajo de su punto de balance. En esta región las columnas generalmente tienen una menor capacidad de momento si disminuye la compresión axial (figura 10.8 e inciso 10.8 de este libro). Por tanto, una carga sísmica hacia arriba conduciría a una capacidad reducida de momento.

Fuerzas laterales

Las estructuras asignadas a la categoría A de diseño sísmico se diseñan para los efectos de fuerzas laterales estáticas aplicadas en forma independiente en cada una de dos direcciones planas ortogonales. En cada dirección, las fuerzas laterales de diseño se aplican simultáneamente en todos los niveles. La fuerza lateral de diseño para cada nivel se determina como sigue:

$$F_x = 0.01\, w_x \qquad \text{(Ecuación 11.7-1, ASCE/SEI 7-05)}$$

Donde

F_x = fuerza lateral de diseño aplicada al nivel x

w_x = la parte de la carga muerta total de la estructura, D, localizada en o asignada al nivel x

[3] ASCE/SEI 7-05, sección 11.4.

Tabla 21.2 Tipo de ocupación y factores de importancia (de ASCE/SEI 7-05, tablas 1.1 y 11.5-1).

Tipo de ocupación	Categoría de ocupación	Factor de importancia, *I*
Edificios y otras estructuras que representan un riesgo bajo para la vida humana en caso de falla, incluyendo, pero no limitado a: instalaciones agrícolas, ciertas instalaciones temporales, instalaciones pequeñas de almacenaje.	I	1.0
Todos los edificios y otras estructuras, excepto aquellas listadas en las categorías de ocupación I, III y IV.	II	1.0
Edificios y otras estructuras que representan un riesgo importante para la vida humana en caso de falla, incluyendo, pero no limitado a:	III	
• Edificios y otras estructuras donde se reúnen más de 300 personas en un área		
• Edificios y otras estructuras con instalaciones para guardería con una capacidad para más de 150		
• Edificios y otras estructuras con instalaciones de escuela primaria y escuela secundaria con una capacidad para más de 250		1.25
• Edificios y otras estructuras con una capacidad para más de 500 para universidades o instalaciones para educación de adultos		
• Instalaciones de servicios de salud con una capacidad de 50 o más pacientes residentes, pero que no tengan instalaciones para cirugías o tratamientos de emergencia		
• Cárceles e instalaciones de detención		
Edificios y otras estructuras, no incluidas en la categoría de ocupación IV, con potencial para causar un impacto económico importante y/o una dislocación masiva de la vida civil cotidiana en caso de falla, incluyendo, pero no limitado a: estaciones de generación de energía, instalaciones de potabilización de aguas, instalaciones de tratamiento de aguas residuales, centros de telecomunicaciones.		
Edificios y otras estructuras no incluidas en la categoría de ocupación IV (incluyendo, pero no limitado a: instalaciones de manufactura, proceso, manejo, almacenaje, uso o disposición de sustancias tales como combustibles peligrosos, sustancias químicas peligrosas, residuos peligrosos o explosivos) que contengan cantidades suficientes de sustancias tóxicas o explosivas que pueden ser peligrosas para el público si se liberan.		
Los edificios y otras estructuras que contengan sustancias tóxicas o explosivas serán elegibles para ser clasificadas como estructuras de categoría de ocupación II si puede demostrarse a satisfacción de la autoridad que tenga jurisdicción mediante una evaluación de riesgo, como se describe en la sección 1.5.2 que una liberación de las sustancias tóxicas o explosivas no representan una amenaza para el público.		

(*Continúa*)

Tabla 21.2 (*Continuación*)

Tipo de ocupación	Categoría de ocupación	Factor de importancia, *I*
Edificios y otras estructuras designadas como instalaciones esenciales, incluyendo, pero no limitado a:		
• Hospitales y otras instalaciones de servicios de salud que tengan instalaciones de cirugías o tratamientos de emergencia	IV	1.5
• Estaciones de bomberos, rescate, ambulancias y policía y estacionamientos de vehículos de emergencia		
• Refugios designados para terremotos, huracanes u otras emergencias		
• Centros designados para alertas de emergencia, comunicaciones, operaciones y otras instalaciones requeridas para respuestas de emergencia		
• Estaciones de generación de energía y otras instalaciones de servicios públicos que se requieren en una emergencia		
• Estructuras auxiliares (incluyendo, pero no limitadas a torres de comunicaciones, tanques de almacenaje de combustible, torres de enfriamiento, estructuras de subestaciones eléctricas, tanque de almacenaje de agua para bomberos u otras estructuras que alojen o soporten agua, u otro tipo de material o equipo extintor de incendios) requeridas para la operación de estructuras de ocupación de categoría IV durante una emergencia		
• Torres de control de aviación, centros de control de tráfico aéreo y hangares de emergencia para aviones		
• Instalaciones de almacenaje de agua y estructuras de bombeo requeridas para mantener la presión hidráulica para la extinción de incendios		
• Edificios y otras estructuras que tengan funciones críticas de defensa nacional		
Edificios y otras estructuras (incluyendo, pero no limitadas a instalaciones de manufactura, proceso, manejo, almacenaje, uso o disposición de sustancias tales como combustibles peligrosos, sustancias químicas peligrosas, residuos peligrosos) que contengan sustancias muy tóxicas donde la cantidad del material exceda una cantidad umbral establecida por la autoridad que tenga jurisdicción		
Los edificios y otras estructuras que contengan sustancias muy tóxicas serán elegibles para ser clasificadas como estructuras de categoría de ocupación II si puede demostrarse a satisfacción de la autoridad que tenga jurisdicción mediante una evaluación de riesgo como se describe en la sección 1.5.2 que una liberación de las sustancias muy toxicas no representan una amenaza para el público. Esta clasificación reducida no se permitirá si los edificios u otras estructuras también funcionen como instalaciones esenciales		

*Las plantas de cogeneración de energía que no suministren energía en la red nacional serán designadas como de categoría de ocupación II.

Tabla 21.3 Categoría de diseño sísmico (SDC: *Seismic Design Category*) basada en la categoría de ocupación y en el parámetro de aceleración de respuesta

Valor de S_{DS}	Categoría de ocupación		
	I o II	III	IV
$S_{DS} < 0.167$	A	A	A
$0.167 \leq S_{DS} < 0.33$	B	B	C
$0.33 \leq S_{DS} < 0.50$	C	C	D
$0.50 = S_{DS}$	D	D	D

a) Basada en el parámetro de aceleración de respuesta para periodos cortos (tomado de ASCE/SEI 7-05, tabla 11.6-1).

Valor de S_{D1}	Categoría de ocupación		
	I o II	III	IV
$S_{D1} < 0.067$	A	A	A
$0.067 \leq S_{D1} < 0.133$	B	B	C
$0.133 \leq S_{D1} < 0.20$	C	C	D
$0.20 \leq S_{D1}$	D	D	D

b) Basada en el parámetro de aceleración de respuesta para periodos de 1 segundo (tomado de ASCE/SEI 7-05, tabla 11.6-2).

De una manera bastante sencilla, una estructura a la que se le asigna el valor de SDC A se diseña para una carga sísmica lateral igual a 1% de su carga muerta de diseño. Las estructuras asignadas al valor SDC A también deben cumplir los requisitos para las conexiones de trayectoria de carga, la conexión con los apoyos y el anclaje de los muros de concreto o de mampostería.[4]

Las estructuras asignadas a los valores SDC B hasta SDC F deben diseñarse usando un método más detallado. Un método así es el *procedimiento de fuerza lateral equivalente*, en el cual la fuerza cortante basal sísmica de diseño, V, en cada dirección de plano principal se determina como:

$$V = C_s W \qquad \text{(Ecuación 12.8-1, ASCE/SEI 7-05)}$$

Donde

C_s = coeficiente de respuesta sísmica determinado de acuerdo con la sección 12.8.1.1 del ASCE/SEI

W = peso sísmico efectivo (sección 12.7.2 del ASCE/SEI)

Se incluyen la carga muerta total y otras cargas que posiblemente estén presentes durante un terremoto. Por ejemplo, en las áreas de almacenaje debe incluirse cuando menos 25% de la carga viva de piso. Si están presentes muros divisorios, debe incluirse el que sea mayor del peso real del muro divisorio o 10 lb/pie^2 (0.48 kN/m^2). Debe incluirse el peso total de operación del equipo permanente. Si la carga de nieve en techo plano, P_f, sobrepasa a 30 lb/pie^2 (1.44 kN/m^2), se incluye 20% de la carga uniforme de nieve de diseño, independientemente de la pendiente real del techo.

[4]ASCE/SEI 7, sección 11.7.

El coeficiente de respuesta sísmica, C_s, se determina mediante

$$C_S = \frac{S_{DS}}{R/I} \qquad \text{(Ecuación 12.8-2, ASCE/SEI 7-05)}$$

y no debe sobrepasar a

$$C_S = \frac{S_{DI}}{T\left(\frac{R}{I}\right)} \quad \text{para } T \leq T_L \qquad \text{(Ecución 12.8-3, ASCE/SEI 7-05)}$$

o bien

$$C_S = \frac{S_{D1} T_L}{T^2\left(\frac{R}{I}\right)} \quad \text{para } T > T_L \qquad \text{(Ecuación 12.8-4, ASCE/SEI 7-05)}$$

En ningún caso se permite que C_S sea menor que 0.01. Si $S_1 \geq 0.6$ g,

$$C_S = \frac{0.5 S_1}{R/I} \qquad \text{(Ecuación 12.8-6, ASCE/SEI 7-05)}$$

El suplemento 2 del ASCE 7-05 cambió el límite inferior de C_S de regreso al valor original de $0.044IS_{DS}$.

El periodo fundamental de la estructura, T, en la dirección considerada se establece usando las propiedades estructurales de los elementos resistentes en un análisis apropiadamente fundamentado.El periodo fundamental, T, no debe sobrepasar al producto del coeficiente para el límite superior para el periodo calculado (C_u) de la tabla 12.8-1 por el periodo fundamental, T_a, determinado de la ecuación 12.8-7. Como una alternativa para realizar un análisis para determinar el periodo fundamental, T, se permite usar el periodo aproximado del edificio, T_a, calculado de acuerdo con la sección 12.8.2.1 directamente.

El periodo fundamental aproximado (T_a), en s, puede determinarse a partir de la siguiente ecuación:

$$T_a = C_t h_n^x \qquad \text{(Ecuación 12.8-7, ASCE/SEI 7-05)}$$

donde h_n es la altura en pies arriba de la base al nivel más alto de la estructura. Para los marcos de concreto que resisten momento, el coeficiente C_t es 0.016 (0.0466 en unidades del SI) y x es 0.9.

Como una alternativa, el periodo fundamental aproximado (T_a), en segundos, puede encontrarse a partir de la siguiente ecuación para estructuras que no excedan de 12 niveles de altura en donde el sistema resistente a la fuerza sísmica consiste totalmente de marcos de concreto resistentes al momento y la altura del nivel es de cuando menos 10 pies (3 m):

$$T_a = 0.1\, N \qquad \text{(Ecuación 12.8-8, ASCE/SEI 7-05)}$$

en donde N = número de niveles.

Mientras que T_a para estructuras de concreto de muro de cortante puede determinarse mediante

$$T_a = \frac{0.0019}{\sqrt{C_w}} h_n \qquad \text{(Ecuación 12.8-9, ASCE/SEI 7-05)}$$

en donde h_n se definió con anterioridad y C_w se calcula como sigue:

$$C_w = \frac{100}{A_B} \sum_{i=1}^{x} \left(\frac{h_n}{h_i}\right)^2 \frac{A_i}{\left[1 + 0.83\left(\frac{h_i}{D_i}\right)^2\right]} \qquad \text{(Ecuación 12.8-10, ASCE/SEI 7-05)}$$

En donde

A_B = área de la base de la estructura, pies^2

A_i = área del alma del muro de cortante "*i*" en pies^2

D_i = longitud del muro de cortante "*i*" en pies

h_i = altura del muro de cortante "*i*" en pies

x = número de muros de cortante en el edificio que son efectivos para resistir las fuerzas laterales en la dirección considerada

La fuerza cortante basal sísmica total de diseño, *V*, se distribuye en cada nivel del edificio de acuerdo con la siguiente expresión que se obtiene al combinar las ecuaciones 12.8-11 y 12.8-12 del ASCE/SEI 7-05.

$$F_x = \frac{w_x h_x^k}{\sum_{i=1}^{n} w_i h_i^k} V$$

En donde

w_x o w_i = la porción del peso efectivo total de la estructura, *W*, asignada al nivel *x* o *i*, respectivamente

k = un exponente relacionado con el periodo de la estructura como sigue:

para estructuras que tengan un periodo de 0.5 seg o menor, $k = 1$
para estructuras que tengan un periodo de 2.5 seg o más, $k = 2$
para estructuras que tengan un periodo entre 0.5 y 2.5 seg, *k* debe ser 2 o debe determinarse mediante interpolación lineal entre 1 y 2

Las estructuras que responden elásticamente a los terremotos generalmente incurren en fuerzas sísmicas grandes. Si una estructura se diseña y se detalla para que tenga capacidad de una respuesta inelástica no lineal, estará sujeta a fuerzas sísmicas más bajas, sin embargo, aun en el caso del mismo terremoto en el mismo sitio. El *coeficiente de modificación de respuesta*, *R*, reduce la fuerza de diseño sísmico para estructuras con capacidad de respuesta inelástica. Como se muestra en la tabla 21.4, este coeficiente es de 3.0 para marcos de concreto ordinarios para momento, 5.0 para marcos de concreto intermedios para momento y 8.0 para marcos de concreto especiales para momento. En esta tabla, los términos "ordinario", "intermedio" y "especial" se refieren a los niveles de severidad creciente de detallado sísmico y se

Tabla 21.4 Coeficientes de modificación de respuesta para diferentes sistemas resistentes a la fuerza sísmica (tomado de ASCE/SEI 7-05, tabla 12.2-1, condensada).

	Sistema resistente a la fuerza sísmica	R*
	Muro de cortante de concreto reforzado especial	5
	Muro de cortante de concreto reforzado ordinario	4
Sistema de muros de carga	Muro de cortante de concreto simple detallado	2
	Muro de cortante de concreto simple ordinario	1.5
	Muro de cortante de concreto reforzado especial	6
	Muro de cortante de concreto reforzado ordinario	5
	Muro de cortante de concreto simple detallado	2
Sistema de marcos de construcción	Muro de cortante de concreto simple ordinario	1.5
	Marcos para momento especiales de concreto reforzado	8
	Marcos para momento intermedios de concreto reforzado	5
Marcos resistentes a los momentos	Marcos para momento ordinario de concreto reforzado	3

*Coeficiente de modificación de respuesta, R.

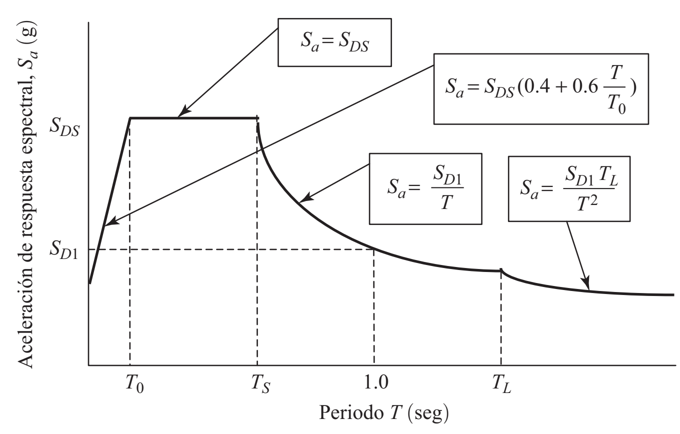


Figura 21.1 Espectro de respuesta de diseño (tomado de ASCE/SEI 7-05, figura 11.4-1).

estudian posteriormente en este capítulo. Los valores más altos de R corresponden a fuerzas de diseño sísmico más bajas ya que R aparece en el denominador de la ecuación para el cortante basal de diseño sísmico. Debe diseñarse un marco especial de concreto para momento para solamente 3/8 del cortante basal sísmico de un marco ordinario de concreto para momento geométricamente idéntico.

No es necesario que las estructuras asignadas a la categoría SDC A cumplan con los requisitos del capítulo 21 del ACI 318. Las estructuras asignadas a la categoría SDC B y mayores deben cumplir con requisitos sucesivamente más severos dentro de ese capítulo. Por ejemplo, las estructuras asignadas a la categoría SDC B deben satisfacer la sección 21.1.2 del ACI 318; las estructuras asignadas a la categoría SDC C deben satisfacer las secciones 21.1.2 y 21.1.8 del ACI 318; y las estructuras asignadas a la categoría SDC D hasta F deben satisfacer las secciones 21.1.2, 21.1.8, así como las secciones 21.11 hasta 21.13 del ACI 318.

Las estructuras más complejas deben diseñarse usando el *método de espectros de respuesta general* o los procedimientos de movimiento del suelo específicos del sitio. En el método de espectros de respuesta general, la aceleración de respuesta de diseño, S_a, depende del periodo fundamental del edificio, T, como se muestra en la figura 21.1. Esa figura tiene cuatro regiones diferentes, cada una con su propia ecuación que relaciona a S_a con S_{DS} o S_{D1} así como con T.

En donde

S_{DS} = parámetro de aceleración de respuesta espectral de diseño para periodos cortos
S_{D1} = parámetro de aceleración de respuesta espectral de diseño para el periodo $1 - s$
T = periodo fundamental de la estructura, segundos
$Y_0 = 0.2S_{D1}/S_{DS}$
$T_S = S_{D1}/S_{DS}$
T_L = periodo(s) de transición para un periodo largo mostrados en el capítulo 22 del ASCE/SEI 7-05

21.7 REQUISITOS DE DETALLADO PARA LAS DIFERENTES CLASES DE MARCOS DE CONCRETO REFORZADO PARA MOMENTOS

Los **marcos ordinarios para momento** que son parte de un sistema resistente a las fuerzas sísmicas se permiten solamente en SDC B,[5] y deben cumplir con los requisitos de diseño sísmico y de detallado para vigas y columnas como se prescribe en el capítulo 21 del ACI 318. Las vigas deben tener cuando

[5]ASCE/SEI 7-05, tabla 12.2-1.

menos dos de sus varillas longitudinales continuas a lo largo de las dos caras superior e inferior y estas varillas deben desarrollarse en las caras de los apoyos. Estas varillas suministran al marco una capacidad de resistencia a la carga sísmica que tal vez no sea requerida por el análisis. Las columnas con una altura libre menor que o igual a 5 veces la dimensión c_1 deben diseñarse para cortante de acuerdo con la sección 21.3.3 del ACI. El término c_1 es la dimensión de una sección rectangular (o una columna rectangular, capitel o ménsula que sean equivalentes) en la dirección del claro para el cual se están calculando los momentos. El cortante de diseño se determina como la sumatoria de la capacidad de momento en las caras de los nudos en cada extremo de la columna, dividida entre la distancia entre esas dos caras. Este enfoque, llamado "diseño por capacidad para cortante", está pensado para asegurar que las columnas no fallen por cortante durante un terremoto. Si la capacidad por momento de una columna es mayor que la requerida basada en el análisis (debida, por ejemplo, a las varillas de refuerzo con áreas de sección transversal mayores que las áreas teóricamente requeridas), entonces la capacidad por cortante de la columna debe incrementarse en forma correspondiente. Sin embargo, este cortante de diseño incrementado no debe exceder al cortante que corresponde a un valor de carga E por terremoto del doble del requerido por el código en vigor.

Los **marcos intermedios para momento** que son parte del sistema resistente a las fuerzas sísmicas se permiten solamente en las categorías SDC B y C[5] y deben satisfacer los requisitos más exigentes de la sección 21.3 del ACI 318. Éstos incluyen los requisitos de cortante de ACI 21.3.3 descritos anteriormente para ciertas columnas en marcos ordinarios para momento. Además, las vigas (miembros con cargas axiales a compresión, P_u, menores que $A_g f'_c/10$ deben diseñarse para cortante usando el diseño por capacidad como lo requiere la sección 21.3.4 del ACI 318 y como se ilustra en la figura 21.2. Las vigas también deben detallarse en cuanto a ductilidad, usando espirales cerradas, zunchos cerrados, o estribos rectangulares cerrados para confinar el concreto de modo que sean más fuertes y más dúctiles. Los miembros con valores mayores de P_u deben cumplir con los requisitos para columnas de la sección 21.3.5 del ACI 318. Éstos también incluyen requisitos más estrictos para el confinamiento del concreto.

Los **marcos especiales para momento** se permiten en cualquier categoría de diseño sísmico (ASCE 7-05, tabla 12.2-1) y deben satisfacer las secciones 21.5 a 21.8 del ACI 318. La sección 21.5 del ACI 318 se aplica sólo a miembros a flexión en marcos especiales para momento. Al igual que con los marcos intermedios para momento, un miembro a flexión en un marco especial para momento se define como aquel que tiene una fuerza de compresión axial factorizada sobre el miembro, P_u, que no exceda a $A_g f'_c/10$. Este miembro a flexión debe tener un claro libre, l_n, no menor que 4 veces su peralte efectivo. Su ancho, b_w, no puede ser menor que el menor de $0.3h$ o 10 plg. Adicionalmente, su ancho, b_w, no debe exceder el ancho del miembro sustentante, c_2, más una distancia a cada lado del miembro sustentante igual al menor de *a*) el ancho del miembro sustentante, c_2 y *b*) 0.75 veces la dimensión total del miembro sustentante, c_1. Estos límites geométricos tienen por objetivo proporcionar mayor ductilidad. Se impone un límite de 0.025 sobre la razón de refuerzo longitudinal, para aumentar la ductilidad a flexión y evitar la congestión. Debe suministrarse un mínimo de dos varillas continuamente tanto arriba como abajo. La resistencia a momento positivo en cualquier cara de nudo debe ser cuando menos la mitad de la resistencia al momento negativo del miembro a flexión. La resistencia al momento negativo y positivo en cualquier sección a lo largo de la longitud del miembro debe ser cuando menos un cuarto de la resistencia al momento máximo suministrada en la cara de cada uno de los nudos.

Los traslapes para el refuerzo a flexión se permiten solamente si se suministra refuerzo de confinamiento (zunchos o refuerzo espiral) para la longitud total de traslape. La separación de este refuerzo transversal no debe exceder al menor de $d/4$ o 4 plg. Los traslapes no se permiten en regiones donde se espera fluencia por flexión, incluyendo:

a) Dentro de los nudos
b) Dentro de una distancia de 2 veces el peralte del miembro desde la cara del nudo
c) Donde el análisis muestre fluencia por flexión causada por los desplazamientos laterales inelásticos del marco

Los requisitos para el confinamiento transversal son similares pero más estrictos que aquellos para los marcos intermedios de concreto para momento. Su propósito es el confinamiento del concreto dentro

del zuncho y suministrar apoyo lateral para resistir el pandeo del refuerzo longitudinal que ha fluido bajo una carga cíclica invertida. Se requieren zunchos en regiones donde se espera que se desarrollen articulaciones. Si no se requieren zunchos, deben suministrarse estribos que tengan ganchos sísmicos en ambos extremos, separados una distancia no mayor que $d/2$ para toda la longitud del miembro.

Los miembros para el marco especial para momentos deben diseñarse por cortante usando los procedimientos de diseño por capacidad explicados anteriormente. Cuando los miembros de los marcos especiales para momento se someten a fuerzas combinadas de flexión y de compresión axial factorizada que excedan a $A_g f_c'/10$, deben cumplirse requisitos adicionales. Los requisitos geométricos incluyen los siguientes:

1. La menor dimensión de la sección transversal, medida sobre una línea que atraviese el centroide geométrico, debe ser cuando menos de 12 pulgadas.
2. La razón de la dimensión más corta de la sección transversal entre la dimensión perpendicular debe ser cuando menos de 0.4 pulgadas.

La sección 21.6.2 del ACI 318 requiere que las columnas de los marcos especiales para momento se diseñen de modo que su resistencia nominal a la flexión sea 20% mayor que aquella de las vigas que se ensamblan en un nodo viga-columna. Este requisito tiene por objetivo asegurar que si se forman articulaciones en un nodo viga-columna, éstas ocurrirán en las vigas más bien que en las columnas. Si se forman articulaciones en las columnas, el resultado puede ser el colapso del marco. Este requisito no se toma en cuenta si se ignoran la resistencia lateral y la rigidez de las columnas al determinar la resistencia y la rigidez de la estructura, tal como en un marco arriostrado.

El refuerzo longitudinal en las columnas de marcos especiales para momentos debe estar entre 1% y 6% del área total de la sección transversal. Además, los traslapes deben cumplir los requisitos de la sección 21.6.3.2 del ASCI 318.

Los requisitos del refuerzo transversal (sección 21.6.4 del ACI 318) para marcos especiales para momento son más estrictos que aquellos para marcos ordinarios o intermedios para momento y tienen por objetivo suministrar una ductilidad aún mayor.

Los requisitos para cortante para los marcos intermedios para momento se incrementan para los marcos especiales para momento al cambiar M_{nl} y M_{nr} en la figura 21.2 a M_{pr1} y M_{pr2}. M_{pr} es la resistencia a la flexión probable en la cara del nudo considerando carga axial, si la hay, usando un esfuerzo en el acero de refuerzo de $1.25f_y$ y un factor ϕ de 1.0. Los subíndices 1 y 2 en M_{pr} denotan los extremos izquierdo

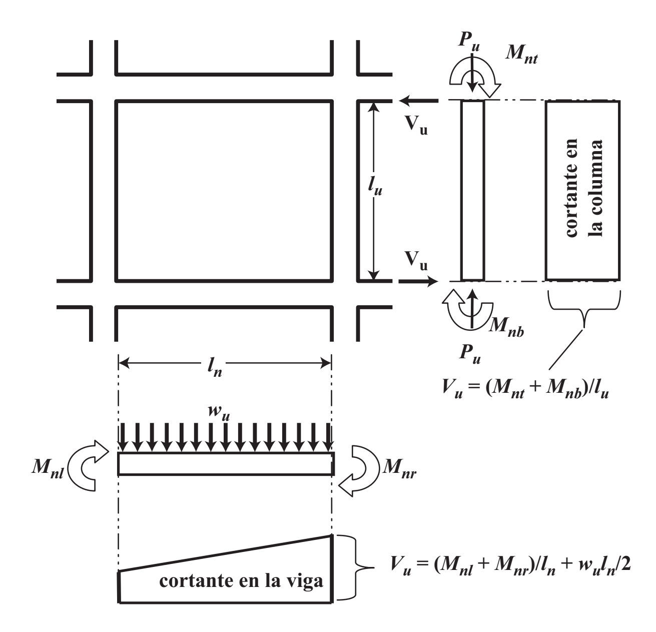


Figura 21.2 Diseño de cortante en columna y viga para marcos intermedios para momento.

y derecho del miembro a flexión, respectivamente. Similarmente, los momentos M_{nt} y M_{nb} en la figura 21.2 se cambian a M_{pr3} y M_{pr4}, donde los subíndices 3 y 4 denotan la parte superior y la parte inferior de la columna, respectivamente. Aún cuando el capítulo 21 del ACI 318 contiene requisitos adicionales para la resistencia al cortante y la longitud de desarrollo en tensión en marcos especiales para momento, éstos son más complejos que lo necesario para este texto introductorio sobre el diseño del concreto reforzado. En el capítulo 29 de las Notas de PCA sobre el inciso 318-08 del SCI, capítulo 29, se suministra información adicional sobre éstas y otras disposiciones del diseño sísmico.

EJEMPLO 21.1

Determine las fuerzas laterales de diseño debidas a un terremoto para un hospital de marcos de concreto de 6 niveles usando el procedimiento de la fuerza lateral equivalente. La estructura se selecciona como un hospital para ilustrar el uso de los factores de importancia al calcular las cargas de diseño sísmico usando los procedimientos de ASCE/SEI 7-05. Algunos estados tienen requisitos adicionales para los hospitales, que no se abordan en este ejemplo. La estructura se localiza en Memphis, Tennessee, para la cual se determinan los valores de MCE a partir de mapas del USGS como $S_S = 2.0$ y $S_1 = 0.9$. La estructura se localiza sobre suelo determinado como clase C en el sitio. Cada piso tiene una altura de 12 pies. El valor de W para cada piso se determina como de 450 *k* y para el techo, 200 *k*.

1. Determine F_a y F_v.
   De la tabla 21.1*a*), usando $S_S \geq 1.25$ y clase C del sitio, $F_a = 1.0$.
   De la tabla 21.1*b*), usando $S_1 \geq 0.5$ y clase C del sitio, $F_v = 1.3$.
2. Determine S_{MS} y S_{M1}

$$S_{MS} = F_a S_S = (1.0)(2.0) = 2.0 \qquad \text{(Ecuación 11.4-1, ASCE/ACI)}$$

$$S_{M1} = F_v S_1 = (1.3)(0.9) = 1.17 \qquad \text{(Ecuación 11.4-2, ASCE/ACI)}$$

3. Determine S_{DS} y S_{D1} (página 631)

$$S_{DS} = 2S_{MS}/3 = 1.33 \qquad \text{(Ecuación 11.4-3, ASCE/ACI)}$$

$$S_{D1} = 2S_{M1}/3 = 0.78 \qquad \text{(Ecuación 11.4-4, ASCE/ACI)}$$

4. Factores de ocupación y de importancia: la tabla 21.2 lista la categoría de ocupación para los hospitales como IV. Esto corresponde a un factor de importancia de 1.5, también de la misma tabla. Ésta es una instalación crítica que requiere el nivel más alto de consideración, por tanto el factor de importancia más alto. Imagine las consecuencias si nuestras estaciones de bomberos, estaciones de policía y hospitales no pudieran funcionar después de un fuerte terremoto.
5. Determine la categoría de diseño sísmica: la tabla 21.3(*a*) requiere un SDC D para $S_{DS} \geq 0.50$ y una categoría de ocupación IV. La tabla 21.3(*b*) asimismo requiere un SDC D para $S_{D1} \geq 0.20$ y una categoría de ocupación IV.
6. Determine el coeficiente de modificación de respuesta, R: ya que se requiere un marco especial para momentos para SDC D, $R = 8$ de la tabla 21.4. Observe que el marco debe detallarse de acuerdo con los requisitos para marcos especiales para momentos.
7. Determine el periodo fundamental de la estructura: el valor aproximado de T es

$$T_a = 0.1N = 0.1(6) = 0.6 \text{ seg} \qquad \text{(Ecuación 12.8-8, ASCE/ACI)}$$

(para marcos con alturas de piso a piso que excedan a 10 pieS y con menos de 12 niveles)

8. Determine T_S y T_L

$$T_S = S_{D1}/S_{DS} = 0.78/1.33 = 0.59$$

$$T_L = 12 \text{ (de ASCE/SEI 7-05, figura 22-15)}$$

9. Determine la fuerza sísmica lateral de diseño total sobre la estructura

$$C_S = \frac{S_{DS}}{R/I} = \frac{1.33}{8/1.5} = 0.25 \qquad \text{(Ecuación 12.8-2, ASCE/ACI)}$$

y como $T_a < T_L$, C_S no debe exceder

$$C_S = \frac{S_{D1}}{T\left(\frac{R}{I}\right)} = \frac{0.78}{0.6\left(\frac{8}{1.5}\right)} = 0.244 \qquad \text{(Ecuación 12.8-3, ASCE/ACI)}$$

El valor de control es $C_S = 0.244$.

$$V = C_S W = (0.244)(450)(5) + (0.244)(200)(1) = 598 \text{ klb} \qquad \text{(Ecuación 12.8-1, ASCE/ACI)}$$

La fuerza en el piso superior (nivel del techo) se determina usando la ecuación 12.8-12 de ASCE/SEI 7-05.

$$F_R = \frac{w_r h_R^{1.05}}{\sum_{i=1}^{n} w_i h_i^{1.05}} V = \frac{(200)(72)^{1.05}}{(450)(12)^{1.05} + (450)(24)^{1.05} + \ldots\ldots + (200)(72)^{1.05}}(598)$$
$$= \frac{17\ 833}{115\ 333}(598) = 92.4\ k$$

Se determina que el coeficiente k vale *1.05* por interpolación, usando un valor de $T = 0.6$ seg.

Al nivel del quinto piso

$$F_6 = \frac{w_6 h_6^{1.05}}{\sum_{i=1}^{n} w_i h_i^{1.05}} V = \frac{(450)(60^{\ 1.05}}{(450)(12)^{1.05} + (450)(24)^{1.05} + \ldots\ldots + (200)(72)^{1.05}}(598)$$
$$= \frac{33\ 134}{115\ 333}(598) = 171.8\ k$$

Las fuerzas restantes para otros niveles de piso se calculan usando la técnica mostrada arriba para los niveles de techo y sexto piso y los resultados se muestran en seguida.

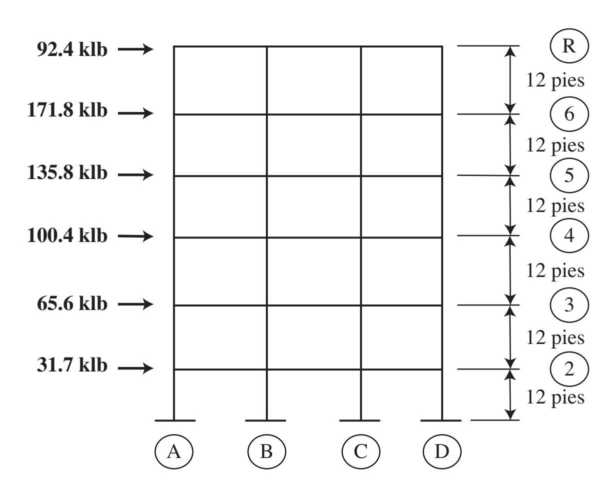


Figura 21.3 Fuerzas sísmicas laterales de diseño para el ejemplo 21.1.

EJEMPLO 21.2

Determine el cortante de diseño en la columna para la columna mostrada en seguida si es parte de un marco intermedio de concreto para momentos.

Determine la capacidad de momento de la columna.

$$K_n = \frac{P_n}{f_c'A_g} = \frac{P_u}{\phi f_c'A_g} = \frac{120}{0.65(4)16^2} = 0.18$$

$$\rho_z = \frac{6}{16^2} = 0.0234$$

Usando los diagramas de interacción de columnas del apéndice A, gráfica 3, $R_n = 0.18$. Sin embargo, resulta que la posición de las coordenadas de K_n y R_n está en la línea radial correspondiente a $\varepsilon_t = 0.005$. El factor ϕ para este valor de K_n y R_n es 0.9, no 0.65 como se supuso anteriormente. Repitiendo el cálculo de K_n usando $\phi = 0.9$ se obtiene $K_n = 0.130$. De la gráfica 3, $R_n = 0.17$.

$$M_n = R_n f_c' A_g h = 0.17(4)16^2 16 = 2\,785 \textit{ klb-plg} = 232.1 \textit{ klb-pie}$$

Como las capacidades de momento arriba y debajo de la columna son las mismas, $M_{nt} = M_{nb} = 232.1$ klb-pie

$$V_u = \frac{M_{nt} + M_{nb}}{l_u} = \frac{232.1 + 232.1}{12} = 38.68 \textit{ klb}$$

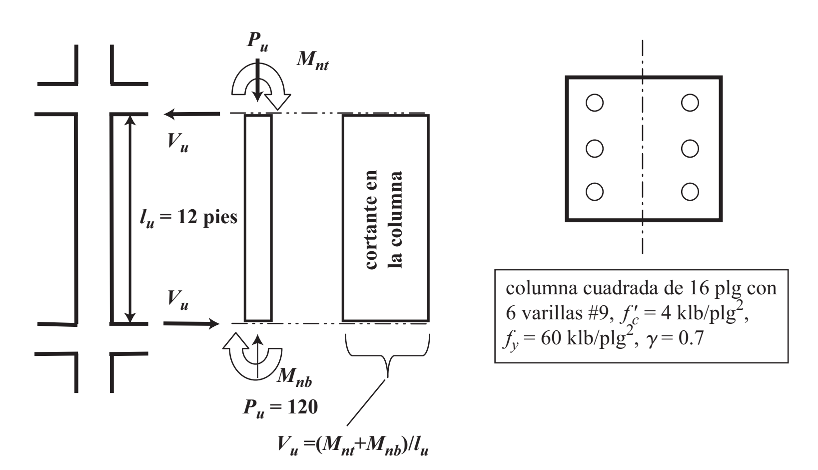


Figura 21.4

EJEMPLO 21.3

El nudo viga-columna mostrado en seguida es parte de un marco especial para momentos. Determine si el nudo cumple con la sección 21.6.2.2 del ACI 318-08. Si no, rediseñe las columnas para que cumplan con esta disposición.

SOLUCIÓN La sección 21.6.2.2 del ACI 318-08, requiere que la suma de los momentos de la columna en un nudo $(M_{nt} + M_{nb})$ no sea menor que 120% de la suma de los momentos de la viga que se ensambla en el mismo nudo $(M_{nl} + M_{nr})$. Se incluye la fuerza axial al determinar la capacidad de flexión de la columna.

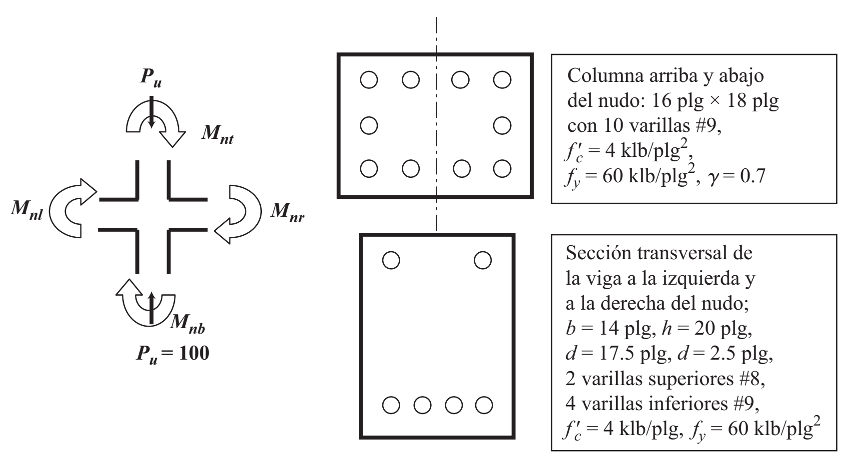


Figura 21.5

Capacidad de la viga: la sección transversal de la viga en el lado izquierdo del nudo está sometida a un momento positivo. Por tanto, $A_s = 4$ plg^2 y $A'_s = 1.57$ plg^2.

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{4.00\,plg^2 \times 60\,klb/plg^2}{0.85 \times 4\,klb/plg^2 \times 14\,plg} = 5.04\,plg$$

$$M_n = A_s f_y (d - a/2) = 4.00\,plg^2 \times 60\,klb/plg^2 \times \left(17.5 - \frac{5.04}{2}\right) plg = 3\,595\ klb\text{-}plg$$

Nota: si se incluyera el acero de compresión $(A'_s = 1.57$ plg$^2)$, la capacidad de momento sería 3 710 plg-klb (sólo 3% más).

La sección transversal de la viga en el lado derecho del nudo está sujeta a momento negativo. Por tanto, $A_s =$ 1.57 plg^2 y $A'_s = 4.00$ plg^2.

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{1.57\,plg^2 \times 60\,klb/plg^2}{0.85 \times 4\,klb/plg^2 \times 14\,plg} = 1.98\,plg$$

$$M_n = A_s f_y (d - a/2) = 1.57\,plg^2 \times 60\,klb/plg^2 \times \left(17.5 - \frac{1.98}{2}\right) plg = 1\,555\ klb\text{-}plg$$

Nota: si se incluyera el acero de compresión ($A'_s = 4.00$ plg^2), la capacidad de momento sería 1 558 plg-klb (sólo 0.2% más).

Capacidad de la columna: usando los diagramas de interacción del apéndice A, la capacidad de momento que corresponde a una carga axial de compresión de 300 kilolibras se determina como sigue:

Suponga $\phi = 0.65$, $\rho_z = A_{st}/bh = 10/(16 \cdot 18) = 0.035$.

$$K_n = P_u/\phi f'_c bh = 300/(0.65 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 18) = 0.40$$

$$\gamma = (h-5)/h = 13/18 = 0.72 \text{ (use la gráfica 7, } \gamma = 0.7)$$

$$R_n = 0.22,\ M_n = R_n f'_c bh^2 = 0.22(4.0)(16)(18)^2 = 4\,562 \text{ plg-klb}$$

También de la gráfica 7, f_s/f_y está entre 0.9 y 1.0 lo que significa que $\varepsilon_t < \varepsilon_y$ y $\phi = 0.65$ como se supuso.

Las columnas arriba y abajo del nudo tienen la misma carga axial y la misma sección transversal, por tanto la misma capacidad. Si la carga axial de la columna debajo hubiera sido diferente de la de arriba, la capacidad de momento sería diferente, aun con la misma sección transversal. La suma de las capacidades de momento nominales

de la columna en los nudos es por tanto 2 · 4 562 = 9 124 plg-klb. La suma de las capacidades de momento nominales de la viga es 3 595 + 155, la ecuación 12.8-25 de ASCE/ACI = 5 150 plg-klb. Como 9 124 > 1.2 · 5 150 = 6 180 plg-klb, se satisfacen los requisitos de columna fuerte, viga débil del capítulo 21 del ACI 318-08 para marcos especiales para momentos.

PROBLEMAS

21.1 Repita el ejemplo 21.1 si $S_S = 1.8$, $S_1 = 0.6$ y se tiene una clase D del sitio del suelo. El piso inferior tiene 16 pies de altura y los otros tienen cada uno 14 pies. El valor de W para cada piso es 400 klb y para el techo, es de 175 klb.

21.2 Repita el ejemplo 21.2 suponiendo un marco especial de concreto para momentos.

21.3 Repita el ejemplo 21.2 usando la hoja de cálculo de Excel del capítulo 10 para determinar la capacidad de la columna. (*Resp.:* $V_u = 38.7$ klb.)

21.4 Repita el ejemplo 21.3 usando $P_u = 50$ klb y diez varillas #8 en la columna.



Tablas y gráficas

UNIDADES USUALES EN EUA

Tabla A.1 Valores del módulo de elasticidad para concreto de peso normal

Unidades usuales en EUA	
f'_c (lb/plg²)	E_c (lb/plg²)
3 000	3 160 000
3 500	3 410 000
4 000	3 640 000
4 500	3 870 000
5 000	4 070 000

Fuentes: las tablas A.4, A.6, A.14 y A.15, así como la gráfica 1, están tomadas del libro *Design of Concrete Structures* de Winter y Nilson, Copyright © 1972 por McGraw-Hill, Inc., con autorización de McGraw-Hill Book Company. Las gráficas 2-13 están tomadas del *Design Handbook, Volume 2, Columns* (SP-17A), 1978, con autorización del American Concrete Institute.

Las tablas A.3(*a*) y A.3(*b*) están tomadas del *Manual of Standard Practice*, 22a. ed., 1997, segunda impresión, Concrete Reinforcing Steel Insititute, Chicago, IL.

Las tablas A.16 a la A.20 proceden del Commentary on Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-77), con autorización del American Concrete Institute.

Tabla A.2 Designaciones, áreas, perímetros y pesos de varillas estándar

	Unidades usuales en EUA		
Varilla núm.	Diámetro (plg)	Área de sección transversal (plg^2)	Peso unitario (lb/pie)
3	0.375	0.11	0.376
4	0.500	0.20	0.668
5	0.625	0.31	1.043
6	0.750	0.44	1.502
7	0.875	0.60	2.044
8	1.000	0.79	2.670
9	1.128	1.00	3.400
10	1.270	1.27	4.303
11	1.410	1.56	5.313
14	1.693	2.25	7.650
18	2.257	4.00	13.600

Tabla A.3(A) Tipos comunes de malla soldada de alambre. Unidades usuales en EUA

	Área de acero (plg^2/pie)		
Designación de tipo	Longitudinal	Transversal	Peso aproximado (lb/100 pie^2)
Rollos			
6 × 6—W1.4 × W1.4	0.03	0.03	21
6 × 6—W2 × W2	0.04	0.04	29
6 × 6—W2.9 × W2.9	0.06	0.06	42
6 × 6—W4 × W4	0.08	0.08	58
4 × 4—W1.4 × W1.4	0.04	0.04	31
4 × 4—W2 × W2	0.06	0.06	43
4 × 4—W2.9 × W2.9	0.09	0.09	62
4 × 4—W4 × W4	0.12	0.12	86
Hojas			
6 × 6—W2.9 × W2.9	0.06	0.06	42
6 × 6—W4 × W4	0.08	0.08	58
6 × 6—W5.5 × W5.5	0.11	0.11	80
4 × 4—W4 × W4	0.12	0.12	86

Tabla A.3(B) Área transversal y peso de malla soldada de alambre. Unidades usuales en EUA

Número de tamaño del alambre[a]		Diámetro nominal (pulgadas)	Peso nominal (lb/pie lineal)	Área en plg² por pie de ancho para diversas separaciones — Separación centro a centro						
Liso	Corrugado			2″	3″	4″	6″	8″	10″	12″
W31	D31	0.628	1.054		1.24	0.93	0.62	0.465	0.372	0.31
W28	D28	0.597	0.952		1.12	0.84	0.56	0.42	0.336	0.28
W26	D26	0.575	0.934		1.04	0.78	0.52	0.39	0.312	0.26
W24	D24	0.553	0.816		0.96	0.72	0.48	0.36	0.288	0.24
W22	D22	0.529	0.748		0.88	0.66	0.44	0.33	0.264	0.22
W20	D20	0.505	0.680	1.20	0.80	0.60	0.40	0.30	0.24	0.20
W18	D18	0.479	0.612	1.08	0.72	0.54	0.36	0.27	0.216	0.18
W16	D16	0.451	0.544	0.96	0.64	0.48	0.32	0.24	0.192	0.16
W14	D14	0.422	0.476	0.84	0.56	0.42	0.28	0.21	0.168	0.14
W12	D12	0.391	0.408	0.72	0.48	0.36	0.24	0.18	0.144	0.12
W11	D11	0.374	0.374	0.66	0.44	0.33	0.22	0.165	0.132	0.11
W10	D10	0.357	0.340	0.60	0.40	0.30	0.20	0.15	0.12	0.10
W9.5		0.348	0.323	0.57	0.38	0.285	0.19	0.142	0.114	0.095
W9	D9	0.339	0.306	0.54	0.36	0.27	0.18	0.135	0.108	0.09
W8.5		0.329	0.289	0.51	0.34	0.255	0.17	0.127	0.102	0.085

(*Continúa*)

Tabla A.3(B) (Continuación)

Número de tamaño del alambre[a]		Diámetro nominal (pulgadas)	Peso nominal (lb/pie lineal)	Área en plg^2 por pie de ancho para diversas separaciones						
				Separación centro a centro						
Liso	Corrugado			2″	3″	4″	6″	8″	10″	12″
W8	D8	0.319	0.272	0.48	0.32	0.24	0.16	0.12	0.096	0.08
W7.5		0.309	0.255	0.45	0.30	0.225	0.15	0.112	0.09	0.075
W7	D7	0.299	0.238	0.42	0.28	0.21	0.14	0.105	0.084	0.07
W6.5		0.288	0.221	0.39	0.26	0.195	0.13	0.097	0.078	0.065
W6	D6	0.276	0.204	0.36	0.24	0.18	0.12	0.09	0.072	0.06
W5.5		0.265	0.187	0.33	0.22	0.165	0.11	0.082	0.066	0.055
W5	D5	0.252	0.170	0.30	0.20	0.15	0.10	0.075	0.06	0.05
W4.5		0.239	0.153	0.27	0.18	0.135	0.09	0.067	0.054	0.045
W4	D4	0.226	0.136	0.24	0.16	0.12	0.08	0.06	0.048	0.04
W3.5		0.211	0.119	0.21	0.14	0.105	0.07	0.052	0.042	0.035
W2.9		0.192	0.099	0.174	0.116	0.087	0.058	0.043	0.035	0.029
W2.5		0.178	0.085	0.15	0.10	0.075	0.05	0.037	0.03	0.025
W2		0.160	0.068	0.12	0.08	0.06	0.04	0.03	0.024	0.02
W1.4		0.134	0.048	0.084	0.056	0.042	0.028	0.021	0.017	0.014

Nota: la lista anterior de tamaños de alambre liso y corrugado representa alambres normalmente seleccionados para la fabricación de mallas de alambre soldadas para áreas específicas de refuerzo. Tamaños y separación del alambre diferentes de los indicados en la lista pueden proporcionarse siempre que la cantidad requerida sea suficiente para justificar la producción de tales mallas

[a]El número que sigue al prefijo W o al prefijo D identifica el área de sección transversal del alambre en centésimos de pulgada cuadrada. El diámetro nominal de un alambre corrugado es equivalente al diámetro de un alambre liso que tenga el mismo peso por pie que el alambre corrugado.

Tabla A.4 Áreas de grupos de varillas estándar (plg^2). Unidades usuales en EUA

Varilla núm.	Número de varillas								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	0.39	0.58	0.78	0.98	1.18	1.37	1.57	1.77	1.96
5	0.61	0.91	1.23	1.53	1.84	2.15	2.45	2.76	3.07
6	0.88	1.32	1.77	2.21	2.65	3.09	3.53	3.98	4.42
7	1.20	1.80	2.41	3.01	3.61	4.21	4.81	5.41	6.01
8	1.57	2.35	3.14	3.93	4.71	5.50	6.28	7.07	7.85
9	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00
10	2.53	3.79	5.06	6.33	7.59	8.86	10.12	11.39	12.66
11	3.12	4.68	6.25	7.81	9.37	10.94	12.50	14.06	15.62
14	4.50	6.75	9.00	11.25	13.50	15.75	18.00	20.25	22.50
18	8.00	12.00	16.00	20.00	24.00	28.00	32.00	36.00	40.00

Varilla núm.	Número de varillas									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	2.16	2.36	2.55	2.75	2.95	3.14	3.34	3.53	3.73	3.93
5	3.37	3.68	3.99	4.30	4.60	4.91	5.22	5.52	5.83	6.14
6	4.86	5.30	5.74	6.19	6.63	7.07	7.51	7.95	8.39	8.84
7	6.61	7.22	7.82	8.42	9.02	9.62	10.22	10.82	11.43	12.03
8	8.64	9.43	10.21	11.00	11.78	12.57	13.35	14.14	14.92	15.71
9	11.00	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00
10	13.92	15.19	16.45	17.72	18.98	20.25	21.52	22.78	24.05	25.31
11	17.19	18.75	20.31	21.87	23.44	25.00	26.56	28.12	29.69	31.25
14	24.75	27.00	29.25	31.50	33.75	36.00	38.25	40.50	42.75	45.00
18	44.00	48.00	52.00	56.00	60.00	64.00	68.00	72.00	76.00	80.00

Tabla A.5 Ancho mínimo del alma (pulgadas) para vigas con exposición interior (Código ACI de 1995)[a,b,c]. Unidades usuales en EUA

Tamaño de varillas	Número de varillas en una capa de refuerzo							Adición por cada varilla adicional
	2	3	4	5	6	7	8	
#4	6.8	8.3	9.8	11.3	12.8	14.3	15.8	1.50
#5	6.9	8.5	10.2	11.8	13.4	15.0	16.7	1.625
#6	7.0	8.8	10.5	12.3	14.0	15.8	17.5	1.75
#7	7.2	9.0	10.9	12.8	14.7	16.5	18.4	1.875
#8	7.3	9.3	11.3	13.3	15.3	17.3	19.3	2.00
#9	7.6	9.8	12.1	14.3	16.6	18.8	21.1	2.26
#10	7.8	10.4	12.9	15.5	18.0	20.5	23.1	2.54
#11	8.1	10.9	13.8	16.6	19.4	22.2	25.0	2.82
#14	8.9	12.3	15.7	19.0	22.4	25.8	29.2	3.39
#18	10.6	15.1	19.6	24.1	28.6	33.1	37.7	4.51

[a]Ancho mínimo de viga para vigas calculado considerando estribos #3.

[b]Máxima medida agregada suponiendo que no excede los 3/4 de claro entre las varillas (ACI 3.3.2).

[c]La distancia horizontal desde el centro longitudinal externo de las varillas hasta el centro del estribo se supone igual al mayor de 2 veces el diámetro del estribo (ACI 7.2.2) o la mitad del diámetro de la varilla longitudinal.

Tabla A.6 Áreas de varillas en losas (plg^2/pie). Unidades usuales en EUA

Separación (plg)	Varilla núm.								
	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	0.44	0.78	1.23	1.77	2.40	3.14	4.00	5.06	6.25
$3\frac{1}{2}$	0.38	0.67	1.05	1.51	2.06	2.69	3.43	4.34	5.36
4	0.33	0.59	0.92	1.32	1.80	2.36	3.00	3.80	4.68
$4\frac{1}{2}$	0.29	0.52	0.82	1.18	1.60	2.09	2.67	3.37	4.17
5	0.26	0.47	0.74	1.06	1.44	1.88	2.40	3.04	3.75
$5\frac{1}{2}$	0.24	0.43	0.67	0.96	1.31	1.71	2.18	2.76	3.41
6	0.22	0.39	0.61	0.88	1.20	1.57	2.00	2.53	3.12
$6\frac{1}{2}$	0.20	0.36	0.57	0.82	1.11	1.45	1.85	2.34	2.89
7	0.19	0.34	0.53	0.76	1.03	1.35	1.71	2.17	2.68
$7\frac{1}{2}$	0.18	0.31	0.49	0.71	0.96	1.26	1.60	2.02	2.50
8	0.17	0.29	0.46	0.66	0.90	1.18	1.50	1.89	2.34
9	0.15	0.26	0.41	0.59	0.80	1.05	1.33	1.69	2.08
10	0.13	0.24	0.37	0.53	0.72	0.94	1.20	1.52	1.87
12	0.11	0.20	0.31	0.44	0.60	0.78	1.00	1.27	1.56

Tabla A.7 Valores de ρ balanceado, ρ para lograr diversos valores de ϵ_t y ρ mínimo para flexión. Todos los valores son para secciones rectangulares reforzadas a tensión

f_y \ f'_c		3 000 lb/plg² $\beta_1 = 0.85$	4 000 lb/plg² $\beta_1 = 0.85$	5 000 lb/plg² $\beta_1 = 0.80$	6 000 lb/plg² $\beta_1 = 0.75$
Grado 40 40 000 lb/plg² (275.8 MPa)	ρ balanceado	0.0371	0.0495	0.0582	0.0655
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.004$	0.0232	0.0310	0.0364	0.0410
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.005$	0.0203	0.0271	0.0319	0.0359
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.0075$	0.0155	0.0206	0.0243	0.0273
	ρ mínimo para flexión	0.0050	0.0050	0.0053	0.0058
Grado 50 50 000 lb/plg² (344.8 MPa)	ρ balanceado	0.0275	0.0367	0.0432	0.0486
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.004$	0.0186	0.0248	0.0291	0.0328
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.005$	0.0163	0.0217	0.0255	0.0287
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.0075$	0.0124	0.0165	0.0194	0.0219
	ρ mínimo para flexión	0.0040	0.0040	0.0042	0.0046
Grado 60 60 000 lb/plg² (413.7 MPa)	ρ balanceado	0.0214	0.0285	0.0335	0.0377
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.004$	0.0155	0.0206	0.0243	0.0273
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.005$	0.0136	0.0181	0.0212	0.0239
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.0075$	0.0103	0.0138	0.0162	0.0182
	ρ mínimo para flexión	0.0033	0.0033	0.0035	0.0039
Grado 75 75 000 lb/plg² (517.1 MPa)	ρ balanceado	0.0155	0.0207	0.0243	0.0274
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.004$	0.0124	0.0165	0.0194	0.0219
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.005$	0.0108	0.0144	0.0170	0.0191
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.0075$	0.0083	0.0110	0.0130	0.0146
	ρ mínimo para flexión	0.0027	0.0027	0.0028	0.0031

Tabla A.8 f_y = 40 000 lb/plg^2; f'_c = 3 000 lb/plg^2. Unidades usuales en EUA

	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$
$\rho_{mín}$ por temperatura y contracción	0.0020	78.74	0.0061	232.3	0.0102	375.3	0.0143	507.6
	0.0021	82.62	0.0062	235.9	0.0103	378.6	0.0144	510.7
	0.0022	86.48	0.0063	239.5	0.0104	382.0	0.0145	513.8
	0.0023	90.34	0.0064	243.1	0.0105	385.3	0.0146	516.9
	0.0024	94.19	0.0065	246.7	0.0106	388.6	0.0147	520.0
	0.0025	98.04	0.0066	250.3	0.0107	392.0	0.0148	523.1
	0.0026	101.9	0.0067	253.9	0.0108	395.3	0.0149	526.1
	0.0027	105.7	0.0068	257.4	0.0109	398.6	0.0150	529.2
	0.0028	109.5	0.0069	261.0	0.0110	401.9	0.0151	532.2
	0.0029	113.4	0.0070	264.6	0.0111	405.2	0.0152	535.3
	0.0030	117.2	0.0071	268.1	0.0112	408.5	0.0153	538.3
	0.0031	121.0	0.0072	271.7	0.0113	411.8	0.0154	541.4
	0.0032	124.8	0.0073	275.2	0.0114	415.1	0.0155	544.4
	0.0033	128.6	0.0074	278.8	0.0115	418.4	0.0156	547.4
	0.0034	132.4	0.0075	282.3	0.0116	421.7	0.0157	550.4
	0.0035	136.2	0.0076	285.8	0.0117	424.9	0.0158	553.4
	0.0036	139.9	0.0077	289.3	0.0118	428.2	0.0159	556.4
	0.0037	143.7	0.0078	292.9	0.0119	431.4	0.0160	559.4
	0.0038	147.5	0.0079	296.4	0.0120	434.7	0.0161	562.4
	0.0039	151.2	0.0080	299.9	0.0121	437.9	0.0162	565.4
	0.0040	155.0	0.0081	303.4	0.0122	441.2	0.0163	568.4
	0.0041	158.7	0.0082	306.8	0.0123	444.4	0.0164	571.4
	0.0042	162.5	0.0083	310.3	0.0124	447.6	0.0165	574.3
	0.0043	166.2	0.0084	313.8	0.0125	450.8	0.0166	577.3
	0.0044	169.9	0.0085	317.3	0.0126	454.0	0.0167	580.2
	0.0045	173.6	0.0086	320.7	0.0127	457.2	0.0168	583.2
	0.0046	177.4	0.0087	324.2	0.0128	460.4	0.0169	586.1
	0.0047	181.1	0.0088	327.6	0.0129	463.6	0.0170	589.1
	0.0048	184.8	0.0089	331.1	0.0130	466.8	0.0171	592.0
	0.0049	188.5	0.0090	334.5	0.0131	470.0	0.0172	594.9
$\rho_{mín}$ por flexión	0.0050	192.1	0.0091	337.9	0.0132	473.2	0.0173	597.8
	0.0051	195.8	0.0092	341.4	0.0133	476.3	0.0174	600.7
	0.0052	199.5	0.0093	344.8	0.0134	479.5	0.0175	603.6
	0.0053	203.2	0.0094	348.2	0.0135	482.6	0.0176	606.5
	0.0054	206.8	0.0095	351.6	0.0136	485.8	0.0177	609.4
	0.0055	210.5	0.0096	355.0	0.0137	488.9	0.0178	612.3
	0.0056	214.1	0.0097	358.4	0.0138	492.1	0.0179	615.2
	0.0057	217.8	0.0098	361.8	0.0139	495.2	0.0180	618.0
	0.0058	221.4	0.0099	365.2	0.0140	498.3	0.0181	620.9
	0.0059	225.0	0.0100	368.5	0.0141	501.4	0.0182	623.8
	0.0060	228.7	0.0101	371.9	0.0142	504.5	0.0183	626.6

Table A.8 (Continuación)

ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$
0.0184	629.5	0.0189	643.6	0.0194	657.6	0.0199	671.4
0.0185	632.3	0.0190	646.4	0.0195	660.3	0.0200	674.1
0.0186	635.1	0.0191	649.2	0.0196	663.1	0.0201	676.9
0.0187	638.0	0.0192	652.0	0.0197	665.9	0.0202	679.6
0.0188	640.8	0.0193	654.8	0.0198	668.6	0.0203	682.3

Tabla A.9 $f_y = 40\,000$ lb/plg^2; $f'_c = 4\,000$ lb/plg^2. Unidades usuales en EUA

	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$		ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$
$\rho_{mín}$ por temperatura y contracción	0.0020	79.06		0.0046	179.0	0.0072	275.8	0.0098	369.3
	0.0021	82.96		0.0047	182.8	0.0073	279.4	0.0099	372.9
	0.0022	86.86		0.0048	186.6	0.0074	283.1	0.0100	376.4
	0.0023	90.75		0.0049	190.4	0.0075	286.7	0.0101	379.9
	0.0024	94.64	$\rho_{mín}$ por flexión	0.0050	194.1	0.0076	290.4	0.0102	383.4
	0.0025	98.53		0.0051	197.9	0.0077	294.0	0.0103	387.0
	0.0026	102.4		0.0052	201.6	0.0078	297.6	0.0104	390.5
	0.0027	106.3		0.0053	205.4	0.0079	301.3	0.0105	394.0
	0.0028	110.2		0.0054	209.1	0.0080	304.9	0.0106	397.5
	0.0029	114.0		0.0055	212.9	0.0081	308.5	0.0107	401.0
	0.0030	117.9		0.0056	216.6	0.0082	312.1	0.0108	404.5
	0.0031	121.7		0.0057	220.3	0.0083	315.7	0.0109	408.0
	0.0032	125.6		0.0058	224.1	0.0084	319.3	0.0110	411.4
	0.0033	129.4		0.0059	227.8	0.0085	322.9	0.0111	414.9
	0.0034	133.3		0.0060	231.5	0.0086	326.5	0.0112	418.4
	0.0035	137.1		0.0061	235.2	0.0087	330.1	0.0113	421.9
	0.0036	141.0		0.0062	238.9	0.0088	333.7	0.0114	425.3
	0.0037	144.8		0.0063	242.6	0.0089	337.3	0.0115	428.8
	0.0038	148.6		0.0064	246.3	0.0090	340.9	0.0116	432.2
	0.0039	152.4		0.0065	250.0	0.0091	344.5	0.0117	435.7
	0.0040	156.2		0.0066	253.7	0.0092	348.0	0.0118	439.1
	0.0041	160.0		0.0067	257.4	0.0093	351.6	0.0119	442.6
	0.0042	163.8		0.0068	261.1	0.0094	355.1	0.0120	446.0
	0.0043	167.6		0.0069	264.8	0.0095	358.7	0.0121	449.4
	0.0044	171.4		0.0070	268.4	0.0096	362.2	0.0122	452.9
	0.0045	175.2		0.0071	272.1	0.0097	365.8	0.0123	456.3

Tabla A.9 (Continuación)

ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$
0.0124	459.7	0.0161	582.8	0.0198	699.5	0.0235	809.7
0.0125	463.1	0.0162	586.1	0.0199	702.5	0.0236	812.5
0.0126	466.5	0.0163	589.3	0.0200	705.6	0.0237	815.4
0.0127	469.9	0.0164	592.5	0.0201	708.6	0.0238	818.3
0.0128	473.3	0.0165	595.7	0.0202	711.7	0.0239	821.2
0.0129	476.7	0.0166	599.0	0.0203	714.7	0.0240	824.1
0.0130	480.1	0.0167	602.2	0.0204	717.8	0.0241	826.9
0.0131	483.5	0.0168	605.4	0.0205	720.8	0.0242	829.8
0.0132	486.9	0.0169	608.6	0.0206	723.8	0.0243	832.6
0.0133	490.2	0.0170	611.8	0.0207	726.9	0.0244	835.5
0.0134	493.6	0.0171	615.0	0.0208	729.9	0.0245	838.3
0.0135	497.0	0.0172	618.2	0.0209	732.9	0.0246	841.2
0.0136	500.3	0.0173	621.4	0.0210	735.9	0.0247	844.0
0.0137	503.7	0.0174	624.5	0.0211	738.9	0.0248	846.8
0.0138	507.0	0.0175	627.7	0.0212	741.9	0.0249	849.7
0.0139	510.4	0.0176	630.9	0.0213	744.9	0.0250	852.5
0.0140	513.7	0.0177	634.1	0.0214	747.9	0.0251	855.3
0.0141	517.1	0.0178	637.2	0.0215	750.9	0.0252	858.1
0.0142	520.4	0.0179	640.4	0.0216	753.9	0.0253	860.9
0.0143	523.7	0.0180	643.5	0.0217	756.9	0.0254	863.7
0.0144	527.1	0.0181	646.7	0.0218	759.8	0.0255	866.5
0.0145	530.4	0.0182	649.8	0.0219	762.8	0.0256	869.3
0.0146	533.7	0.0183	653.0	0.0220	765.8	0.0257	872.1
0.0147	537.0	0.0184	656.1	0.0221	768.7	0.0258	874.9
0.0148	540.3	0.0185	659.2	0.0222	771.7	0.0259	877.7
0.0149	543.6	0.0186	662.3	0.0223	774.6	0.0260	880.5
0.0150	546.9	0.0187	665.5	0.0224	777.6	0.0261	883.2
0.0151	550.2	0.0188	668.6	0.0225	780.5	0.0262	886.0
0.0152	553.5	0.0189	671.7	0.0226	783.4	0.0263	888.7
0.0153	556.7	0.0190	674.8	0.0227	786.4	0.0264	891.5
0.0154	560.0	0.0191	677.9	0.0228	789.3	0.0265	894.3
0.0155	563.3	0.0192	681.0	0.0229	792.2	0.0266	897.0
0.0156	566.6	0.0193	684.1	0.0230	795.1	0.0267	899.7
0.0157	569.8	0.0194	687.2	0.0231	798.1	0.0268	902.5
0.0158	573.1	0.0195	690.3	0.0232	801.0	0.0269	905.2
0.0159	576.3	0.0196	693.3	0.0233	803.9	0.0270	907.9
0.0160	579.6	0.0197	696.4	0.0234	806.8	0.0271	910.7

Tabla A.10 $f_y = 50\,000$ lb/plg^2; $f'_c = 3\,000$ lb/plg^2. Unidades usuales en EUA

	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$
$\rho_{mín}$ por temperatura y contracción	0.0020	98.04	0.0056	264.6	0.0092	418.4	0.0128	559.4
	0.0021	102.8	0.0057	269.0	0.0093	422.5	0.0129	563.2
	0.0022	107.6	0.0058	273.5	0.0094	426.6	0.0130	566.9
	0.0023	112.4	0.0059	277.9	0.0095	430.6	0.0131	570.6
	0.0024	117.2	0.0060	282.3	0.0096	434.7	0.0132	574.3
	0.0025	121.9	0.0061	286.7	0.0097	438.7	0.0133	578.0
	0.0026	126.7	0.0062	291.1	0.0098	442.8	0.0134	581.7
	0.0027	131.4	0.0063	295.5	0.0099	446.8	0.0135	585.4
	0.0028	136.2	0.0064	299.9	0.0100	450.8	0.0136	589.1
	0.0029	140.9	0.0065	304.2	0.0101	454.8	0.0137	592.7
	0.0030	145.6	0.0066	308.6	0.0102	458.8	0.0138	596.4
	0.0031	150.3	0.0067	312.9	0.0103	462.8	0.0139	600.0
	0.0032	155.0	0.0068	317.3	0.0104	466.8	0.0140	603.6
	0.0033	159.7	0.0069	321.6	0.0105	470.8	0.0141	607.2
	0.0034	164.3	0.0070	325.9	0.0106	474.8	0.0142	610.9
	0.0035	169.0	0.0071	330.2	0.0107	478.7	0.0143	614.5
	0.0036	173.6	0.0072	334.5	0.0108	482.6	0.0144	618.0
	0.0037	178.3	0.0073	338.8	0.0109	486.6	0.0145	621.6
	0.0038	182.9	0.0074	343.1	0.0110	490.5	0.0146	625.2
	0.0039	187.5	0.0075	347.3	0.0111	494.4	0.0147	628.7
$\rho_{mín}$ por flexión	0.0040	192.1	0.0076	351.6	0.0112	498.3	0.0148	632.3
	0.0041	196.7	0.0077	355.8	0.0113	502.2	0.0149	635.8
	0.0042	201.3	0.0078	360.1	0.0114	506.1	0.0150	639.4
	0.0043	205.9	0.0079	364.3	0.0115	510.0	0.0151	642.9
	0.0044	210.5	0.0080	368.5	0.0116	513.8	0.0152	646.4
	0.0045	215.0	0.0081	372.7	0.0117	517.7	0.0153	649.9
	0.0046	219.6	0.0082	376.9	0.0118	521.5	0.0154	653.4
	0.0047	224.1	0.0083	381.1	0.0119	525.4	0.0155	656.9
	0.0048	228.7	0.0084	385.3	0.0120	529.2	0.0156	660.3
	0.0049	233.2	0.0085	389.5	0.0121	533.0	0.0157	663.8
	0.0050	237.7	0.0086	393.6	0.0122	536.8	0.0158	667.3
	0.0051	242.2	0.0087	397.8	0.0123	540.6	0.0159	670.7
	0.0052	246.7	0.0088	401.9	0.0124	544.4	0.0160	674.1
	0.0053	251.2	0.0089	406.1	0.0125	548.2	0.0161	677.5
	0.0054	255.7	0.0090	410.2	0.0126	551.9	0.0162	681.0
	0.0055	260.1	0.0091	414.3	0.0127	555.7	0.0163	684.4

Tabla A.11 f_y = 50 000 lb/plg^2; f'_c = 4 000 lb/plg^2. Unidades usuales en EUA

	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$
$\rho_{mín}$ por temperatura y contracción	0.0020	98.53	0.0061	291.3	0.0102	471.6	0.0143	639.6
	0.0021	103.4	0.0062	295.8	0.0103	475.9	0.0144	643.5
	0.0022	108.2	0.0063	300.4	0.0104	480.1	0.0145	647.5
	0.0023	113.0	0.0064	304.9	0.0105	484.3	0.0146	651.4
	0.0024	117.9	0.0065	309.4	0.0106	488.6	0.0147	655.3
	0.0025	122.7	0.0066	313.9	0.0107	492.8	0.0148	659.2
	0.0026	127.5	0.0067	318.4	0.0108	497.0	0.0149	663.1
	0.0027	132.3	0.0068	322.9	0.0109	501.2	0.0150	667.0
	0.0028	137.1	0.0069	327.4	0.0110	505.4	0.0151	670.9
	0.0029	141.9	0.0070	331.9	0.0111	509.6	0.0152	674.8
	0.0030	146.7	0.0071	336.4	0.0112	513.7	0.0153	678.7
	0.0031	151.5	0.0072	340.9	0.0113	517.9	0.0154	682.5
	0.0032	156.2	0.0073	345.3	0.0114	522.1	0.0155	686.4
	0.0033	161.0	0.0074	349.8	0.0115	526.2	0.0156	690.3
	0.0034	165.7	0.0075	354.3	0.0116	530.4	0.0157	694.1
	0.0035	170.5	0.0076	358.7	0.0117	534.5	0.0158	697.9
	0.0036	175.2	0.0077	363.1	0.0118	538.6	0.0159	701.8
	0.0037	180.0	0.0078	367.6	0.0119	542.8	0.0160	705.6
	0.0038	184.7	0.0079	372.0	0.0120	546.9	0.0161	709.4
	0.0039	189.4	0.0080	376.4	0.0121	551.0	0.0162	713.2
$\rho_{mín}$ por flexión	0.0040	194.1	0.0081	380.8	0.0122	555.1	0.0163	717.0
	0.0041	198.8	0.0082	385.2	0.0123	559.2	0.0164	720.8
	0.0042	203.5	0.0083	389.6	0.0124	563.3	0.0165	724.6
	0.0043	208.2	0.0084	394.0	0.0125	567.4	0.0166	728.4
	0.0044	212.9	0.0085	398.4	0.0126	571.4	0.0167	732.1
	0.0045	217.5	0.0086	402.7	0.0127	575.5	0.0168	735.9
	0.0046	222.2	0.0087	407.1	0.0128	579.6	0.0169	327.4
	0.0047	226.9	0.0088	411.4	0.0129	583.6	0.0170	743.4
	0.0048	231.5	0.0089	415.8	0.0130	587.7	0.0171	747.2
	0.0049	236.1	0.0090	420.1	0.0131	591.7	0.0172	750.9
	0.0050	240.8	0.0091	424.5	0.0132	595.7	0.0173	754.6
	0.0051	245.4	0.0092	428.8	0.0133	599.8	0.0174	758.3
	0.0052	250.0	0.0093	433.1	0.0134	603.8	0.0175	762.1
	0.0053	254.6	0.0094	437.4	0.0135	607.8	0.0176	765.8
	0.0054	259.2	0.0095	441.7	0.0136	611.8	0.0177	769.5
	0.0055	263.8	0.0096	446.0	0.0137	615.8	0.0178	773.2
	0.0056	268.4	0.0097	450.3	0.0138	619.8	0.0179	776.8
	0.0057	273.0	0.0098	454.6	0.0139	623.7	0.0180	780.5
	0.0058	277.6	0.0099	458.9	0.0140	627.7	0.0181	784.2
	0.0059	282.2	0.0100	463.1	0.0141	631.7	0.0182	787.8
	0.0060	286.7	0.0101	467.4	0.0142	635.6	0.0183	791.5

Tabla A.11 (Continuación)

ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$
0.0184	795.1	0.0193	827.6	0.0202	859.5	0.0210	887.4
0.0185	798.8	0.0194	831.2	0.0203	863.0	0.0211	890.8
0.0186	802.4	0.0195	834.8	0.0204	866.5	0.0212	894.3
0.0187	806.0	0.0196	838.3	0.0205	870.0	0.0213	897.7
0.0188	809.7	0.0197	841.9	0.0206	873.5	0.0214	901.1
0.0189	813.3	0.0198	845.4	0.0207	877.0	0.0215	904.5
0.0190	816.9	0.0199	849.0	0.0208	880.5	0.0216	907.9
0.0191	820.5	0.0200	852.5	0.0209	883.9	0.0217	911.3
0.0192	824.1	0.0201	856.0				

Tabla A.12 f_y = 60 000 lb/plg^2; f'_c = 3 000 lb/plg^2. Unidades usuales en EUA

	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$
$\rho_{mín}$ por temperatura y contracción	0.0018	105.7	0.0039	223.2	0.0060	334.5	0.0081	439.5
	0.0019	111.5	0.0040	228.7	0.0061	339.7	0.0082	444.4
	0.0020	117.2	0.0041	234.1	0.0062	344.8	0.0083	449.2
	0.0021	122.9	0.0042	239.5	0.0063	349.9	0.0084	454.0
	0.0022	128.6	0.0043	244.9	0.0064	355.0	0.0085	458.8
	0.0023	134.3	0.0044	250.3	0.0065	360.1	0.0086	463.6
	0.0024	139.9	0.0045	255.7	0.0066	365.2	0.0087	468.4
	0.0025	145.6	0.0046	261.0	0.0067	370.2	0.0088	473.2
	0.0026	151.2	0.0047	266.4	0.0068	375.3	0.0089	477.9
	0.0027	156.9	0.0048	271.7	0.0069	380.3	0.0090	482.6
	0.0028	162.5	0.0049	277.0	0.0070	385.3	0.0091	487.4
	0.0029	168.1	0.0050	282.3	0.0071	390.3	0.0092	492.1
	0.0030	173.7	0.0051	287.6	0.0072	395.3	0.0093	496.8
	0.0031	179.2	0.0052	292.9	0.0073	400.3	0.0094	501.4
	0.0032	184.8	0.0053	298.1	0.0074	405.2	0.0095	506.1
$\rho_{mín}$ por flexión	0.0033	190.3	0.0054	303.4	0.0075	410.2	0.0096	510.7
	0.0034	195.8	0.0055	308.6	0.0076	415.1	0.0097	515.4
	0.0035	201.3	0.0056	313.8	0.0077	420.0	0.0098	520.0
	0.0036	206.8	0.0057	319.0	0.0078	424.9	0.0099	524.6
	0.0037	212.3	0.0058	324.2	0.0079	429.8	0.0100	529.2
	0.0038	217.8	0.0059	329.4	0.0080	434.7	0.0101	533.8

Tabla A.12 (Continuación)

ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$
0.0102	538.3	0.0111	578.8	0.0120	618.0	0.0129	656.2
0.0103	542.9	0.0112	582.3	0.0121	622.3	0.0130	660.9
0.0104	547.4	0.0113	587.6	0.0122	626.6	0.0131	664.5
0.0105	551.9	0.0114	592.0	0.0123	630.9	0.0132	668.6
0.0106	556.4	0.0115	596.4	0.0124	635.1	0.0133	672.8
0.0107	560.9	0.0116	600.7	0.0125	639.4	0.0134	676.9
0.0108	565.4	0.0117	605.1	0.0126	643.6	0.0135	681.0
0.0109	569.9	0.0118	609.4	0.0127	647.8	0.0136	685.0
0.0110	574.3	0.0119	613.7	0.0128	652.0		

Tabla A.13 f_y = 60 000 lb/plg^2; f'_c = 4 000 lb/plg^2. Unidades usuales en EUA

	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$
$\rho_{mín}$ por temperatura y contracción	0.0018	106.3	0.0041	237.1	0.0064	362.2	0.0087	481.8
	0.0019	112.1	0.0042	242.6	0.0065	367.6	0.0088	486.9
	0.0020	117.1	0.0043	248.2	0.0066	372.9	0.0089	491.9
	0.0021	123.7	0.0044	253.7	0.0067	378.2	0.0090	497.0
	0.0022	129.4	0.0045	259.2	0.0068	383.4	0.0091	502.0
	0.0023	135.2	0.0046	264.8	0.0069	388.7	0.0092	507.1
	0.0024	141.0	0.0047	270.3	0.0070	394.0	0.0093	512.1
	0.0025	146.7	0.0048	275.8	0.0071	399.2	0.0094	517.1
	0.0026	152.4	0.0049	281.2	0.0072	404.5	0.0095	522.1
	0.0027	158.1	0.0050	286.7	0.0073	409.7	0.0096	527.1
	0.0028	163.8	0.0051	292.2	0.0074	414.9	0.0097	532.0
	0.0029	169.5	0.0052	297.6	0.0075	420.1	0.0098	537.0
	0.0030	175.2	0.0053	303.1	0.0076	425.3	0.0099	542.0
	0.0031	180.9	0.0054	308.5	0.0077	430.5	0.0100	546.9
	0.0032	186.6	0.0055	313.9	0.0078	435.7	0.0101	551.8
$\rho_{mín}$ por flexión	0.0033	192.2	0.0056	319.3	0.0079	440.9	0.0102	556.7
	0.0034	197.9	0.0057	324.7	0.0080	446.0	0.0103	561.7
	0.0035	203.5	0.0058	330.1	0.0081	451.2	0.0104	566.6
	0.0036	209.1	0.0059	335.5	0.0082	456.3	0.0105	571.5
	0.0037	214.7	0.0060	340.9	0.0083	461.4	0.0106	576.3
	0.0038	220.3	0.0061	346.2	0.0084	466.5	0.0107	581.2
	0.0039	225.9	0.0062	351.6	0.0085	471.6	0.0108	586.1
	0.0040	231.5	0.0063	356.9	0.0086	476.7	0.0109	590.9

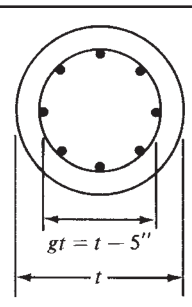
Tabla A.13 (Continuación)

ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$
0.0110	595.7	0.0128	681.0	0.0146	762.8	0.0164	841.2
0.0111	600.6	0.0129	685.6	0.0147	767.2	0.0165	845.4
0.0112	605.4	0.0130	690.3	0.0148	771.7	0.0166	849.7
0.0113	610.2	0.0131	694.9	0.0149	776.1	0.0167	853.9
0.0114	615.0	0.0132	699.5	0.0150	780.5	0.0168	858.1
0.0115	619.8	0.0133	704.1	0.0151	784.9	0.0169	862.3
0.0116	624.5	0.0134	708.6	0.0152	789.3	0.0170	866.5
0.0117	629.3	0.0135	713.2	0.0153	793.7	0.0171	870.7
0.0118	634.1	0.0136	717.8	0.0154	798.1	0.0172	874.9
0.0119	638.8	0.0137	722.3	0.0155	802.4	0.0173	879.1
0.0120	643.5	0.0138	726.9	0.0156	806.8	0.0174	883.2
0.0121	648.2	0.0139	731.4	0.0157	811.1	0.0175	887.4
0.0122	653.0	0.0140	735.9	0.0158	815.4	0.0176	891.5
0.0123	657.7	0.0141	740.4	0.0159	819.7	0.0177	895.6
0.0124	662.3	0.0142	744.9	0.0160	824.1	0.0178	899.7
0.0125	667.0	0.0143	749.4	0.0161	828.3	0.0179	903.9
0.0126	671.7	0.0144	753.9	0.0162	832.6	0.0180	907.9
0.0127	676.3	0.0145	758.3	0.0163	836.9	0.0181	912.0

Tabla A.14 Tamaños y paso de las espirales, código ACI. Unidades usuales en EUA

Diámetro de la columna (plg)	Extremo a extremo de la espiral (plg)	f'_c			
		2 500	3 000	4 000	5 000
f_y = 40 000:					
14, 15	11, 12	$\frac{3}{8}$–2	$\frac{3}{8}$–$1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$–$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$–$1\frac{3}{4}$
16	13	$\frac{3}{8}$–2	$\frac{3}{8}$–$1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$–$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$–2
17–19	14–16	$\frac{3}{8}$–$2\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$–$1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$–$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$–2
20–23	17–20	$\frac{3}{8}$–$2\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$–$1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$–$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$–2
24–30	21–27	$\frac{3}{8}$–$2\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$–2	$\frac{1}{2}$–$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$–2
f_y = 60 000:					
14, 15	11, 12	$\frac{1}{4}$–$1\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$–$2\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$–2	$\frac{1}{2}$–$2\frac{3}{4}$
16–23	13–20	$\frac{1}{4}$–$1\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$–$2\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$–2	$\frac{1}{2}$–3
24–29	21–26	$\frac{1}{4}$–$1\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$–3	$\frac{3}{8}$–$2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$–3
30	17	$\frac{1}{4}$–$1\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$–3	$\frac{3}{8}$–$2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$–$3\frac{1}{4}$

Tabla A.15 Pesos, áreas y momentos de inercia de columnas circulares y momentos de inercia de columnas verticales dispuestas en un círculo de 5 plg menor que el diámetro de la columna. Unidades usuales en USA

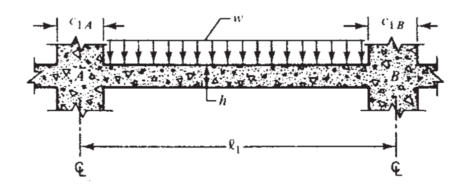


Diámetro h de la columna (plg)	Peso por pie (lb)	Área (plg^2)	I (plg^4)	$A_{s'}$ donde $\rho_g = 0.01$*	I_s (plg^4)†
12	118	113	1 018	1.13	6.92
13	138	133	1 402	1.33	10.64
14	160	154	1 886	1.54	15.59
15	184	177	2 485	1.77	22.13
16	210	201	3 217	2.01	30.40
17	237	227	4 100	2.27	40.86
18	265	255	5 153	2.55	53.87
19	295	284	6 397	2.84	69.58
20	327	314	7 854	3.14	88.31
21	361	346	9 547	3.46	110.7
22	396	380	11 500	3.80	137.2
23	433	416	13 740	4.16	168.4
24	471	452	16 290	4.52	203.9
25	511	491	19 170	4.91	245.5
26	553	531	22 430	5.31	292.7
27	597	573	26 090	5.73	346.7
28	642	616	30 170	6.16	407.3
29	688	661	34 720	6.61	475.9
30	736	707	39 760	7.07	552.3

*Para otros valores de ρ_g, multiplique el valor en la tabla por 100 ρ_g.

†Las varillas se suponen transformadas en un cilindro de pared delgada con la misma sección transversal que las varillas. Entonces, $I_s = A_s(\gamma t)^2/8$.

Tabla A.16 Constantes de distribución de momentos en losas sin ábacos[a]



Dimensión de la columna		Carga uniforme FEM = Coef. $(w\ell_2\ell_1^2)$		Factor de rigidez†		Factor de transporte	
$\frac{c_{1A}}{\ell_1}$	$\frac{c_{1B}}{\ell_1}$	M_{AB}	M_{BA}	k_{AB}	k_{BA}	COF_{AB}	COF_{BA}
	0.00	0.083	0.083	4.00	4.00	0.500	0.500
	0.05	0.083	0.084	4.01	4.04	0.504	0.500
	0.10	0.082	0.086	4.03	4.15	0.513	0.499
	0.15	0.081	0.089	4.07	4.32	0.528	0.498
0.00	0.20	0.079	0.093	4.12	4.56	0.548	0.495
	0.25	0.077	0.097	4.18	4.88	0.573	0.491
	0.30	0.075	0.102	4.25	5.28	0.603	0.485
	0.35	0.073	0.107	4.33	5.78	0.638	0.478
	0.05	0.084	0.084	4.05	4.05	0.503	0.503
	0.10	0.083	0.086	4.07	4.15	0.513	0.503
	0.15	0.081	0.089	4.11	4.33	0.528	0.501
0.05	0.20	0.080	0.092	4.16	4.58	0.548	0.499
	0.25	0.078	0.096	4.22	4.89	0.573	0.494
	0.30	0.076	0.101	4.29	5.30	0.603	0.489
	0.35	0.074	0.107	4.37	5.80	0.638	0.481
	0.10	0.085	0.085	4.18	4.18	0.513	0.513
	0.15	0.083	0.088	4.22	4.36	0.528	0.511
0.10	0.20	0.082	0.091	4.27	4.61	0.548	0.508
	0.25	0.080	0.095	4.34	4.93	0.573	0.504
	0.30	0.078	0.100	4.41	5.34	0.602	0.498
	0.35	0.075	0.105	4.50	5.85	0.637	0.491
	0.15	0.086	0.086	4.40	4.40	0.526	0.526
	0.20	0.084	0.090	4.46	4.65	0.546	0.523
0.15	0.25	0.083	0.094	4.53	4.98	0.571	0.519
	0.30	0.080	0.099	4.61	5.40	0.601	0.513
	0.35	0.078	0.104	4.70	5.92	0.635	0.505
	0.20	0.088	0.088	4.72	4.72	0.543	0.543

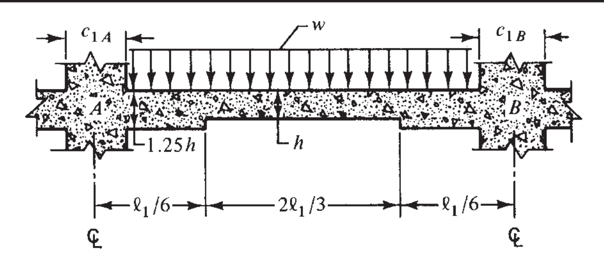
Table A.16 (Continuación)

Dimensión de la columna		Carga uniforme FEM = Coef. ($w\ell_2\ell_1^2$)		Factor de rigidez†		Factor de transporte	
$\frac{c_{1A}}{\ell_1}$	$\frac{c_{1B}}{\ell_1}$	M_{AB}	M_{BA}	k_{AB}	k_{BA}	COF_{AB}	COF_{BA}
0.20	0.25	0.086	0.092	4.79	5.05	0.568	0.539
	0.30	0.083	0.097	4.88	5.48	0.597	0.532
	0.35	0.081	0.102	4.99	6.01	0.632	0.524
	0.25	0.090	0.090	5.14	5.14	0.563	0.563
0.25	0.30	0.088	0.095	5.24	5.58	0.592	0.556
	0.35	0.085	0.100	5.36	6.12	0.626	0.548
0.30	0.30	0.092	0.092	5.69	5.69	0.585	0.585
	0.35	0.090	0.097	5.83	6.26	0.619	0.576
0.35	0.35	0.095	0.095	6.42	6.42	0.609	0.609

[a]Aplicable cuando $c_1/\ell_1 = c_2/\ell_2$. Para otras relaciones entre éstas, las constantes darán un pequeño error.

†La rigidez es $K_{AB} = k_{AB}E\frac{\ell_2 h^3}{12\ell_1}$ y $K_{BA} = k_{BA}E\frac{\ell_2 h^3}{12\ell_1}$

Tabla A.17 Constantes de distribución de momentos en losas con ábacos[a]



Dimensión de la columna		Carga uniforme FEM = Coef. $(w\ell_2\ell_1^2)$		Factor de rigidez†		Factor de transporte	
$\frac{c_{1A}}{\ell_1}$	$\frac{c_{1B}}{\ell_1}$	M_{AB}	M_{BA}	k_{AB}	k_{BA}	COF_{AB}	COF_{BA}
	0.00	0.088	0.088	4.78	4.78	0.541	0.541
	0.05	0.087	0.089	4.80	4.82	0.545	0.541
	0.10	0.087	0.090	4.83	4.94	0.553	0.541
0.00	0.15	0.085	0.093	4.87	5.12	0.567	0.540
	0.20	0.084	0.096	4.93	5.36	0.585	0.537
	0.25	0.082	0.100	5.00	5.68	0.606	0.534
	0.30	0.080	0.105	5.09	6.07	0.631	0.529
	0.05	0.088	0.088	4.84	4.84	0.545	0.545
	0.10	0.087	0.090	4.87	4.95	0.553	0.544
	0.15	0.085	0.093	4.91	5.13	0.567	0.543
0.05	0.20	0.084	0.096	4.97	5.38	0.584	0.541
	0.25	0.082	0.100	5.05	5.70	0.606	0.537
	0.30	0.080	0.104	5.13	6.09	0.632	0.532
	0.10	0.089	0.089	4.98	4.98	0.553	0.553
	0.15	0.088	0.092	5.03	5.16	0.566	0.551
0.10	0.20	0.086	0.094	5.09	5.42	0.584	0.549
	0.25	0.084	0.099	5.17	5.74	0.606	0.546
	0.30	0.082	0.103	5.26	6.13	0.631	0.541
	0.15	0.090	0.090	5.22	5.22	0.565	0.565
	0.20	0.089	0.094	5.28	5.47	0.583	0.563
0.15	0.25	0.087	0.097	5.37	5.80	0.604	0.559
	0.30	0.085	0.102	5.46	6.21	0.630	0.554
	0.20	0.092	0.092	5.55	5.55	0.580	0.580
0.20	0.25	0.090	0.096	5.64	5.88	0.602	0.577
	0.30	0.088	0.100	5.74	6.30	0.627	0.571
0.25	0.25	0.094	0.094	5.98	5.98	0.598	0.598
	0.30	0.091	0.098	6.10	6.41	0.622	0.593
0.30	0.30	0.095	0.095	6.54	6.54	0.617	0.617

[a]Aplicable cuando $c_1/\ell_1 = c_2/\ell_2$. Para otras relaciones entre éstas, las constantes darán un pequeño error.

†La rigidez es $K_{AB} = k_{AB}E\frac{\ell_2 h^3}{12\ell_1}$ y $K_{BA} = k_{BA}E\frac{\ell_2 h^3}{12\ell_1}$

Tabla A.18 Constantes de distribución de momentos para miembros de viga-losa con capiteles en las columnas

FEM (carga uniforme w) $= Mw\ell_2(\ell_1)^2$
K (rigidez) $= kE\ell_2h^3/12\ell_1$
Factor de transporte $= C$

c_1/ℓ_1	c_1/ℓ_2	M	k	C	c_1/ℓ_1	c_2/ℓ_2	M	k	C
	0.00	0.083	4.000	0.500		0.00	0.083	4.000	0.500
	0.05	0.083	4.000	0.500		0.05	0.085	4.170	0.511
	0.10	0.083	4.000	0.500		0.10	0.086	4.346	0.522
	0.15	0.083	4.000	0.500		0.15	0.087	4.529	0.532
	0.20	0.083	4.000	0.500		0.20	0.088	4.717	0.543
0.00	0.25	0.083	4.000	0.500	0.20	0.25	0.089	4.910	0.554
	0.30	0.083	4.000	0.500		0.30	0.090	5.108	0.564
	0.35	0.083	4.000	0.500		0.35	0.091	5.308	0.574
	0.40	0.083	4.000	0.500		0.40	0.092	5.509	0.584
	0.45	0.083	4.000	0.500		0.45	0.093	5.710	0.593
	0.50	0.083	4.000	0.500		0.50	0.094	5.908	0.602
	0.00	0.083	4.000	0.500		0.00	0.083	4.000	0.500
	0.05	0.084	4.047	0.503		0.05	0.085	4.204	0.512
	0.10	0.084	4.093	0.507		0.10	0.086	4.420	0.525
	0.15	0.084	4.138	0.510		0.15	0.087	4.648	0.538
	0.20	0.085	4.181	0.513		0.20	0.089	4.887	0.550
0.05	0.25	0.085	4.222	0.516	0.25	0.25	0.090	5.138	0.563
	0.30	0.085	4.261	0.518		0.30	0.091	5.401	0.576
	0.35	0.086	4.299	0.521		0.35	0.093	5.672	0.588
	0.40	0.086	4.334	0.523		0.40	0.094	5.952	0.600
	0.45	0.086	4.368	0.526		0.45	0.095	6.238	0.612
	0.50	0.086	4.398	0.528		0.50	0.096	6.527	0.623
	0.00	0.083	4.000	0.500		0.00	0.083	4.000	0.500
	0.05	0.084	4.091	0.506		0.05	0.085	4.235	0.514
	0.10	0.085	4.182	0.513		0.10	0.086	4.488	0.527
	0.15	0.085	4.272	0.519		0.15	0.088	4.760	0.542
	0.20	0.086	4.362	0.524		0.20	0.089	5.050	0.556
0.10	0.25	0.087	4.449	0.530	0.30	0.25	0.091	5.361	0.571
	0.30	0.087	4.535	0.535		0.30	0.092	5.692	0.585
	0.35	0.088	4.618	0.540		0.35	0.094	6.044	0.600
	0.40	0.088	4.698	0.545		0.40	0.095	6.414	0.614
	0.45	0.089	4.774	0.550		0.45	0.096	6.802	0.628
	0.50	0.089	4.846	0.554		0.50	0.098	7.205	0.642
	0.00	0.083	4.000	0.500		0.00	0.083	4.000	0.500
	0.05	0.084	4.132	0.509		0.05	0.085	4.264	0.514
	0.10	0.085	4.267	0.517		0.10	0.087	4.551	0.529
	0.15	0.086	4.403	0.526		0.15	0.088	4.864	0.545
	0.20	0.087	4.541	0.534		0.20	0.090	5.204	0.560
0.15	0.25	0.088	4.680	0.543	0.35	0.25	0.091	5.575	0.576
	0.30	0.089	4.818	0.550		0.30	0.093	5.979	0.593

Tabla A.18 (Continuación)

c_1/ℓ_1	c_1/ℓ_2	M	k	C	c_1/ℓ_1	c_1/ℓ_2	M	k	C
	0.35	0.090	4.955	0.558		0.35	0.095	6.416	0.609
	0.40	0.090	5.090	0.565		0.40	0.096	6.888	0.626
	0.45	0.091	5.222	0.572		0.45	0.098	7.395	0.642
	0.50	0.092	5.349	0.579		0.50	0.099	7.935	0.658
	0.00	0.083	4.000	0.500		0.30	0.094	6.517	0.602
	0.05	0.085	4.289	0.515		0.35	0.096	7.136	0.621
	0.10	0.087	4.607	0.530		0.40	0.098	7.836	0.642
	0.15	0.088	4.959	0.546		0.45	0.100	8.625	0.662
	0.20	0.090	5.348	0.563		0.50	0.101	9.514	0.683
0.40	0.25	0.092	5.778	0.580		0.00	0.083	4.000	0.500
	0.30	0.094	6.255	0.598		0.05	0.085	4.331	0.515
	0.35	0.095	6.782	0.617		0.10	0.087	4.703	0.530
	0.40	0.097	7.365	0.635		0.15	0.088	5.123	0.547
	0.45	0.099	8.007	0.654		0.20	0.090	5.599	0.564
	0.50	0.100	8.710	0.672	0.50	0.25	0.092	6.141	0.583
	0.00	0.083	4.000	0.500		0.30	0.094	6.760	0.603
	0.05	0.085	4.311	0.515		0.35	0.096	7.470	0.624
	0.10	0.087	4.658	0.530		0.40	0.098	8.289	0.645
	0.15	0.088	5.046	0.547		0.45	0.100	9.234	0.667
	0.20	0.090	5.480	0.564		0.50	0.102	10.329	0.690
0.45	0.25	0.092	5.967	0.583					

Tabla A.19 Constantes de distribución de momentos para miembros de viga-losa con capiteles en las columnas

FEM (carga uniforme w) $= Mw\ell(\ell_1^2)$

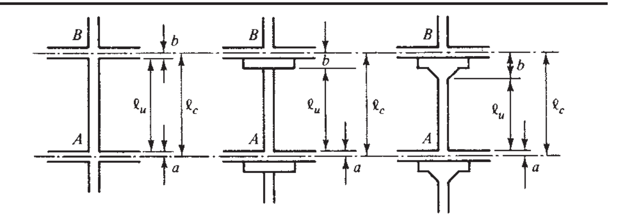
K (rigidez) $= kE\ell_2h^3/12\ell_1$

		Constantes para $h_2 = 1.25h_1$			Constantes para $h_2 = 1.5h_2$		
c_1/ℓ_1	c_2/ℓ_2	M	k	C	M	k	C
	0.00	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.10	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
0.00	0.15	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.20	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.25	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.30	0.088	4.797	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.00	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.088	4.846	0.545	0.093	5.890	0.591
	0.10	0.089	4.896	0.548	0.093	5.942	0.594

Tabla A.19 (Continuación)

		Constantes para $h_2 = 1.25h_1$			Constantes para $h_2 = 1.5h_2$		
c_1/ℓ_1	c_2/ℓ_2	M	k	C	M	k	C
0.05	0.15	0.089	4.944	0.551	0.093	5.993	0.596
	0.20	0.089	4.990	0.553	0.094	6.041	0.598
	0.25	0.089	5.035	0.556	0.094	6.087	0.600
	0.30	0.090	5.077	0.558	0.094	6.131	0.602
	0.00	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.088	4.894	0.548	0.093	5.940	0.593
	0.10	0.089	4.992	0.553	0.094	6.042	0.598
0.10	0.15	0.090	5.039	0.559	0.094	6.142	0.602
	0.20	0.090	5.184	0.564	0.094	6.240	0.607
	0.25	0.091	5.278	0.569	0.095	6.335	0.611
	0.30	0.091	5.368	0.573	0.095	6.427	0.615
	0.00	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.089	4.938	0.550	0.093	5.986	0.595
	0.10	0.090	5.082	0.558	0.094	6.135	0.602
0.15	0.15	0.090	5.228	0.565	0.095	6.284	0.608
	0.20	0.091	5.374	0.573	0.095	6.432	0.614
	0.25	0.092	5.520	0.580	0.096	6.579	0.620
	0.30	0.092	5.665	0.587	0.096	6.723	0.626
	0.00	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.089	4.978	0.552	0.093	6.027	0.597
	0.10	0.090	5.167	0.562	0.094	6.221	0.605
0.20	0.15	0.091	5.361	0.571	0.095	6.418	0.613
	0.20	0.092	5.558	0.581	0.096	6.616	0.621
	0.25	0.093	5.760	0.590	0.096	6.816	0.628
	0.30	0.094	5.962	0.590	0.097	7.015	0.635
	0.00	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.089	5.015	0.553	0.094	6.065	0.598
	0.10	0.090	5.245	0.565	0.094	6.300	0.608
0.25	0.15	0.091	5.485	0.576	0.095	6.543	0.617
	0.20	0.092	5.735	0.587	0.096	6.790	0.626
	0.25	0.094	5.994	0.598	0.097	7.043	0.635
	0.30	0.095	6.261	0.600	0.098	7.298	0.644
	0.00	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.089	5.048	0.554	0.094	6.099	0.599
	0.10	0.090	5.317	0.567	0.095	6.372	0.610
0.30	0.15	0.092	5.601	0.580	0.096	6.657	0.620
	0.20	0.093	5.902	0.593	0.097	6.953	0.631
	0.25	0.094	6.219	0.605	0.098	7.258	0.641
	0.30	0.095	6.550	0.618	0.099	7.571	0.651

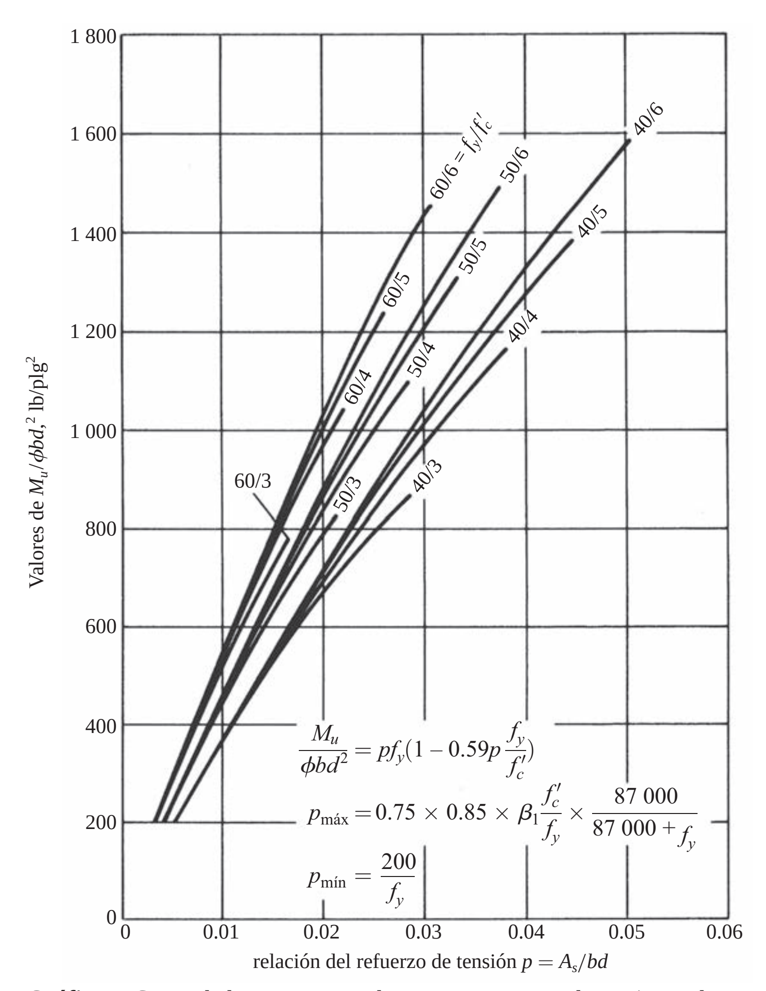
Tabla A20 Factores de rigidez y de transporte para columnas



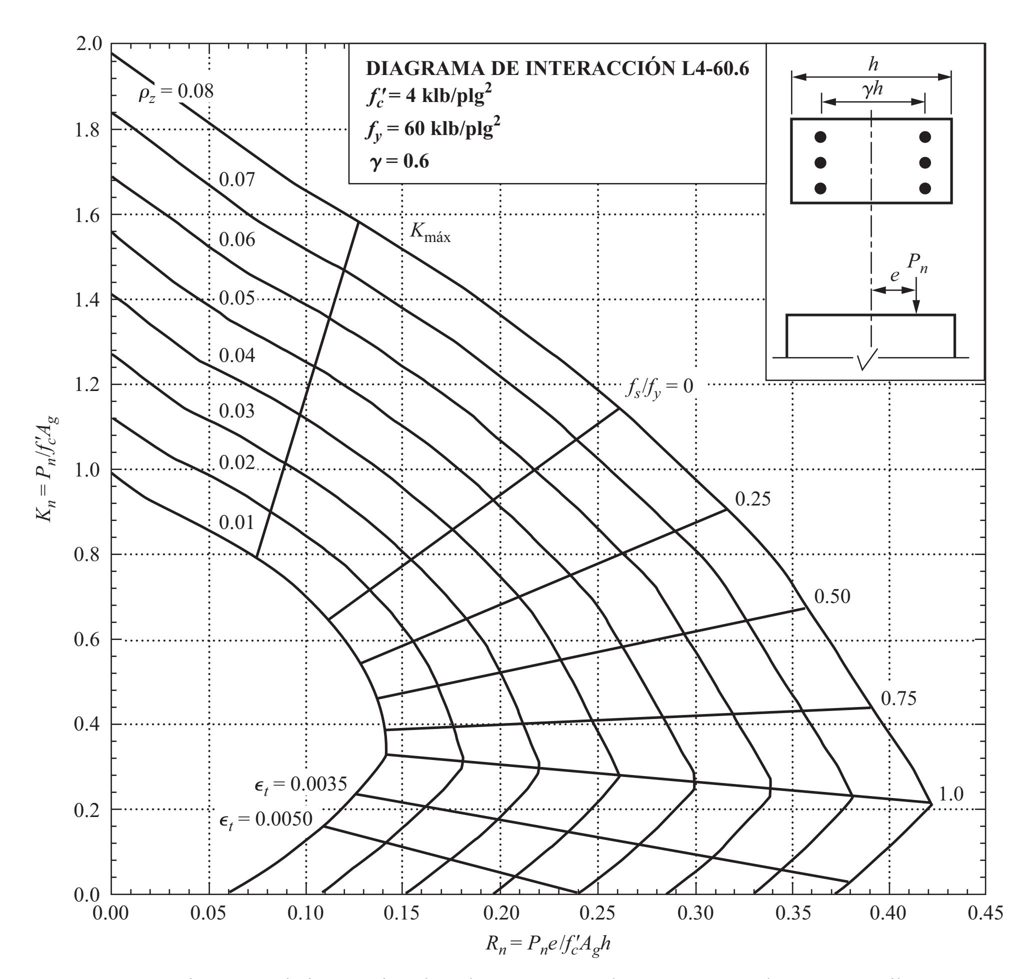
a/b	ℓ_u/ℓ_n	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75
0.20	k_{AB}	4.32	4.70	5.33	5.65	6.27
	C_{AB}	0.57	0.64	0.71	0.80	0.89
0.40	k_{AB}	4.40	4.89	5.45	6.15	7.00
	C_{AB}	0.56	0.61	0.68	0.74	0.81
0.60	k_{AB}	4.46	5.02	5.70	6.54	7.58
	C_{AB}	0.55	0.60	0.65	0.70	0.76
0.80	k_{AB}	4.51	5.14	5.90	6.85	8.05
	C_{AB}	0.54	0.58	0.63	0.67	0.72
1.00	k_{AB}	4.55	5.23	6.06	7.11	8.44
	C_{AB}	0.54	0.57	0.61	0.65	0.68
1.20	k_{AB}	4.58	5.30	6.20	7.32	8.77
	C_{AB}	0.53	0.57	0.60	0.63	0.66
1.40	k_{AB}	4.61	5.36	6.31	7.51	9.05
	C_{AB}	0.53	0.56	0.59	0.61	0.64
1.60	k_{AB}	4.63	5.42	6.41	7.66	9.29
	C_{AB}	0.53	0.55	0.58	0.60	0.62
1.80	k_{AB}	4.65	5.46	6.49	7.80	9.50
	C_{AB}	0.53	0.55	0.57	0.59	0.60
2.00	k_{AB}	4.67	5.51	6.56	7.92	9.68
	C_{AB}	0.52	0.54	0.56	0.58	0.59

Notas: 1. Valores calculados por el método de la analogía de la columna.

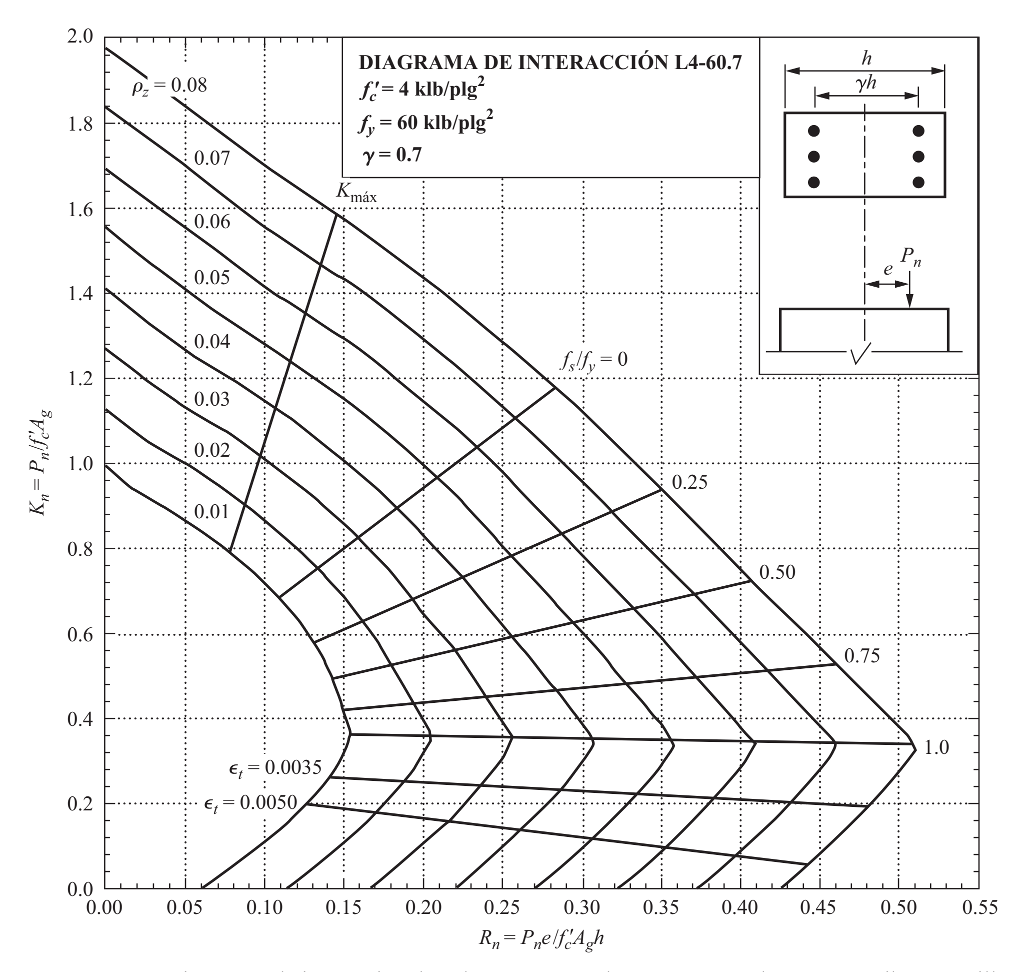
2. $k_c = (k_{AB}$ de la tabla$)\left(\frac{EI_0}{\ell_n}\right)$.



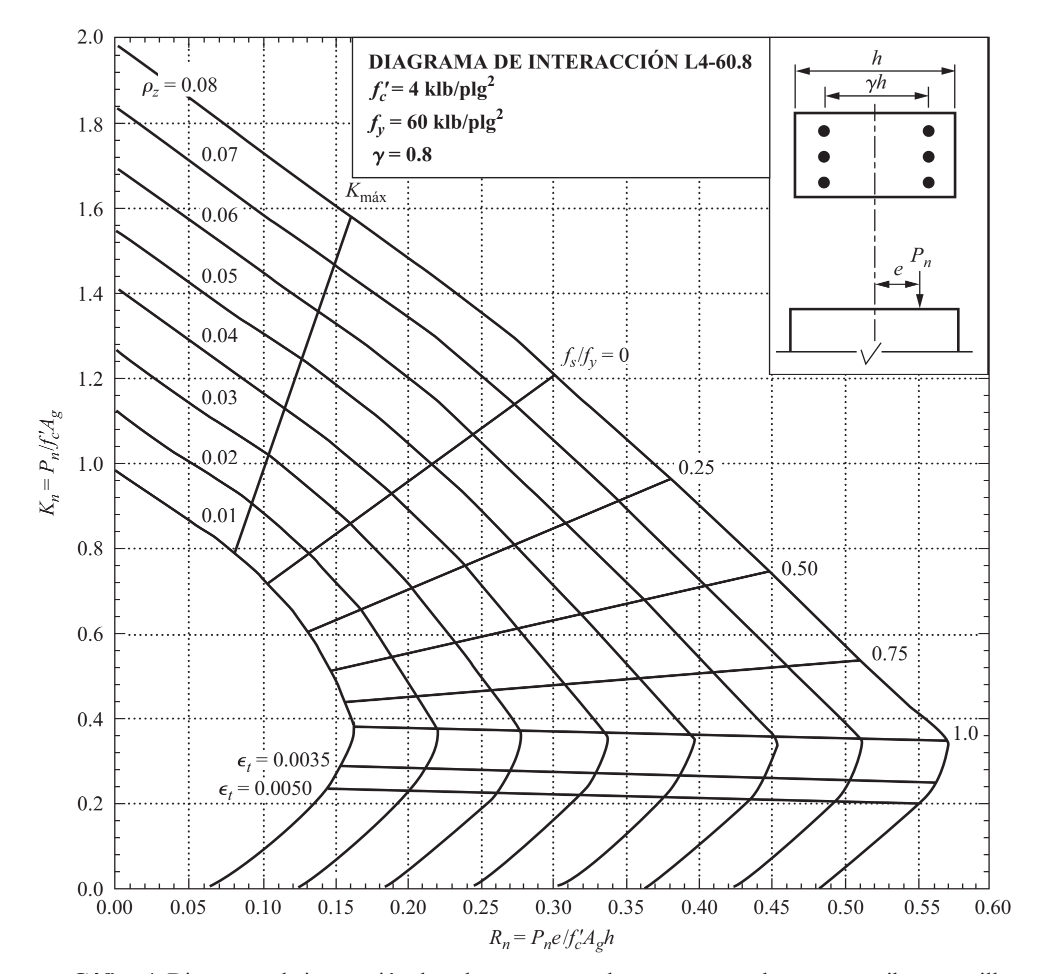
Gráfica 1 Capacidad por momento de secciones rectangulares. (*Nota:* los extremos superiores de las curvas mostradas aquí para varillas de 40 klb/plg² y 50 klb/plg² corresponden a valores de ρ para los cuales $\epsilon_t < 0.004$ en el acero.)



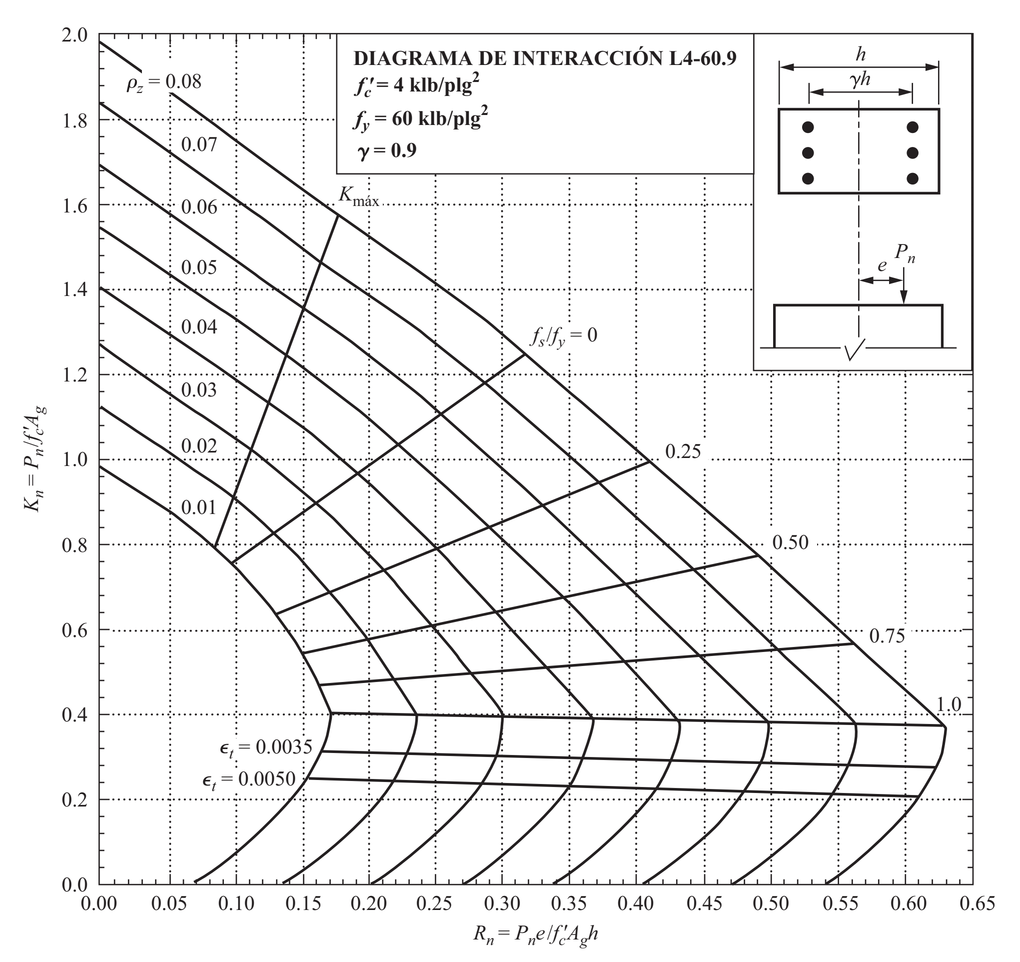
Gráfica 2 Diagramas de interacción de columnas para columnas rectangulares con estribos y varillas de refuerzo sólo en las caras extremas. (Las gráficas 2 a 13 se publican con la autorización del American Concrete Institute.)



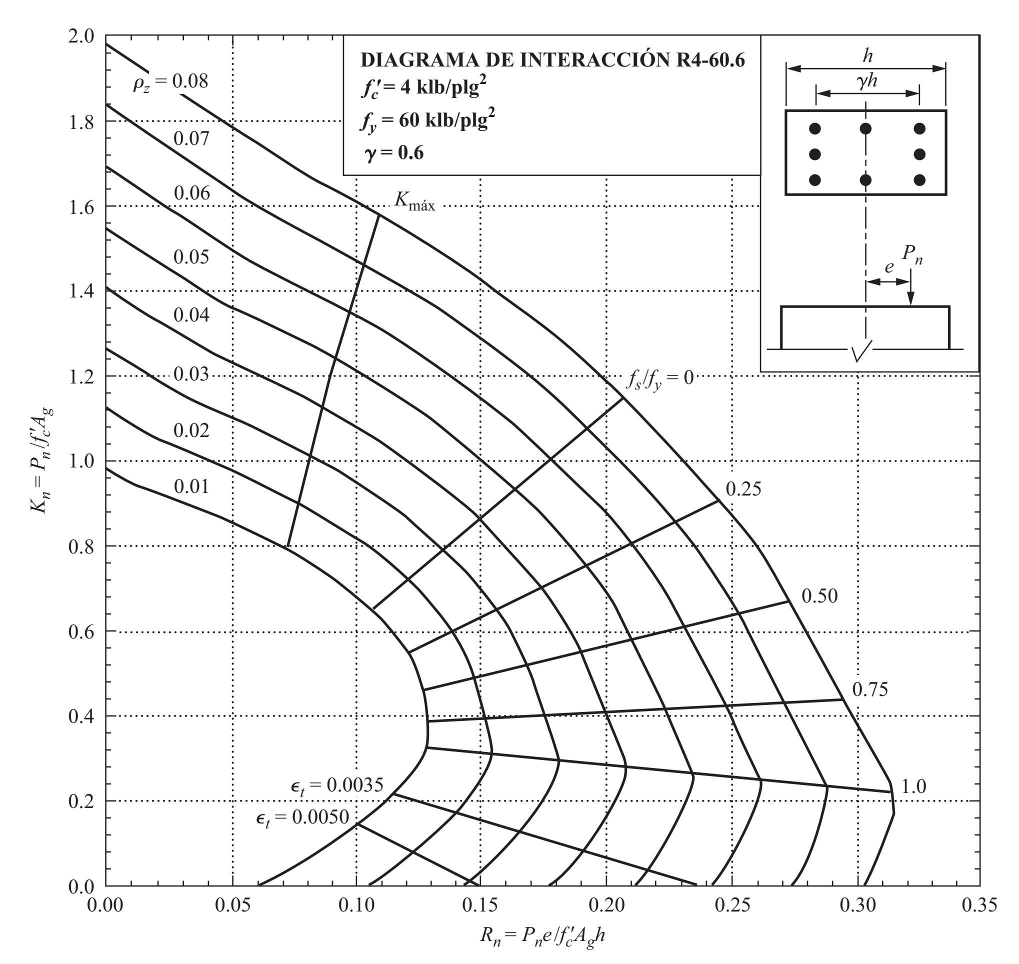
Gráfica 3 Diagramas de interacción de columnas para columnas rectangulares con estribos y varillas de refuerzo sólo en las caras extremas.



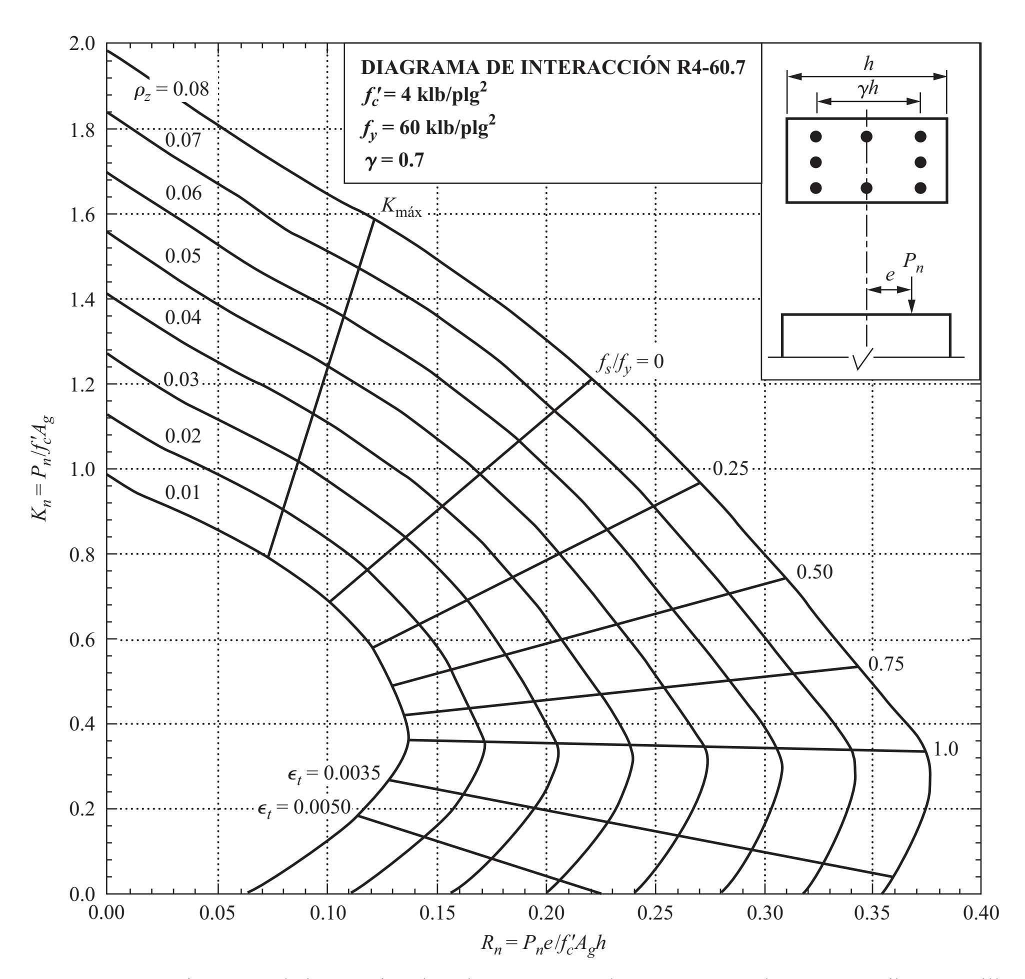
Gáfica 4 Diagramas de interacción de columnas para columnas rectangulares con estribos y varillas de refuerzo sólo en las caras extremas.



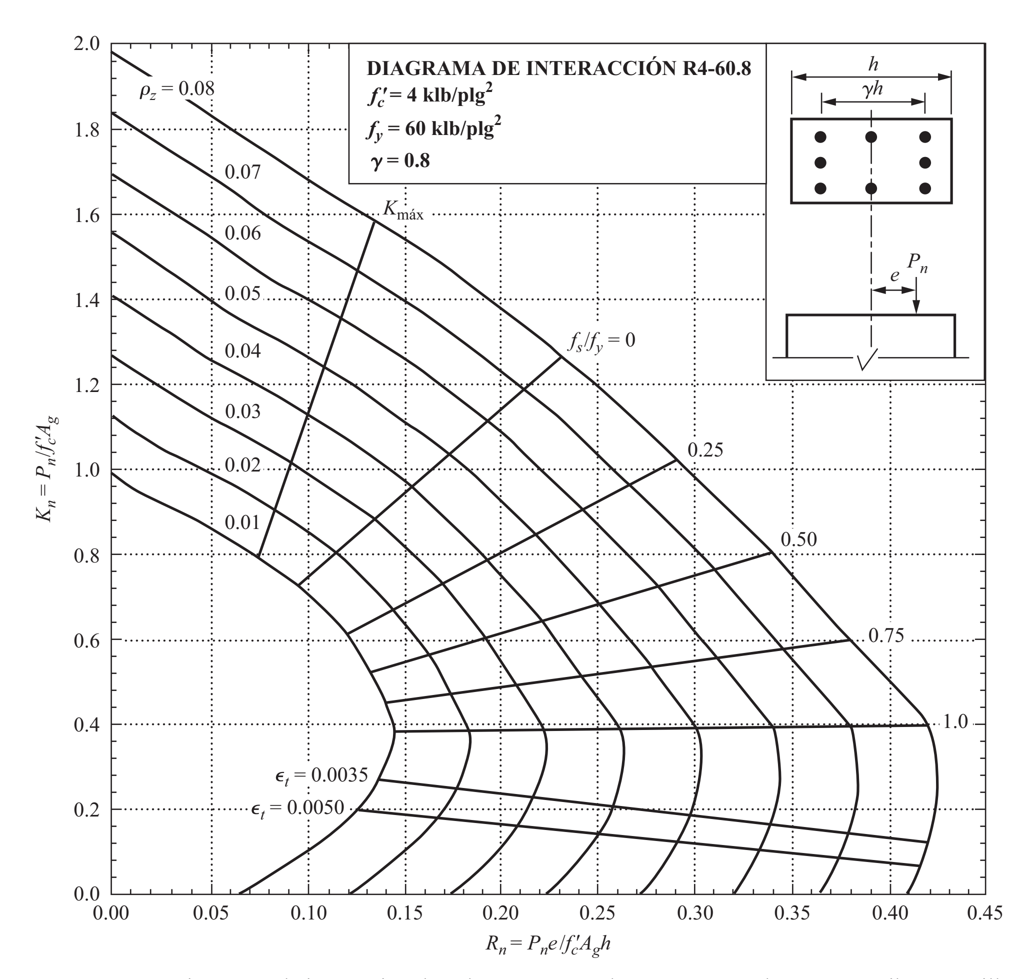
Gráfica 5 Diagramas de interacción de columnas para columnas rectangulares con estribos y varillas de refuerzo sólo en las caras extremas.



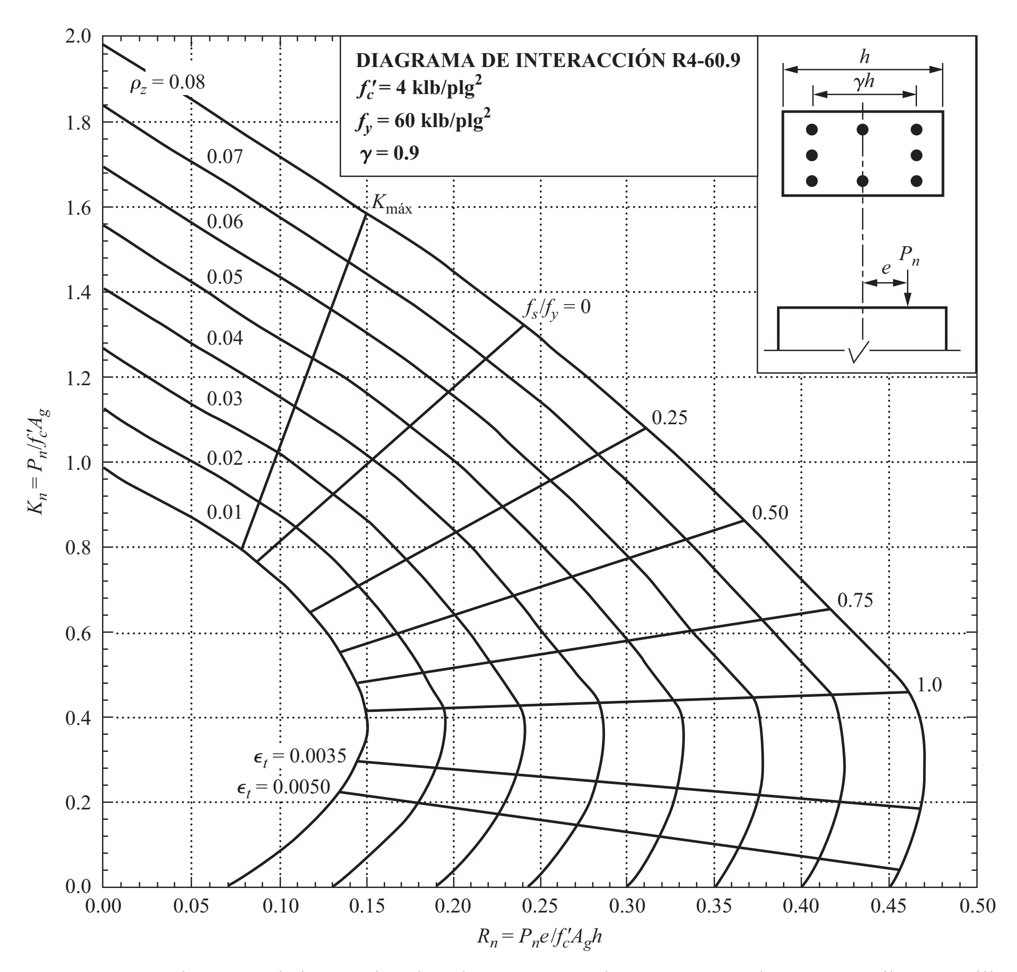
Gráfica 6 Diagramas de interacción de columnas para columnas rectangulares con estribos y varillas de refuerzo en las cuatro caras.



Gráfica 7 Diagramas de interacción de columnas para columnas rectangulares con estribos y varillas de refuerzo en las cuatro caras.



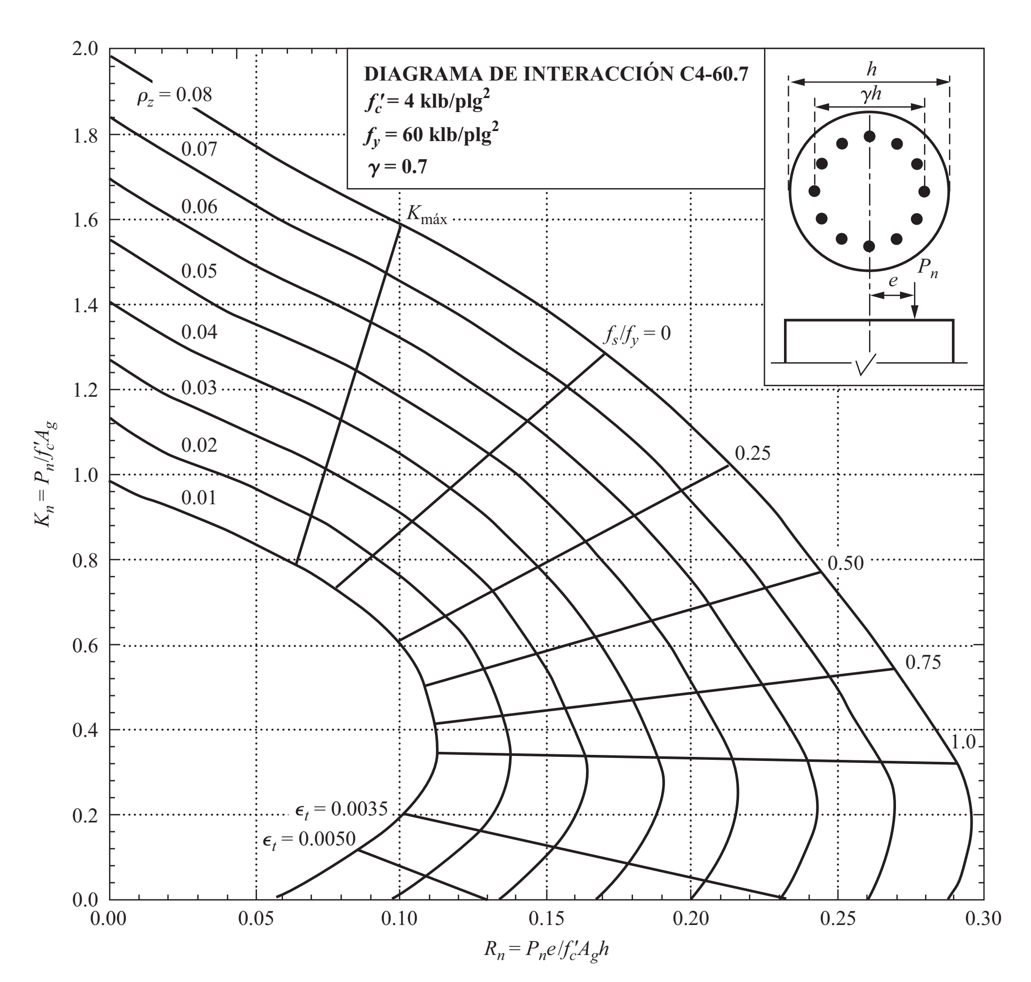
Gráfica 8 Diagramas de interacción de columnas para columnas rectangulares con estribos y varillas de refuerzo en las cuatro caras.



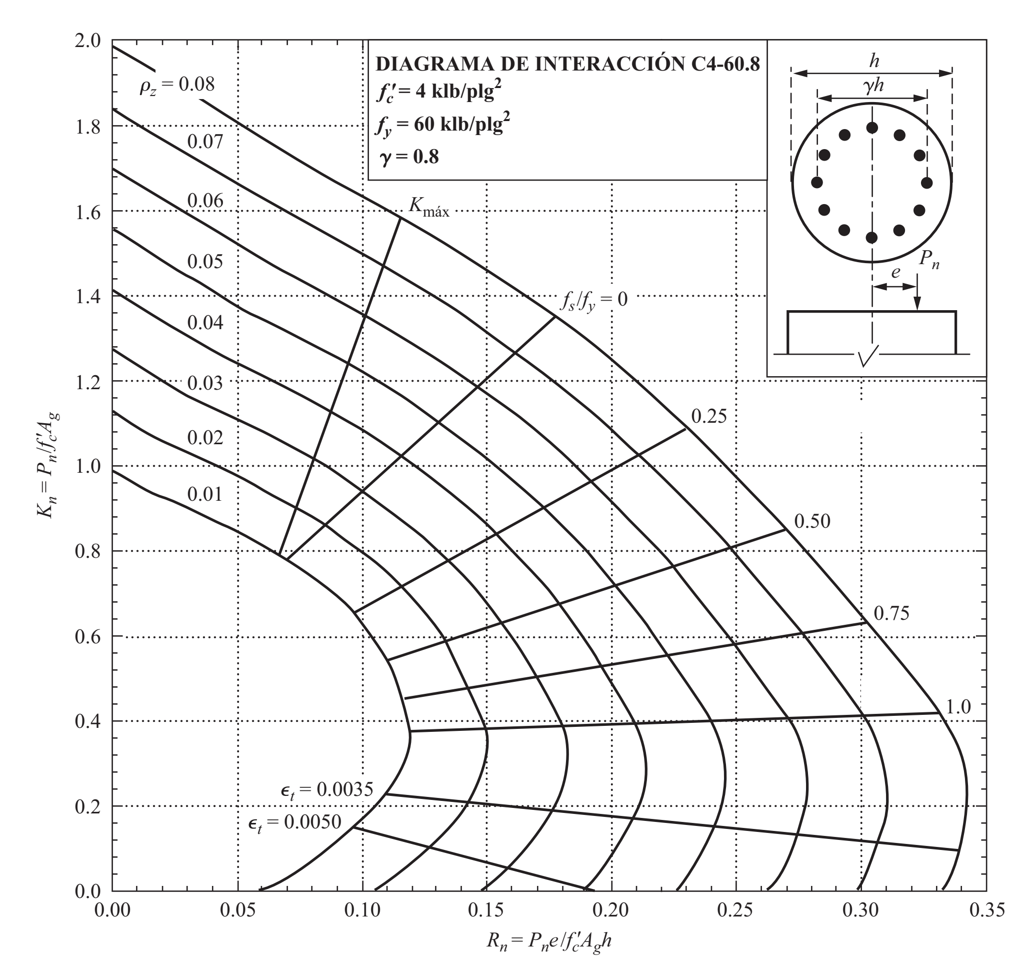
Gráfica 9 Diagramas de interacción de columnas para columnas rectangulares con estribos y varillas de refuerzo en las cuatro caras.

DIAGRAMA DE INTERACCIÓN C4-60.6
$f'_c = 4$ **klb/plg**^{2}
$f_y = 60$ **klb/plg**^{2}
$\gamma = 0.6$

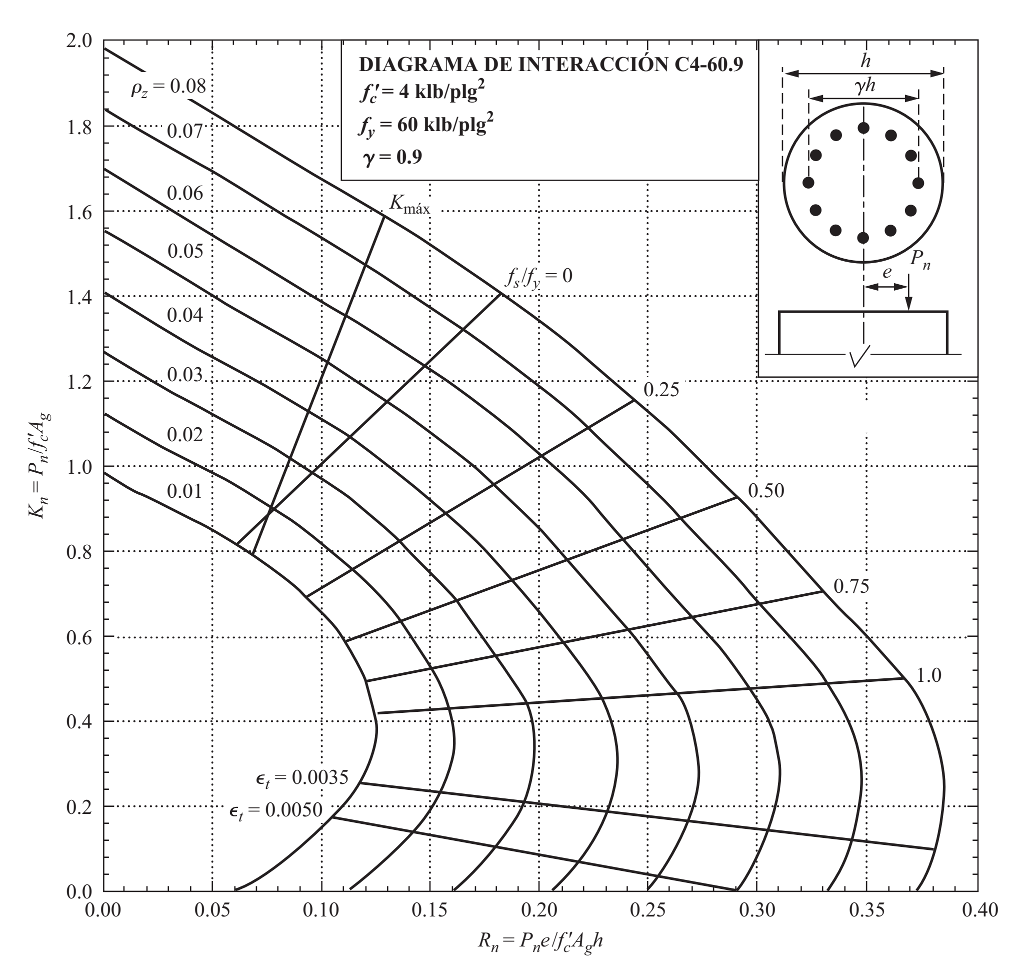
Gráfica 10 Diagramas de interacción de columnas para columnas circulares zunchadas.



Gráfica 11 Diagramas de interacción de columnas para columnas circulares zunchadas.



Gráfica 12 Diagramas de interacción de columnas para columnas circulares zunchadas.



Gráfica 13 Diagramas de interacción de columnas para columnas circulares zunchadas.

B

Tablas en unidades del SI

Tabla B.1 Valores del módulo de elasticidad para concretos de peso normal

f'_c (MPa)	E_c (MPa)
17	17 450
21	21 500
24	23 000
28	24 900
35	27 800
42	30 450

Tabla B.2 Designaciones, diámetros, áreas, perímetros y masas de varillas métricas

Varilla núm.	Dimensiones nominales		
	Diámetro (mm)	Área (mm^2)	Masa (kg/m)
10	9.5	71	0.560
13	12.7	129	0.994
16	15.9	199	1.552
19	19.1	284	2.235
22	22.2	387	3.042
25	25.4	510	3.973
29	28.7	645	5.060
32	32.3	819	6.404
36	35.8	1 006	7.907
43	43.0	1 452	11.38
57	57.3	2 581	20.24

Tabla B.3 Grados de varillas de refuerzo y tamaños de varillas métricas disponibles para cada una

ASTM No.	Grado del acero (MPa)	Tamaño de las varillas
Lingote A615M	300	#10–#19
	420	#10–#57
	520	#19–#57
Riel A616M	350	#10–#36
	420	#10–#36
Eje A617M	300	#10–#36
	420	#10–#36
Baja aleación A706M	420	#10–#57

Tabla B.4 Áreas de grupos de varillas métricas estándar (mm^2)

Designación de la varilla	Número de varillas								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#10	142	213	284	355	426	497	568	639	710
#13	258	387	516	645	774	903	1 032	1 161	1 290
#16	398	597	796	995	1 194	1 393	1 592	1 791	1 990
#19	568	852	1 136	1 420	1 704	1 988	2 272	2 556	2 840
#22	774	1 161	1 548	1 935	2 322	2 709	3 096	3 483	3 870
#25	1 020	1 530	2 040	2 550	3 060	3 570	4 080	4 590	5 100
#29	1 290	1 935	2 580	3 225	3 870	4 515	5 160	5 805	6 450
#32	1 638	2 457	3 276	4 095	4 914	5 733	6 552	7 371	8 190
#36	2 012	3 018	4 024	5 030	6 036	7 042	8 048	9 054	10 060
#43	2 904	4 356	5 808	7 260	8 712	10 162	11 616	13 068	14 520
#57	5 162	7 743	10 324	12 905	15 486	18 067	20 648	23 229	25 810

Tabla B.4 (Continuación)

Designación de la varilla	Número de varillas									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
#10	781	852	923	994	1 065	1 136	1 207	1 278	1 349	1 420
#13	1 419	1 548	1 677	1 806	1 935	2 064	2 193	2 322	2 451	2 580
#16	2 189	2 388	2 587	2 786	2 985	3 184	3 383	3 582	3 781	3 980
#19	3 124	3 408	3 692	3 976	4 260	4 544	4 828	5 112	5 396	5 680
#22	4 257	4 644	5 031	5 418	5 805	6 192	6 579	6 966	7 353	7 740
#25	5 610	6 120	6 630	7 140	7 650	8 160	8 670	9 180	9 690	10 200
#29	7 095	7 740	8 385	9 030	9 675	10 320	10 965	11 610	12 255	12 900
#32	9 009	9 828	10 647	11 466	12 285	13 104	13 913	14 742	15 561	16 380
#36	11 066	12 072	13 078	14 084	15 090	16 096	17 102	18 108	19 114	20 120
#43	15 972	17 424	18 876	20 328	21 780	23 232	24 684	26 136	27 588	29 040
#57	28 391	30 972	33 553	36 134	38 715	41 296	43 877	46 458	49 039	51 620

Tabla B.5 Ancho mínimo de viga (mm) para vigas con exposición interior (código Métrico del ACI, 1995)[a,b,c]

Tamaño de varillas	Número de varillas en lecho simple de refuerzo							Agregar para cada varilla adicional
	2	3	4	5	6	7	8	
#13	175	213	251	288	326	364	401	37.7
#16	178	219	260	301	342	383	424	40.9
#19	182	226	270	314	358	402	446	44.1
#22	185	232	279	326	373	421	468	47.2
#25	188	239	290	341	391	442	493	50.8
#29	195	252	310	367	424	482	539	57.4
#32	202	267	331	396	460	525	590	64.6
#36	209	281	353	424	496	567	639	71.6
#43	228	314	400	486	572	658	744	86.0
#57	271	386	501	615	730	844	959	114.6

[a]Los anchos mínimos de vigas se calcularon usando estribos #10.

[b]Se supuso que el tamaño máximo del agregado no excede de $\frac{3}{4}$ de la separación libre entre varillas (3.3.2 del ACI).

[c]La distancia horizontal del centro de las varillas longitudinales exteriores al interior de los estribos se supuso igual a 2 veces el diámetro del estribo (7.2.2 del ASCI) o a la mitad del diámetro de la varilla longitudinal.

Tabla B.6 Áreas de varillas en losas (mm^2/m)

Separación (mm)	Número de varillas								
	10	13	16	19	22	25	29	32	36
75	947	1 720	2 653	3 787	5 160	6 800	8 600	10 920	13 413
90	789	1 433	2 211	3 156	4 300	5 667	7 167	9 100	11 178
100	710	1 290	1 990	2 840	3 870	5 100	6 450	8 190	10 060
115	617	1 122	1 730	2 470	3 365	4 435	5 609	7 122	8 748
130	546	992	1 531	2 185	2 977	3 923	4 962	6 300	7 738
140	507	921	1 421	2 029	2 764	3 643	4 607	5 850	7 186
150	473	860	1 327	1 893	2 580	3 400	4 300	5 460	6 707
165	430	782	1 206	1 721	2 345	3 091	3 909	4 964	6 097
180	394	717	1 106	1 578	2 150	2 833	3 583	4 550	5 589
190	374	679	1 047	1 495	2 037	2 684	3 395	4 311	5 295
200	355	645	995	1 420	1 935	2 550	3 225	4 095	5 030
225	316	573	884	1 262	1 720	2 267	2 867	3 640	4 471
250	284	516	796	1 136	1 548	2 040	2 580	3 276	4 024
300	237	430	663	947	1 290	1 700	2 150	2 730	3 353

Tabla B.7 Valores de ρ balanceado, ρ para lograr diversos valores de ϵ_t y ρ mínimo para flexión. Todos los valores son para secciones rectangulares para refuerzo de tensión.

f_y (MPa)	f'_c (MPa)	21 $\beta_1 = 0.85$	28 $\beta_1 = 0.85$	35 $\beta_1 = 0.814$	42 $\beta_1 = 0.764$
300	ρ balanceado	0.0337	0.0450	0.0538	0.0606
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.004$	0.0217	0.0289	0.0346	0.0390
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.005$	0.0190	0.0253	0.0303	0.0341
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.075$	0.0144	0.0193	0.0231	0.0260
	ρ mínimo para flexión	0.0047	0.0047	0.0049	0.0054
350	ρ balanceado	0.0274	0.0365	0.0437	0.0492
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.004$	0.0186	0.0248	0.0297	0.0334
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.005$	0.0163	0.0217	0.0259	0.0292
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.0075$	0.0124	0.0165	0.0198	0.0223
	ρ mínimo para flexión	0.0040	0.0040	0.0042	0.0046
420	ρ balanceado	0.0212	0.0283	0.0339	0.0382
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.004$	0.0155	0.0206	0.0247	0.0278
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.005$	0.0135	0.0181	0.0216	0.0244
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.0075$	0.0103	0.0138	0.0165	0.0186
	ρ mínimo para flexión	0.0033	0.0033	0.0035	0.0039

Tabla B.7 (Continuación)

f_y (MPa)	f'_c (MPa)	21 $\beta_1 = 0.85$	28 $\beta_1 = 0.85$	35 $\beta_1 = 0.814$	42 $\beta_1 = 0.764$
520	ρ balanceado	0.0156	0.0208	0.0249	0.0281
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.004$	0.0125	0.0167	0.0200	0.0225
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.005$	0.0109	0.0146	0.0175	0.0197
	ρ cuando $\epsilon_t = 0.0075$	0.0083	0.0111	0.0133	0.0150
	ρ mínimo para flexión	0.0027	0.0027	0.0028	0.0031

Tabla B.8 f_y = 420 MPa; f'_c = 21 MPa. Unidades del SI

	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$
ρ_{min} por temperatura y contracción	0.0018	0.740	0.0048	1.902	0.0078	2.975	0.0107	3.928
	0.0019	0.780	0.0049	1.939	0.0079	3.010	0.0108	3.960
	0.0020	0.820	0.0050	1.976	0.0080	3.044	0.0109	3.991
	0.0021	0.860	0.0051	2.013	0.0081	3.078	0.0110	4.022
	0.0022	0.900	0.0052	2.050	0.0082	3.112	0.0111	4.053
	0.0023	0.940	0.0053	2.087	0.0083	3.146	0.0112	4.084
	0.0024	0.980	0.0054	2.124	0.0084	3.179	0.0113	4.115
	0.0025	1.019	0.0055	2.161	0.0085	3.213	0.0114	4.146
	0.0026	1.059	0.0056	2.197	0.0086	3.247	0.0115	4.177
	0.0027	1.098	0.0057	2.233	0.0087	3.280	0.0116	4.207
	0.0028	1.137	0.0058	2.270	0.0088	3.313	0.0117	4.238
	0.0029	1.176	0.0059	2.306	0.0089	3.347	0.0118	4.268
	0.0030	1.216	0.0060	2.342	0.0090	3.380	0.0119	4.298
	0.0031	1.255	0.0061	2.378	0.0091	3.413	0.0120	4.328
	0.0032	1.293	0.0062	2.414	0.0092	3.446	0.0121	4.359
ρ_{min} por flexión	0.0033	1.332	0.0063	2.450	0.0093	3.479	0.0122	4.389
	0.0034	1.371	0.0064	2.486	0.0094	3.511	0.0123	4.418
	0.0035	1.409	0.0065	2.521	0.0095	3.544	0.0124	4.448
	0.0036	1.448	0.0066	2.557	0.0096	3.577	0.0125	4.478
	0.0037	1.486	0.0067	2.592	0.0097	3.609	0.0126	4.508
	0.0038	1.525	0.0068	2.628	0.0098	3.641	0.0127	4.537
	0.0039	1.563	0.0069	2.663	0.0099	3.674	0.0128	4.566
	0.0040	1.601	0.0070	2.698	0.0100	3.706	0.0129	4.596
	0.0041	1.639	0.0071	2.733	0.0101	3.738	0.0130	4.625
	0.0042	1.677	0.0072	2.768	0.0102	3.770	0.0131	4.654
	0.0043	1.715	0.0073	2.803	0.0103	3.802	0.0132	4.683
	0.0044	1.752	0.0074	2.837	0.0104	3.834	0.0133	4.712
	0.0045	1.790	0.0075	2.872	0.0105	3.865	0.0134	4.741
	0.0046	1.827	0.0076	2.907	0.0106	3.897	0.0135	4.769
	0.0047	1,865	0.0077	2.941				

Tabla B.9 f_y = 420 MPa; f'_c = 28 MPa. Unidades del SI

	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	ρ	$\frac{M_u}{\phi bd^2}$
$\rho_{mín}$ por temperatura y contracción	0.0018	0.744	0.0059	2.349	0.0100	3.829	0.0141	5.185
	0.0019	0.785	0.0060	2.387	0.0101	3.864	0.0142	5.217
	0.0020	0.825	0.0061	2.424	0.0102	3.898	0.0143	5.248
	0.0021	0.866	0.0062	2.462	0.0103	3.933	0.0144	5.280
	0.0022	0.906	0.0063	2.499	0.0104	3.967	0.0145	5.311
	0.0023	0.946	0.0064	2.536	0.0105	4.001	0.0146	5.342
	0.0024	0.987	0.0065	2.573	0.0106	4.036	0.0147	5.373
	0.0025	1.027	0.0066	2.611	0.0107	4.070	0.0148	5.404
	0.0026	1.067	0.0067	2.648	0.0108	4.104	0.0149	5.435
	0.0027	1.107	0.0068	2.685	0.0109	4.138	0.0150	5.466
	0.0028	1.147	0.0069	2.722	0.0110	4.172	0.0151	5.497
	0.0029	1.187	0.0070	2.758	0.0111	4.205	0.0152	5.528
	0.0030	1.227	0.0071	2.795	0.0112	4.239	0.0153	5.558
	0.0031	1.266	0.0072	2.832	0.0113	4.273	0.0154	5.589
	0.0032	1.306	0.0073	2.869	0.0114	4.306	0.0155	5.620
$\rho_{mín}$ por flexión	0.0033	1.346	0.0074	2.905	0.0115	4.340	0.0156	5.650
	0.0034	1.385	0.0075	2.942	0.0116	4.373	0.0157	5.681
	0.0035	1.424	0.0076	2.978	0.0117	4.407	0.0158	5.711
	0.0036	1.464	0.0077	3.014	0.0118	4.440	0.0159	5.741
	0.0037	1.503	0.0078	3.051	0.0119	4.473	0.0160	5.771
	0.0038	1.542	0.0079	3.087	0.0120	4.506	0.0161	5.801
	0.0039	1.582	0.0080	3.123	0.0121	4.539	0.0162	5.831
	0.0040	1.621	0.0081	3.159	0.0122	4.572	0.0163	5.861
	0.0041	1.660	0.0082	3.195	0.0123	4.605	0.0164	5.891
	0.0042	1.699	0.0083	3.231	0.0124	4.638	0.0165	5.921
	0.0043	1.737	0.0084	3.267	0.0125	4.671	0.0166	5.951
	0.0044	1.776	0.0085	3.302	0.0126	4.704	0.0167	5.980
	0.0045	1.815	0.0086	3.338	0.0127	4.736	0.0168	6.010
	0.0046	1.854	0.0087	3.374	0.0128	4.769	0.0169	6.040
	0.0047	1.892	0.0088	3.409	0.0129	4.801	0.0170	6.069
	0.0048	1.931	0.0089	3.444	0.0130	4.834	0.0171	6.098
	0.0049	1.969	0.0090	3.480	0.0131	4.866	0.0172	6.128
	0.0050	2.007	0.0091	3.515	0.0132	4.898	0.0173	6.157
	0.0051	2.046	0.0092	3.550	0.0133	4.930	0.0174	6.186
	0.0052	2.084	0.0093	3.585	0.0134	4.963	0.0175	6.215
	0.0053	2.122	0.0094	3.621	0.0135	4.995	0.0176	6.244
	0.0054	2.160	0.0095	3.656	0.0136	5.027	0.0177	6.273
	0.0055	2.198	0.0096	3.690	0.0137	5.058	0.0178	6.302
	0.0056	2.236	0.0097	3.725	0.0138	5.090	0.0179	6.331
	0.0057	2.274	0.0098	3.760	0.0139	5.122	0.0180	6.359
	0.0058	2.311	0.0099	3.795	0.0140	5.154	0.0181	6.388

C

El método de diseño del puntal y el tirante

C.1 INTRODUCCIÓN

Este apéndice presenta un método alternativo para el diseño de miembros de concreto reforzado con discontinuidades geométricas y de fuerzas. El método es también muy útil para el diseño de vigas de gran peralte para las cuales la hipótesis habitual de distribución lineal de deformaciones unitarias no es válida. Este método de diseño, comúnmente conocido como el diseño del puntal y el tirante, se introduce brevemente.

C.2 VIGAS DE GRAN PERALTE

La sección 10.7 del código del ACI define a una viga de gran peralte como un miembro que

a) Está cargada en una cara y está sustentada en la cara opuesta de modo que pueden desarrollarse puntales de compresión entre la carga y los apoyos.

b) Tiene un claro libre no mayor que cuatro veces su peralte total o tiene una región donde se localizan cargas concentradas a menos del doble del peralte del miembro desde el apoyo.

Las *trabes de transferencia* son un tipo de viga de gran peralte que se presentan con cierta frecuencia. Estos miembros se usan para transferir cargas en sentido lateral desde una o más columnas a otras columnas. Algunas veces los muros de carga también se comportan como vigas de gran peralte.

Las vigas de gran peralte comienzan a agrietarse para cargas que varían de $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}\,P_u$. Como resultado, los análisis elásticos no tienen mucho valor para nosotros, excepto en un aspecto: las grietas nos dicen algo acerca de la manera en que están distribuidos los esfuerzos que causan las grietas. En otras palabras, suministran información en cuanto a cómo se cargan las cargas después del agrietamiento.

C.3 CLARO DE CORTANTE Y REGIONES DE COMPORTAMIENTO

La relación del claro de cortante de una viga entre su peralte efectivo determina cómo fallará la viga cuando esté sobrecargada. El claro de cortante de una viga específica se muestra en la figura C.1, donde se representa con el símbolo a. Ésta es la distancia de la carga concentrada mostrada a la cara del apoyo. Si la viga sustenta sólo una carga uniforme, el claro de cortante es el claro libre de la viga.

Cuando los claros de cortante son largos, se les denomina regiones B. Éstas son las regiones para las cuales es aplicable la teoría acostumbrada de vigas —las secciones planas permanecen planas antes

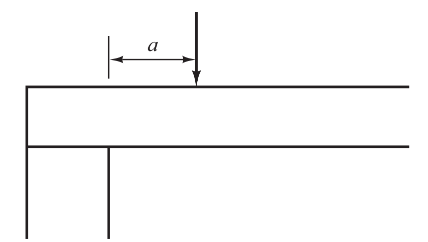


Figura C.1 Claro de cortante.

y después de la flexión——. La letra B significa ya sea viga o Bernoulli (él presentó la teoría lineal de las deformaciones unitarias para las vigas).

En algunas situaciones la teoría acostumbrada de vigas no es aplicable. Si los claros de cortante son cortos, las cargas son resistidas principalmente por la acción de arco en vez de la acción de viga. Las localidades donde esto ocurre se llaman regiones D. La letra D representa discontinuidad o perturbación. En estas regiones las secciones planas antes de la flexión no permanecen planas después de la flexión, y las fuerzas obtenidas con los diagramas acostumbrados de cortante y de momento y la teoría de vigas de primer orden son incorrectas.

Las regiones D son aquellas partes de los miembros localizadas cerca de las cargas concentradas y las reacciones. También incluyen nudos y cartelas y otros sitios donde se presentan cambios repentinos en la sección transversal del miembro tales como los orificios que están presentes en los miembros.

De acuerdo con el principio de St. Venant, las perturbaciones locales tales como aquellas causadas por las cargas concentradas tienden a disiparse en una distancia aproximadamente igual al peralte del miembro. La figura C.2 muestra varias regiones típicas B y D. Usted debe observar que los autores

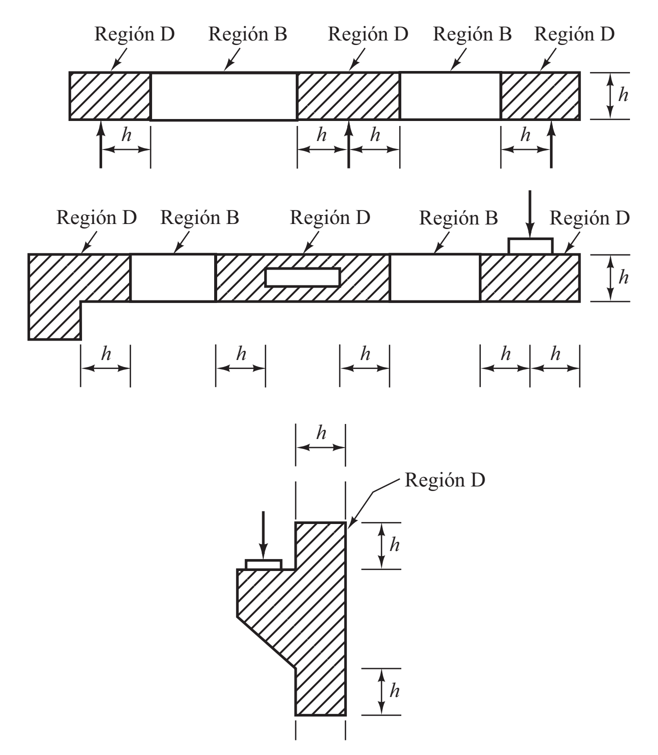


Figura C.2 Regiones B y D.

usaron el principio de St. Venant en esta figura para mostrar el alcance de las regiones D. Para más ejemplos el lector debe examinar también las figuras. R.A.1.1 y R.A.1.2 en el apéndice A del código del ACI.

C.4 LA ANALOGÍA DE LA ARMADURA

Si los claros de cortante son muy cortos, tienden a desarrollarse grietas inclinadas que se extienden de las cargas concentradas a los apoyos. Esta situación se ilustra en la figura C.3. En efecto, el flujo de cortante horizontal desde el refuerzo longitudinal a la zona de compresión ha sido interrumpido. Como resultado, el comportamiento del miembro ha cambiado del de una viga al de un arco atirantado, donde las varillas de refuerzo actúan como los tirantes de un arco.

En la sección 8.7 de este libro, se hizo referencia a la descripción de las vigas de concreto reforzado de Ritter-Morsch con el método de la analogía de la armadura. De acuerdo con esa teoría, una viga de concreto reforzado con refuerzo para cortante se comporta bastante como una armadura de cuerdas paralelas estáticamente determinada de nodos con pasadores. Se considera que el bloque de compresión del concreto es la cuerda superior de la "armadura" ficticia, mientras que se considera que el refuerzo en tensión actúa como la cuerda inferior. Se dice que el alma de la "armadura" consiste en los estribos que actúan como miembros en tensión vertical, mientras que se supone que las partes del concreto entre las grietas diagonales actúan como miembros a compresión diagonal. Este tipo de "armadura" se muestra en la figura C.4, la cual es una copia de la figura 8.4 presentada anteriormente en este libro.

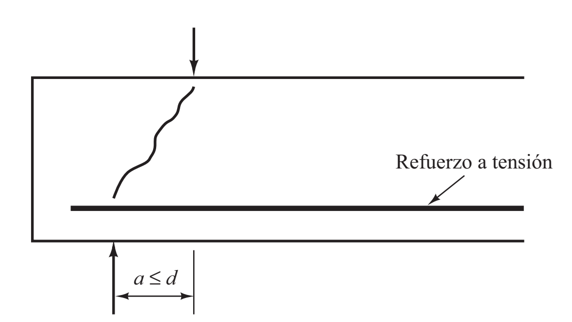


Figura C.3 Un claro de cortante muy corto.

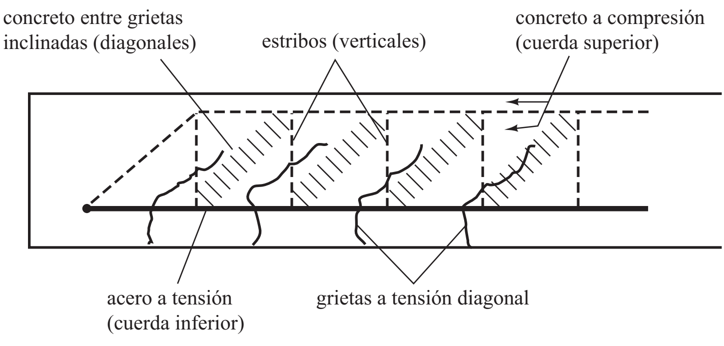


Figura C.4 Analogía de la armadura.

En esta figura, el concreto a compresión y los estribos se muestran con líneas punteadas. Estas líneas representan los centros estimados de gravedad de esas fuerzas. Por otro lado, las fuerzas de tensión se representan con líneas continuas debido a que esas fuerzas actúan claramente a lo largo de las líneas de las varillas de refuerzo.

C.5 DEFINICIONES

Un *modelo de puntal y tirante* es un modelo de armadura de una región D donde, el miembro se representa mediante una armadura idealizada de puntales y tirantes.

Un *tirante* es un miembro a tensión en un modelo de puntal y tirante.

Un *puntal* es un miembro a compresión en un modelo de puntal y tirante que representa la resultante del campo a compresión.

Un *nodo* en un modelo de puntal y tirante es el punto donde los puntales, los tirantes y las fuerzas concentradas se intersecan en el nodo.

La *zona nodal* es el volumen de concreto alrededor de un nodo que se supone que transfiere las fuerzas desde los puntales y los tirantes a través del nodo.

C.6 REQUISITOS DEL CÓDIGO DEL ACI PARA EL DISEÑO DE PUNTAL Y TIRANTE

Varios de los más importantes requisitos del código para el diseño de puntal y tirante son los siguientes.

Resistencia de los puntales

1. La resistencia de diseño de un puntal, un tirante o una zona nodal, ϕF_n, debe ser cuando menos tan grande como la fuerza en el puntal o el tirante o la zona nodal.

$$\phi F_n \geq F_u \quad \text{(Ecuación A-1, ACI)}$$

En la sección 9.3.2 del código del ACI, ϕ se especifica como 0.75 para los miembros de los puntales y los tirantes.

2. La resistencia nominal a compresión de un puntal que no contiene refuerzo longitudinal debe tomarse como el menor valor en los dos extremos del puntal de los siguientes

$$F_{ns} = f_{cu} A_{cs} \quad \text{(Ecuación A-2, ACI)}$$

donde A_{cs} es el área de la sección transversal en un extremo de un puntal tomada perpendicular al eje y f_{ce} es la resistencia a compresión efectiva del concreto (lb/plg^2) en un puntal o una zona nodal. Su valor debe tomarse como el menor de (*a*) y (*b*) como sigue:

a) Resistencia a compresión efectiva del concreto en los puntales

$$f_{ce} = 0.85\beta_s f'_c \quad \text{(Ecuación A-3, ACI)}$$

β_s es un factor que se usa para estimar el efecto del agrietamiento y el confinamiento del refuerzo sobre la resistencia del concreto de los puntales. Los valores de β_s se dan en la sección A.3.2.2 del apéndice del código del ACI para diferentes situaciones. Varían de 0.4 a 0.75, y su significado y efecto son similares a β_1 en los bloques rectangulares de esfuerzo que se estudiaron con mucha frecuencia para vigas y columnas anteriormente en este libro.

b) Resistencia a compresión efectiva del concreto en las zonas nodales

$$f_{ce} = 0.85\beta_n f'_c \quad \text{(Ecuación A-8, ACI)}$$

β_n es un factor que se usa para estimar el efecto del anclaje de los tirantes sobre la resistencia a compresión efectiva del concreto de la zona nodal. Los valores se especifican para diferentes situaciones en la sección A.5.2 del apéndice del ACI y varían de 0.6 a 1.0, dependiendo del número de tirantes y de lo que limite a la zona nodal.

Resistencia de los tirantes

Siguiendo las disposiciones del ACI 318 en su apéndice A-4, la resistencia nominal de un tirante debe determinarse con la siguiente expresión:

$$F_{nt} = A_{ts}f_y + A_{tp}(f_{se} + \Delta f_p) \qquad \text{(Ecuación A-6, ACI)}$$

donde A_{ts} es igual al área del refuerzo sin presfuerzo en un tirante

f_y = resistencia a la fluencia del refuerzo sin presfuerzo

A_{tp} = área del acero presforzado en un tirante

f_{se} = esfuerzo efectivo en el refuerzo presforzado después de las pérdidas

Δf_p = incremento en el esfuerzo en el acero presforzado debido a cargas factorizadas. El código en su sección A.4.1 establece que es permisible usar $\Delta f_p = 60\ 000$ lb/plg^2 para refuerzo presforzado adherido y 10 000 lb/plg^2 para refuerzo presforzado sin adherencia. Pueden usarse otros valores si se pueden justificar por análisis.

C.7 SELECCIÓN DE UN MODELO DE ARMADURA

Cuando se usa el método de puntal y tirante para las regiones D, se piensa que los resultados son más conservadores pero más realistas que los resultados obtenidos con la teoría acostumbrada de vigas. Para diseñar para una región D de una viga, es necesario aislar la región como un cuerpo libre, determinar las fuerzas que actúen en ese cuerpo, y luego seleccionar un sistema o modelo de armadura para transferir las fuerzas por la región.

Una vez que se ha identificado la región D y sus dimensiones se han determinado, se supone que se extiende una distancia *h* a cada lado de la discontinuidad, o hasta la cara del apoyo si ese valor es menor que el peralte.

Los esfuerzos en las fronteras de la región se calculan con la expresión acostumbrada para carga axial y flexión combinados, $P/A \pm Mc/I$. Los valores resultantes deben dividirse entre el factor de reducción de capacidad ϕ para la fuerzas cortantes (0.75) para obtener los esfuerzos nominales requeridos.

El proyectista necesita representar las regiones D de los miembros, que fallan en cortante, con algún tipo de modelo antes de comenzar el diseño. El modelo seleccionado para vigas con refuerzo para cortante es el modelo de la armadura, ya que es el mejor de todos disponible en este momento.

Para este análisis, se considera la viga de la figura C.5. Se muestran las fuerzas internas y externas que actúan en esta viga, que se supone que está agrietada. Para seleccionar un modelo de puntal y tirante

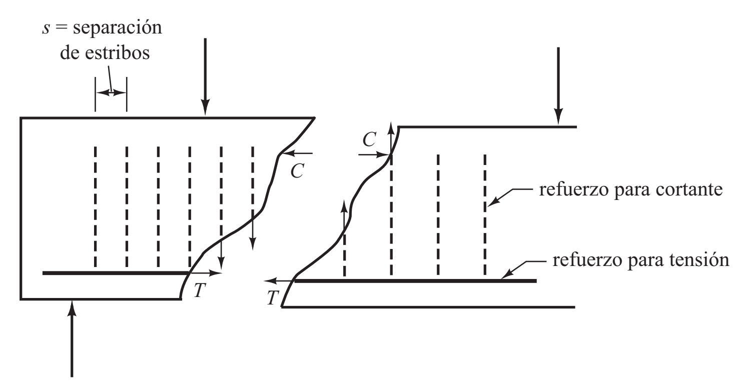


Figura C.5 Una viga que muestra el refuerzo para cortante y para tensión.

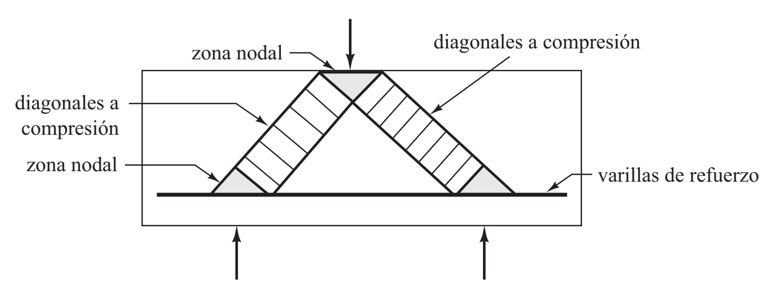


Figura C.6 Una viga corta de gran peralte con el modelo de armadura mostrado.

para una viga de este tipo, todos los estribos cortados por la sección imaginaria (véase la figura C.5) se agrupan en uno solo. De una manera similar, el concreto paralelo a una diagonal también se concentra en un solo miembro.

Con el método de puntal y tirante, las fueras son resistidas por una armadura interna idealizada tal como la triangular esbozada en la figura C.6. El miembro y los nudos de esta armadura están diseñados de modo que tengan capacidad para resistir las fuerzas calculadas. Por supuesto, la armadura seleccionada debe ser más pequeña que la viga que la encierra, y debe darse a todo el acero de refuerzo el recubrimiento adecuado. Para una primera ilustración, en la figura C.6 se muestra una viga corta de gran peralte que sustenta una carga concentrada.

En la figura C.7 se muestran diversos tipos de nodos. Debe observar que tiene que haber cuando menos tres fuerzas en cada nudo por equilibrio. Éste es el número de fuerzas necesarias para el equilibrio estático así como el mayor número que puede presentarse en un estado de equilibrio estático determinado.

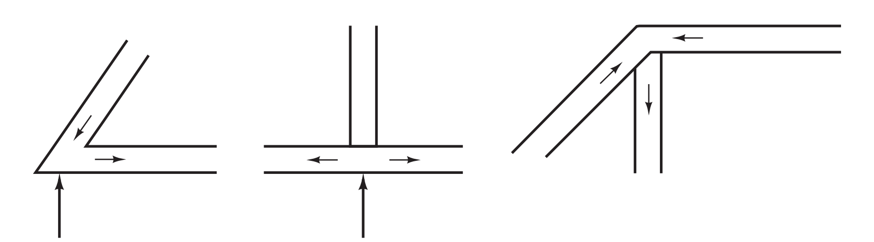


Figura C.7 Diferentes tipos de nodos de armadura.

Si más de tres fuerzas concurren en un solo nodo cuando se esboza una armadura, el proyectista necesitará hacer combinaciones de ellas de alguna manera de modo que solamente se consideren tres fuerzas que concurran en el nodo. En la figura C.8 se muestran dos modelos posibles de puntal y tirante para una viga de gran peralte que sustenta dos cargas concentradas. En la parte *a*) de la figura, cuatro fuerzas concurren en la posición de cada carga concentrada. Como tales, no podemos determinar todas las fuerzas. En la parte *b*) de la figura se muestra una armadura alternativa, en la cual sólo concurren tres fuerzas en cada nodo.

Usted puede ver que las hipótesis de las trayectoria de las fuerzas que intervienen en las armaduras descritas pueden variar un poco entre los diferentes proyectistas. Como resultado, no hay una solución correcta para un miembro específico diseñado por el método del puntal y del tirante.

C.8 ÁNGULOS DE LOS PUNTALES EN LOS MODELOS DE ARMADURAS

Para esbozar la armadura, es necesario establecer la pendiente de las diagonales (el ángulo θ en la figura C.8 que se mide desde la cuerda a tensión: el refuerzo para tensión). De acuerdo con Schlaich y Weischede,

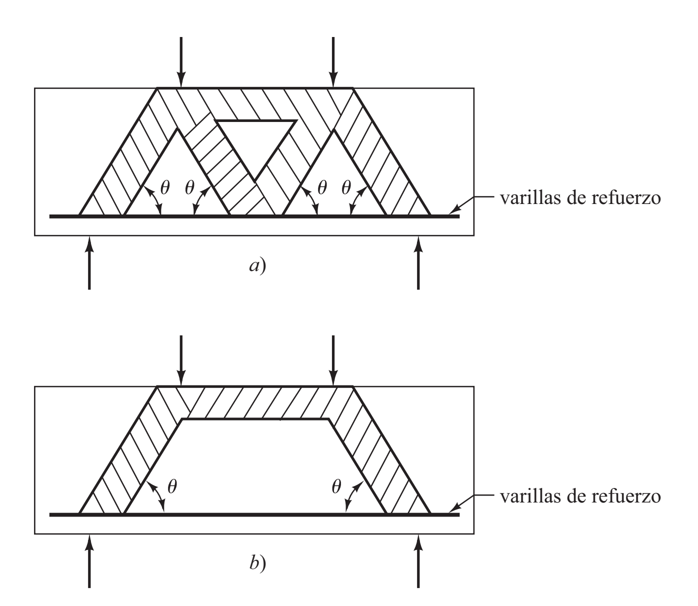


Figura C.8 Dos armaduras de puntal y tirante supuestas adicionales.

el ángulo de las trayectorias de los esfuerzos varía de aproximadamente 68° si $l/d \geq 10$ a aproximadamente 55° si $l/d = 2.0$.[1] Una práctica bastante común, y que se usa en este apéndice y que generalmente es satisfactoria, es suponer una pendiente 2 vertical a 1 horizontal para los puntales. Esto conducirá a una valor de $\theta = 63°56'$. Las dimensiones seleccionadas para el modelo de armadura deben caber en la región D considerada, de modo que tal vez sea necesario ajustar los ángulos.

C.9 PROCEDIMIENTO DE DISEÑO

En seguida se muestra un procedimiento paso por paso para usar el método de diseño del puntal y el tirante.

1. *Selección del modelo del puntal y el tirante*. Se selecciona una armadura para sustentar las cargas concentradas, y esa armadura se analiza.
2. *Diseño de los estribos verticales*. Se supone un tamaño de varilla para estribo, y se supone que su resistencia es igual a su área transversal multiplicada por su esfuerzo de fluencia. El número de estribos requeridos es igual a la fuerza vertical dividida entre la resistencia de uno de los estribos. Se determina la separación requerida de estos estribos. Si es demasiado grande o pequeña, se supone un tamaño diferente de estribos y se repite el procedimiento.
3. *Selección del refuerzo horizontal a través de la viga perpendicular al claro*. El apéndice del código no requiere que se use refuerzo como éste, pero es probable que su uso reduzca apreciablemente el agrietamiento. Como resultado, podemos seleccionar una cantidad de acero igual a la listada en la sección 11.7.4 del ACI para el diseño de vigas regulares de gran peralte. Ahí se da la ecuación $A_{vh} = 0.0025 b_w s_h$, y se especifica que la separación de este tipo de refuerzo no exceda a $d/5$ o bien 12 pulgadas.
4. *Cálculo de la resistencia de los puntales*. En seguida se aplica la ecuación A-3 del ACI para revisar los tamaños necesarios de puntales. En los problemas reales, estos puntales son las diagonales. Como parte del cálculo, los espacios disponibles se comparan con los tamaños requeridos.

[1]Jörg Schlaich y Dieter Weischede, *Detailing of Concrete Structures*, Bulletin d'Information 150, Comité Euro-International 'du Béton, París, marzo de 1982, 163 págs.

5. *Diseño de los tirantes paralelos al claro de la viga*. Los tirantes horizontales paralelos al claro de la viga son necesarios para resistir las fuerzas horizontales en los puntales y evitar que se agrieten. La resistencia de diseño de estos tirantes se proporciona mediante la ecuación A-6 del apéndice del ACI.
6. *Análisis de las zonas nodales.* Finalmente, la ecuación A-8 del apéndice del ACI se usa para determinar la resistencia de las zonas nodales. El lector debe observar que la sección A.5.2 del apéndice del ACI establece que no se requiere confinamiento de las zonas nodales.

D

Notación usada con frecuencia

α = peralte del bloque equivalente rectangular de esfuerzos de compresión, en miembros a flexión

A_b = área de la sección transversal de una barra de refuerzo

A_c = área del núcleo de una columna con refuerzo espiral, medida al exterior de la espiral

A_g = área total de la sección transversal de un miembro de concreto

A_l = área total del refuerzo longitudinal para resistir la torsión

A_s = área del refuerzo de tensión sin presfuerzo

A_s' = área del refuerzo de compresión

A_{sk} = área del refuerzo exterior de una viga peraltada por unidad de peralte, en una de las caras laterales de la viga

A_t = área de un tramo de un estribo cerrado para torsión a una distancia s

A_{st} = área total del refuerzo longitudinal

A_{v} = área de la sección transversal del refuerzo por cortante a una distancia s en un miembro a flexión

A_1 = área cargada

A_2 = área máxima de una superficie de soporte, que es geométricamente similar y concéntrica con el área cargada A_1

b = ancho de la cara de compresión en un miembro a flexión

b = ancho efectivo del patín de una viga T o L

b_o = perímetro de la sección crítica para cortante, en losas o zapatas

b_w = ancho del alma o diámetro de una sección circular

c = distancia de la fibra extrema de compresión al eje neutro

c_b = el menor de: *a*) la distancia del centro de una barra o alambre a la superficie de concreto más próxima y *b*) la mitad del espaciamiento centro a centro de las barras o alambres que se estén desarrollando

C_m = factor que relaciona el diagrama uniforme equivalente de momento con el diagrama real

d = peralte efectivo de una sección, medida desde la fibra extrema de compresión, al centroide del refuerzo de tensión

d' = distancia desde el extremo de la fibra de compresión al centroide del acero de compresión

d_b = diámetro de la barra

d_c = espesor del recubrimiento de concreto, medido desde la fibra extrema de tensión a la barra o alambre de refuerzo más próximo

D_c = diámetro del núcleo de una columna espiral medido a las caras exteriores

E_c = módulo de elasticidad del concreto

E_s = módulo de elasticidad del acero

f_c = esfuerzo calculado de compresión en fibras a flexión con cargas de servicio

f_c' = resistencia especificada a la compresión del concreto

f_{ct} = resistencia promedio de hendimiento a tensión del concreto con agregados ligeros

f_r = módulo de ruptura del concreto

f_s = esfuerzo de flexión calculado en acero de tensión con cargas de servicio

f_s' = esfuerzo de flexión calculado en acero de compresión

f_t = esfuerzo calculado de tensión del concreto a flexión

f_y = resistencia límite especificada del refuerzo sin presfuerzo

h = espesor total del miembro

h_f = espesor del patín a compresión de una sección T, L o I

I_{cr} = momento de inercia transformado de una sección agrietada de concreto

I_e = momento de inercia efectivo de una sección usada para cálculos de deflexión
I_g = momento de inercia total de una sección, respecto al eje centroidal
k = factor efectivo de longitud para un miembro a compresión
l_d = longitud de anclaje de una barra recta dentro de concreto confinado
l_{db} = longitud básica de anclaje
l_{dh} = longitud de anclaje de una barra con gancho estándar
l_{dt} = longitud de anclaje a tensión de una barra deformada con anclaje interno
l_{hb} = longitud básica de anclaje de un gancho estándar a tensión
l_n = claro libre medido a las caras de los apoyos
l_u = longitud sin soporte de un miembro a compresión
M_{cr} = momento de agrietamiento del concreto
M_1 = menor momento final factorizado el en un miembro a compresión, negativo si hay doble curvatura
M_2 = mayor momento final factorizado en un miembro a compresión
M_{1ns} = menor momento final factorizado en un miembro a compresión debido a cargas que no provocan desplazamientos apreciables
M_{2ns} = mayor momento final factorizado en un miembro a compresión debido a cargas que no provocan desplazamientos apreciables
M_d = momento debido a la carga muerta
M_o = momento estático factorizado total
n = relación de módulos (relación de los módulos de elasticidad del acero para el concreto)
P_c = carga de pandeo Euler de una columna
P_{no} = capacidad de carga axial pura de una columna
P_0 = resistencia nominal de un miembro a carga axial sin excentricidad
q_a = presión permisible del suelo
q_e = presión efectiva del suelo
R_n = término usado para la expresión de porcentaje de acero requerido en miembros a flexión ($M_u/\phi bd^2$)
s = espaciado del refuerzo a cortante o a torsión paralelo al refuerzo longitudinal
V_{tu} = esfuerzo de torsión
w = ancho de grieta
w_c = peso unitario del concreto
y_t = distancia del de eje centroidal de la sección bruta a la fibra extrema de tensión
z = término usado para estimar el tamaño de las grietas y especificar la distribución del refuerzo
β = relación de dimensiones larga a corta: claros libres para losas en dos direcciones; lados de columna, carga concentrada o área de reacción; o los lados de una zapata
β_{dns} = relación usada para considerar la reducción de rigidez de columnas debida a cargas axiales sostenidas
β_{ds} = relación usada para considerar la reducción de rigidez de columnas debida a cargas axiales laterales
β_1 = factor para multiplicarlo por el peralte d de un miembro, para obtener el peralte del bloque de esfuerzos rectangular equivalente
δ = factor de amplificación del momento para reflejar los efectos de la curvatura del miembro entre los extremos del miembro a compresión
δ_s = factor de amplificación del momento para columnas esbeltas en marcos no atiesados contra desplazamientos
ϵ_c = deformación total en concreto a compresión
ϵ_s = deformación total en refuerzo de tensión
ϵ_s' = deformación total en refuerzo a compresión
λ_Δ = multiplicador usado en el cálculo de deflexiones a largo plazo
μ = coeficiente de fricción
ξ = factor función del tiempo para cargas prolongadas utilizado para calcular deflexiones a largo plazo
ρ = relación del refuerzo sin preesforzar en una sección
ρ' = relación del refuerzo de compresión en una sección
ρ_b = relación del refuerzo de tensión que produce una condición de deformación balanceada
ϕ = factor de reducción de capacidad

Cantidades y unidades comunes del SI

Cantidad	Unidad	Símbolo	Cantidad	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m	Esfuerzo	pascal (N/m^2)	Pa
Área	metro cuadrado	m^2	Momento	newton metro	N · m
Volumen	metro cúbico	m^3	Trabajo	newton metro	Nm
Fuerza	newton	N	Densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
Peso	newton por metro cúbico	N/m^3	Masa	kilogramo	kg

Prefijos del SI

Prefijos	Símbolo	Factor multiplicativo
tera	T	10^{12} = 1 000 000 000 000
giga	G	10^{9} = 1 000 000 000
mega	M	10^{6} = 1 000 000
kilo	k	10^{3} = 1 000
hecto	h	10^{2} = 100
deca	da	10^{1} = 10
deci	d	10^{-1} = 0.100
centi	c	10^{-2} = 0.010
mili	m	10^{-3} = 0.001
micro	μ	10^{-6} = 0.000 001
nano	n	10^{-9} = 0.000 000 001
pico	p	10^{-12} = 0.000 000 000 001

Conversión de unidades inglesas a unidades SI

Unidades inglesas	Unidades del sistema SI
1 pulgada	25.400 mm = 0.025 400 m
1 $pulg^2$	645.16 mm^2 = 6.451 600 $m^2 \times 10^{-4}$
1 pie	304.800 mm = 0.304 800 m
1 lb	4.448 222 N
1 kilolibra	4 448.222 N = 4.448 222 kN
1 $lb/pulg^2$	6.894 757 kN/m^2 = 0.006 895 MN/m^2 = 0.006 895 N/mm^2
1 lb/pie^2	47.880 N/m^2 = 0.047 800 kN/m^2
1 $kilolibra/pulg^2$	6.894 757 MN/m^2 = 6.894 757 MPa
1 lb · pulg	0.112 985 N · m
1 lb · pie	1.355 818 N · m
1 kilolibra · plg	112.985 N · m
1 kilolibra · pie	1 355.82 N · m = 1.355 82 kN · m

Glosario

Área transformada. El área de la sección transversal de un material teóricamente cambiado a un área equivalente de otro material multiplicándola por la relación de los módulos de elasticidad de los dos materiales. Para ilustración, un área de acero se cambia a un área equivalente de concreto, expresada como tal.

Capitel de columna. Ampliación de una columna debajo de una losa de concreto reforzado.

Carga factorizada. Carga que ha sido multiplicada por un factor de carga suministrando un factor de seguridad.

Carga muerta. Cargas de magnitud constante que permanecen en una sola posición. Ejemplos: el peso de muros, pisos, techos, plomería, accesorios, marcos estructurales, etcétera.

Cargas de servicio. Cargas reales que se suponen aplicadas a una estructura cuando está en servicio (llamadas también *cargas de trabajo*).

Cargas de trabajo. Cargas reales aplicadas a una estructura cuando está en servicio (llamadas también *cargas de servicio*).

Cargas vivas. Cargas que cambian de posición y de magnitud. Éstas se mueven o son movidas. Ejemplos: camiones, gente, viento, lluvia, sismos, cambios de temperatura, etcétera.

Categoría de diseño sísmico. Una clasificación dada a una estructura basada en su categoría de ocupación y la severidad del movimiento del suelo del sismo de diseño en el lugar.

Centroide plástico de columnas. Posición de la fuerza resultante producida por el acero y el concreto.

Cimbra. Molde en que se vierte el concreto semilíquido.

Columna compuesta. Columna de concreto reforzada longitudinalmente con perfiles estructurales de acero.

Columna con estribos. Columna con una serie de estribos de acero de paso pequeño que envuelven a las varillas longitudinales para mantenerlas en el lugar.

Columna zunchada. Columna con un zunchado en espiral, hecho con varillas o alambre grueso, que envuelve su refuerzo longitudinal en forma continua.

Columnas cortas. Columnas con relaciones de esbeltez tan pequeñas que los momentos secundarios resultan despreciables.

Columnas esbeltas (o columnas largas). Columnas con relaciones de esbeltez suficientemente grandes para que los momentos secundarios las debiliten apreciablemente (según el ACI, más de 5% es una reducción apreciable en la resistencia de las columnas).

Columnas largas. *Véase* Columnas esbeltas.

Combadura o contraflecha. Construcción de un miembro doblado o arqueado en una dirección de manera que no se vea mal cuando las cargas de servicio lo flexionen en la dirección opuesta.

Concreto. Mezcla de arena, grava, roca triturada u otros agregados, unidos por medio de una pasta de cemento y agua con consistencia de piedra.

Concreto colado en el lugar. Concreto colado en la obra en su lugar definitivo.

Concreto de peso ligero. Concreto en el que agregado ligero (zonolita, pizarras expandidas, aserrín, etc.), se usa para remplazar el agregado fino y/o grueso.

Concreto monolítico. Concreto colado en una sola pieza o en diferentes operaciones, pero con juntas de construcción apropiadas.

Concreto postensado. Concreto presforzado en el que el acero se tensiona después de que el concreto ha fraguado.

Concreto precolado. Concreto colado lejos de su posición final. Puede colarse en la obra cerca de su posición final, pero generalmente se hace en una planta de prefabricados.

Concreto premezclado. Concreto mezclado en una planta de concreto y luego transportado a la obra.

Concreto reforzado. Combinación de concreto y refuerzo de acero, donde el acero suministra la resistencia a tensión que falta en el concreto. (El refuerzo de acero también puede usarse para resistir fuerzas de compresión.)

Concreto simple. Concreto sin ningún refuerzo.

Condición de falla balanceada. Ocurrencia simultánea del aplastamiento del concreto a compresión en un lado de un miembro y la fluencia del acero de tensión en el otro lado.

Crucetas de cortante. Elementos en forma de cruz a base de viguetas I o canales, colocados en las losas de concreto reforzado sobre las columnas para incrementar su resistencia al cortante.

Curva de interacción. Diagrama que muestra la interacción o relación entre dos funciones de un miembro, generalmente la carga axial de una columna y la flexión.

Deformación plástica. Deformación permanente que se presenta en un miembro después de que alcanza su esfuerzo de fluencia.

Desconchamiento. El resquebrajamiento o rotura de una superficie de concreto.

Diseño por esfuerzos de trabajo. Método de diseño en el que los miembros de una estructura se dimensionan de tal manera que las cargas muertas y vivas estimadas no generan esfuerzos elásticos mayores a ciertos valores específicos. Al método también se le llama *Método de diseño por esfuerzos permisibles, método de diseño elástico, o método de diseño por cargas de servicio*.

Diseño por resistencia. Método de diseño en el que las cargas muertas y vivas estimadas se multiplican por ciertos factores de carga o de seguridad. Las así llamadas *cargas factorizadas* resultantes se usan para dimensionar los miembros.

Esfuerzos de adherencia. Los esfuerzos tipo cortante producidos sobre las superficies de las varillas de refuerzo cuando el concreto trata de deslizarse sobre esas varillas.

Espirales o zunchado. Varillas o alambre en espiral continuo de paso pequeño que envuelve a las varillas longitudinales de un miembro para mantenerlas en su lugar.

Estado de servicio. Se refiere al comportamiento de las estructuras bajo cargas normales de servicio y tiene que ver con deflexiones, vibraciones, agrietamiento y deslizamiento.

Estado límite. Condición en la cual una estructura o parte de ella cesa de efectuar la función esperada.

Estribos. Refuerzo vertical agregado a las vigas de concreto reforzado para incrementar su capacidad por cortante.

Estructura alveolar. Zonas del concreto donde existe segregación del agregado grueso o bolsas de piedra donde el agregado no está rodeado de mortero. Su causa es el manejo y la colocación impropios del concreto.

Factor de carga. Factor generalmente mayor que uno, que se multiplica por una carga de servicio o de trabajo para proporcionar un factor de seguridad.

Factores de reducción de la capacidad. Factores que toman en cuenta las incertidumbres en la resistencia de los materiales, las aproximaciones en el análisis y las variaciones en las dimensiones y mano de obra. Estos factores se multiplican por las resistencias nominales o teóricas de los miembros, para obtener sus resistencias permisibles.

Flujo o escurrimiento plástico. Cuando un miembro de concreto está sometido a cargas sostenidas de compresión, continuará acortándose durante años. El acortamiento que ocurre después del acortamiento inicial o instantáneo se llama *flujo* o *escurrimiento plástico*, y es causado por la expulsión del agua por los poros del concreto.

Flujo plástico. *Véase* Flujo o escurrimiento plástico.

Línea de influencia. Diagrama cuyas ordenadas muestran la magnitud y el carácter de alguna función de una estructura (fuerza cortante, momento, etc.), generada por una carga unitaria que se mueve a través de la estructura.

Losa en una dirección. Losa diseñada para flexionarse en una dirección.

Losa plana. Losa de concreto reforzado con capiteles y/o paneles abatidos.

Losas en dos direcciones. Losas de piso o techo, soportadas por columnas o muros, dispuestos de manera que las losas pueden flexionarse en dos direcciones.

Longitud de anclaje. La longitud de una varilla de refuerzo que es necesaria para anclar o desarrollar su esfuerzo en una sección crítica.

Microfisura. Fisura demasiado pequeña para verla a simple vista.

Miembro subreforzado. Miembro diseñado de manera que el acero de tensión fluya (resultando en deflexiones apreciables y grandes grietas visibles) mientras que el concreto a compresión está aún subesforzado. Con esto se logra tener una advertencia de una posible falla antes de que ésta ocurra.

Miembros sobrerreforzados. Miembros en los que el acero de tensión no fluye (o no cambian apreciablemente ni las grietas ni las deflexiones) antes de la falla, la cual será repentina y sin aviso, debido al aplastamiento del concreto a compresión.

Módulo de elasticidad. Relación del esfuerzo a la deformación unitaria en los materiales elásticos. Entre mayor es su valor, menores serán las deformaciones en un miembro.

Módulo de ruptura. Resistencia a la tensión por flexión del concreto.

Momento de agrietamiento. Momento flexionante en un miembro, cuando el esfuerzo de tensión en el concreto es igual al módulo de ruptura y empieza el agrietamiento.

Momentos P-delta. *Véase* Momentos secundarios.

Momentos primarios. Momentos calculados en una estructura sin tomar en cuenta las deflexiones de la estructura.

Momentos secundarios. Momentos causados en una estructura por sus deformaciones bajo carga. Al flexionarse lateralmente una columna, se genera un momento igual a la carga axial multiplicada por la deflexión lateral. Se le llama *momento secundario* o *momento P-delta*.

Paneles abatidos. Engrosamiento de una losa de concreto reforzado alrededor de una columna.

Peralte efectivo. Distancia de la cara de compresión de un miembro a flexión al centro de gravedad del refuerzo de tensión.

Placa plana. Pisos de concreto sólido o losas de techo de espesor uniforme que transfieren las cargas directamente a las columnas de soporte sin la ayuda de vigas, capiteles o paneles abatidos.

Preesfuerzo. Imposición a una estructura de esfuerzos internos que son de carácter opuesto a los causados por las cargas de servicio o de trabajo.

Pretensado. Concreto presforzado en el que el acero se tensiona antes de colar el concreto.

Prueba brasileña. Prueba usada para estimar la resistencia a la tensión del concreto.

Puntales. Miembros provisionales (probablemente de madera o de metal) usados como soporte vertical de la cimbra en que se cuela el concreto.

Punto de inflexión. Punto en un miembro sometido a flexión en el que el momento flexionante es cero y donde el momento cambia de signo.

Recubrimiento. Capa protectora de concreto sobre las varillas de refuerzo para protegerlas contra el fuego y la corrosión.

Refuerzo de compresión. Refuerzo añadido al lado de compresión de las vigas para aumentar la capacidad de momento, aumentar la ductilidad, disminuir las deflexiones a largo plazo o proveer hangares para refuerzo de cortante.

Refuerzo de Grado 40 (60). Refuerzo con un límite elástico mínimo de 40 000 lb/plg^2 (60 000 lb/plg^2).

Relación de Poisson. Expansión o contracción lateral de un miembro dividida entre su acortamiento o alargamiento longitudinal, cuando el miembro está sometido a fuerzas de compresión o de tensión. (Valor medio para concreto aproximadamente de 0.16.)

Refuerzo del alma. Refuerzo por cortante en miembros a flexión.

Resistencia nominal. Resistencia teórica última de un miembro tal como M_n (momento nominal), V_n (fuerza cortante nominal), etcétera.

Sismo máximo considerado (SMC). Un sismo extremo, que se considera que ocurre sólo una vez cada 2 500 años.

Soportes o tirantes. Piezas individuales de alambre o de varilla, colocadas a intervalos alrededor de las varillas longitudinales de un miembro para mantenerlas en su lugar.

Tendones. Alambres, torones, cables o varillas usados para presforzar el concreto.

Trabazón del agregado. Resistencia por cortante o fricción del concreto en ambos lados de una grieta en un miembro de concreto reforzado (obviamente mayor en grietas más estrechas).

Varillas superiores. Varillas horizontales de refuerzo que tienen por lo menos 12 pulgadas de concreto fresco debajo de ellas.

Viga doblemente reforzada. Vigas de concreto que tienen refuerzo de tensión y de compresión.

Viga L. Viga T en el borde de una losa de concreto reforzado que tiene un patín solamente en un lado.

Viga T. Una viga de concreto reforzado que incorpora una parte de la losa que soporta.

Índice

D

E

F

G

H

I

Diseño de CONCRETO REFORZADO

Esta obra es un libro de texto para las carreras de Ingeniería Civil y Arquitectura en los cursos de: Diseño de Elementos de Concreto Reforzado, Estructuras de Concreto Reforzado, Concreto I, Miembros de Concreto Reforzado, y Proyecto Estructural para Edificación de Concreto y Mampostería, entre otras.

Destaca por:

- Su actualización conforme al Reglamento de Construcciones 2008 del American Concrete Institute (ACI 318-08).
- El nuevo capítulo 21 de Diseño Sísmico, que es introductorio y familiariza al estudiante con este tema.
- La inclusión de hojas de cálculo, como herramientas para analizar, diseñar y comparar soluciones.

Aprenda:

- Los conceptos generales de las estructuras de concreto reforzado.
- A diseñar cimentaciones superficiales a base de zapatas aisladas y corridas; losas en una y en dos direcciones y también muros de concreto armado.

Conozca:

- Las características de los materiales que intervienen en el diseño de estructuras de concreto, aplicando las normas de los reglamentos de construcción en el diseño de elementos de concreto reforzado.
- Las propiedades mecánicas del concreto y acero de refuerzo así como las estructuras de concreto reforzado, su diseño y aplicación.
- Las hipótesis y especificaciones de los elementos sujetos a flexión para el concreto colado in-situ, presforzado y post tensado.

Desarrolle sus habilidades para el análisis y diseño de elementos:

- Sujetos a diversos tipos de solicitaciones mecánicas y deformaciones, generadas por las cargas a las que va a estar sometida durante su vida útil, de acuerdo a las especificaciones existentes.
- Simples y doblemente armados de sección rectangular y de sección T.
- Proporcionando el área de acero de refuerzo, peralte por flexión y refuerzo transversal por cortante, así como el cálculo de las longitudes de anclaje y desarrollo conforme a los reglamentos vigentes.

El **Dr. McCormac** es profesor emérito de la Universidad Clemson. Pertenece a la American Society of Civil Engineers. Sus contribuciones a la educación y a la profesión de la ingeniería han sido reconocidas por la American Society for Engineering Education (ASEE), el American Institute of Steel Construction (AISC) y el American Concrete Institute (ACI). Incluido en el International Who's Who in Engineering como uno de los 125 ingenieros o arquitectos más destacados en el mundo por su contribución a la industria de la construcción, es uno de los dos educadores en el mundo contemporáneo que ha recibido este honor.

El **Dr. Brown** es profesor emérito de la Universidad Clemson. Ingeniero Civil por la Universidad de Houston. Pertenece a la American Society for Testing and Materials (ASTM) y es miembro fundador de The Masonry Society (TMS). Sus áreas de interés son: Estructuras de concreto y mampostería e Investigación Estructural Experimental. Las materias que imparte son: Diseño Concreto, Diseño de Concreto Reforzado y Diseño de Concreto Presforzado.

www.alfaomega.com.mx







"Te acerca al conocimiento"
Alfaomega Grupo Editor